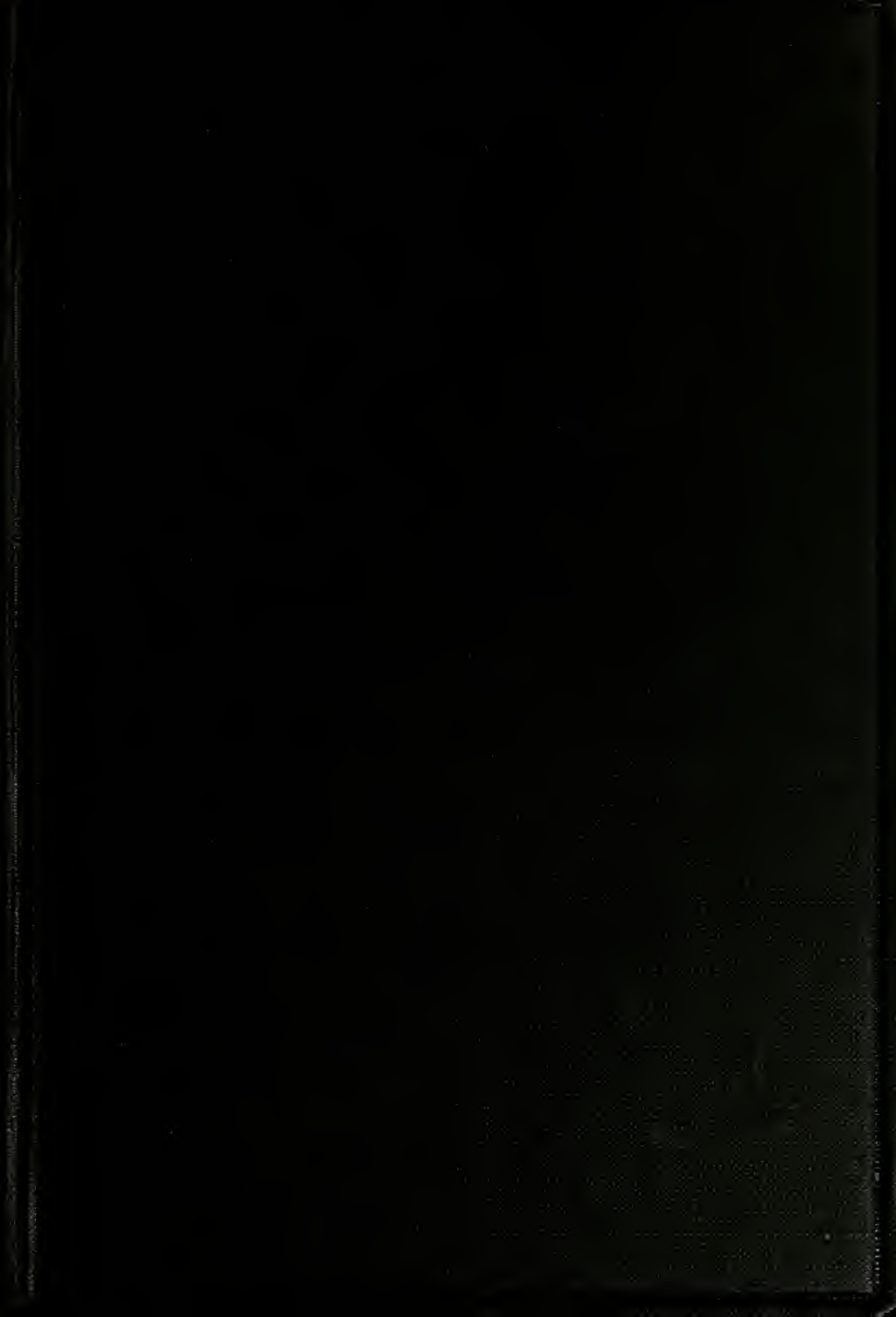


L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

GENÈVE

IMPRIMERIE W. KÜNDIG & FILS

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE.

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
Examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université de Genève.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

DIXIÈME ANNÉE

1908

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS
10, CORRATERIE, 10

1908

LA PRÉPARATION DES CANDIDATS A L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES[1]

Propositions de la Commission d'enseignement des naturalistes et médecins allemands présentées au Congrès de Dresde (sept. 1907) par MM. les professeurs A. GUTZMER *et* F. KLEIN.

(Voir la table des matières à la fin de ce rapport p. 48.)

La RÉDACTION DE « L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE » *attire tout particulièrement l'attention de ses lecteurs sur cet important rapport qu'elle a tenu reproduire in extenso. Elle accueillera volontiers les réflexions que pourra suggérer la lecture de cette remarquable étude.*

Dans ses rapports des assemblées de Méran[2] et de Stuttgart, la Commission d'enseignement des naturalistes et médecins allemands a montré d'une façon complète comment elle entend établir, conformément aux besoins actuels, l'enseignement des mathématiques et des sciences naturelles dans les différentes écoles supérieures qui existent actuellement. On supposait donc d'une façon manifeste, quoique sous entendue, qu'il ne manquerait pas dans l'avenir de maîtres s'efforçant de faire face aux exigences scientifiques toujours plus considérables de leur vocation. Avant de clore son activité, la commission devait donc s'occuper d'une manière approfondie de la question de la préparation du corps enseignant qui prend une importance de plus en plus marquée: elle présente dans les lignes qui vont suivre ses nombreuses réflexions et considérations touchant à ce sujet.

Etant donné que les règlements, concernant la question qui nous occupe, sont très variés dans les différents Etats allemands, nous nous sommes toujours basés, en première ligne, dans les rapports de Méran et Stuttgart, sur les règlements en vigueur en Prusse et n'avons tenu compte qu'incidemment de ceux existant dans les autres Etats allemands; et cela afin d'apporter aux propositions qui vont suivre toute la clarté nécessaire. Nous avons conservé cette manière de procéder dans toutes les explications qui suivront; pour les mêmes motifs, nous ne voulons cependant pas omettre d'attirer l'attention sur deux publications nouvelle-

---

[1] Extrait du Rapport général sur l'activité de la Commission d'enseignement des naturalistes et médecins allemands, publié au nom de la Commission par M. le Prof. A. GUTZMER. — Traduction de M. J.-P. DUMUR (Genève).

[2] Voir l'*Ens. math.*, 8e année, 1906, p. 5-25; 57-65 (*Réd.*).

ment parues, qui ont entrepris le travail difficile de comparer les règlements en vigueur dans les différents Etats allemands ou de les placer au moins en parallèle. Ce sont :

H. Morsch. *Das höhere Lehramt in Deutschland und Österreich.* Leipzig und Berlin 1905.

O. Schröder. *Die Ordnung des Studiums für das höhere Lehramt in Deutschland und die gesetzlichen Prüfungsbestimmungen in den einzelnen deutschen Bundesstaaten.* Leipzig 1906.

La base fondamentale des considérations qui vont suivre se trouvera, conformément à ce qui vient d'être dit, dans l'organisation des examens pour les chaires de professeurs des écoles supérieures, actuellement en vigueur en Prusse et qui date du 12 septembre 1898. Cela ne nous empêchera cependant pas de recommander parfois une modification de cette organisation, et nous avons insisté spécialement sur ce point chaque fois que l'occasion s'est présentée (voir la comparaison au chapitre VIII en bas) ; cependant, dans l'intérêt même du but à atteindre, nous nous sommes efforcés en général de nous conformer aux règlements en vigueur. Et au fait, ce n'est pas la forme extérieure du règlement qui importe en première ligne, mais bien l'esprit dans lequel il est suivi : Et c'est à ce point de vue-là que nous nous sommes placés dans le rapport de Méran et de Stuttgart.

La question spécialement importante de la participation des écoles supérieures techniques à la préparation des maîtres, a été renvoyée au dernier paragraphe, où elle sera traitée d'une façon spéciale : les observations des paragraphes suivants, relatives à l'enseignement des établissements supérieurs se réfèrent donc en première ligne aux universités.

Nous aimerions encore appuyer sur le fait que les développements qui vont suivre sont basés sur des rapports détaillés concernant les différentes branches en considération. Effectivement nous avons entrepris notre travail de la façon suivante : nous avons engagé un certain nombre de spécialistes (faisant partie de la commission ou non) à présenter, dans des mémoires spéciaux, leurs idées concernant la préparation des candidats à l'enseignement scientifique, chacun partant de son propre point de vue.

Nous donnons ici la liste des publications qui en résultèrent :

C. Chun. *Probleme des biologischen Hochschulunterrichts* (Natur und Schule V).

C. Duisberg. *Der chemische Unterricht an den Schulen und der Hochschulunterricht für die Lehrer der Chemie* (Zeitsch. für angewandte Chemie XIX ; Sonderausgabe bei Spamer, Leipzig 1906).

K. T. Fischer. *Vorschläge zur Hochschulausbildung der Lehramtskandidaten für Physik* (Z. f. d. physikalischen und chemischen Unterricht XX, sowie Natur und Schule VI).

F. Klein. *Probleme des mathem.-physikalischen Hochschulunterrichts* (Jahresber. der deutschen Mathematiker-Vereinigung XIV).

A. Peter. *Aufgaben und Ziele des Unterrichts in der Botanik an Schulen und Universitäten* (Natur und Schule VI).

G. Steinmann. *Der Unterricht in Geologie und verwandten Fächern auf Schule und Universität* (Natur und Schule VI).

Nous profitons de l'occasion pour remercier ici les auteurs ci-nommés de leur aimable empressement, mais nous voulons en même temps déclarer expressément que, d'un commun accord avec les auteurs, nous déclinons, dès maintenant, toute responsabilité. Nous avions particulièrement à nous maintenir dans l'idée que nous n'avions pas à représenter les intérêts des différentes branches séparément, mais que, bien au contraire, nous avions à égaliser les intérêts des différents domaines mathématiques et de sciences naturelles.

Notre intention est de présenter dans ce qui suit un coup d'œil d'ensemble aussi cohérent que possible. On voudra donc bien nous excuser si nous n'avons intercalé aucune citation dans nos développements, quoique cela nous eût été parfois commode. On s'expliquera également la division plutôt aride du texte en paragraphes et numéros ; nous espérons par cela pouvoir renvoyer plus facilement le lecteur à tel ou tel passage. Entre temps, la question de la préparation scientifique des candidats à l'enseignement des mathématiques et des sciences naturelles a déjà été traitée à Pâques de cette année à Dresde par l'association pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles. Nous nous réjouissons de pouvoir affirmer que les rapports donnés par cette assemblée, ainsi que la ligne de conduite adoptée (comme ils sont publiés dans le N° 4 du Jahrgang XIII des «Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften» août 1907), s'accordent parfaitement avec notre exposé.

I. — Principes fondamentaux.

A. De l'activité scolaire et des examens de professorat.

1. La commission d'enseignement doit insister d'une façon spéciale sur le fait que l'enseignement des mathématiques et des sciences naturelles dans les écoles supérieures doit être fait par des personnes réellement compétentes, possédant leur branche à fond, c'est-à-dire par des maîtres ayant à leur actif une préparation académique complète pour ce qui concerne l'objet de leur enseignement.

2. Cela n'exclut nullement le fait que le professeur qui s'est spécialisé ne s'initie d'une manière intelligente au but que l'organisation scolaire se propose d'atteindre et aux moyens dont elle dispose ; cela nous paraît au contraire d'une importance capitale. Nous y reviendrons du reste d'une manière plus effective (Paragraphe IV).

3. Au surplus, c'est dans l'intérêt même de l'activité scolaire que le champ d'enseignement de chaque professeur ne soit pas par trop limité.

4. Les propositions 1 et 3 présentent en principe des exigences contraires entre lesquelles on choisira un juste milieu correspondant autant que possible aux besoins actuels.

5. A cet égard, l'organisation actuellement en vigueur en Prusse se caractérise par les faits suivants :

a) Qu'il soit laissé au candidat une grande liberté sur la façon dont il veut se préparer, c'est-à-dire sur le choix des branches à acquérir.

b) Mais qu'il puisse plus tard être à même, selon les circonstances, de se charger même de l'enseignement de branches pour lesquelles il ne possède pas une préparation académique spéciale.

6. Nous ne pouvons apercevoir, dans cette manière de procéder, aucune solution satisfaisante de la difficulté indiquée ci-dessus. Car dans chacun des domaines qui nous occupent les méthodes scientifiques ont pris un développement si varié et si étendu, qu'il ne peut être question en aucune façon d'une instruction générale uniforme acquise dans un domaine et se transportant ensuite dans un autre.

7. Un contraste frappant se manifeste déjà dans ce sens dans le cycle des études de mathématiques et de sciences naturelles. Les mathématiques et la biologie en forment les extrémités et ont, en fait, fort peu de relations entre elles. Ce n'est en effet qu'une liaison indirecte qui conduit des mathématiques à la physique, de là à la chimie et de celle-ci à la biologie.

8. Après mûres réflexions, nous devons recommander comme règle normale une division des études de mathématiques et de sciences naturelles en deux groupes : Les mathématiques et la physique d'un côté, la chimie et la biologie de l'autre ; la séparation entre les deux groupes pouvant se faire différemment suivant les circonstances comme on le montrera au paragraphe VII.

9. La nécessité de cette séparation est rendue manifeste par les considérations qui suivent : Les différentes branches d'étude des mathématiques et des sciences naturelles se sont développées effectivement d'une façon si extraordinaire durant ces dernières années, qu'une étude uniforme de l'ensemble de ces sciences conduira inévitablement au dilettantisme. Nous ne pouvons pas non plus recommander, conformément à 6 et 7, d'étendre au

cycle complet des études de mathématiques et de sciences naturelles les études spéciales concernant une branche pour l'acquisition de ce qu'on appelle les certificats de capacité pour l'enseignement du deuxième degré (Lehrbefähigungen zweiter Stufe); nous désirons bien plus que le candidat aspire autant que possible à l'obtention des certificats de capacité pour l'enseignement du premier degré dans toutes les branches sur lesquelles il passe un examen.

10. Nous prions donc les administrations scolaires de mettre en évidence la nécessité de cette division d'études (ce qui du reste a été fait depuis longtemps à l'étranger et dans quelques états allemands) et par conséquent de faire entreprendre à chaque candidat le genre d'étude pour laquelle il a la préparation voulue. Nous ferons encore dans la suite différentes observations afin de diminuer les difficultés pratiques qui résultent de ce principe. Nous renvoyons spécialement aux développements des paragraphes II-VII.

B. Considérations sur les études universitaires.

1. Pour ce qui concerne les hautes études scolaires, des points de vue très différents viennent en considération, points de vue qui sont parfois en opposition les uns avec les autres. Nous devons exiger d'un côté que le candidat s'assimile à l'université les notions générales du domaine correspondant à sa vocation future et qu'il acquière une instruction générale appropriée, mais d'un autre côté qu'il se spécialise scientifiquement, car ce n'est qu'en approfondissant qu'on sera à même d'acquérir cette conception positive de la science qui est une condition préliminaire indispensable à toute activité supérieure. Ensuite nous devons instituer comme obligatoire une certaine base commune pour les étudiants des différentes branches d'étude et, d'un autre côté, nous devons cependant laisser suffisamment de place pour le développement individuel.

2. Pour rendre possible cet état de chose, nous diviserons, du moins en principe, les études universitaires en deux parties :

a) une partie générale fournissant la base commune aux différents groupes et comprenant des branches d'études ayant entre elles certaines relations.

b) une partie spéciale, servant à la spécialisation des études.

Nous reviendrons sur *b)* d'une façon générale aux paragraphes VI et VII ; nous donnerons par contre des développements détaillés sur *a)* dans les paragraphes II à V. Nous pensons que la partie *a)* peut être terminée en six semestres dans des circonstances favorables.

3. Nous avons à déplorer particulièrement deux sortes d'inconvénients en ce qui concerne l'enseignement actuel des universités. Tout d'abord nous regrettons que justement pour les candidats à l'enseignement la partie *a)* ne soit pas assez développée, tandis que la spécialisation commence d'emblée. Par contre, il semble que certains cours d'introduction, auxquels assiste un auditoire très hétérogène, soient conçus d'une façon par trop élémentaire, par le fait qu'il n'est pas tenu compte des progrès qui ont été faits dans l'enseignement de bien des domaines des mathématiques et des sciences naturelles dans nos écoles supérieures ; par suite les candidats ne profitent pas avantageusement de ces cours.

4. En outre nous formulons le souhait que l'enseignement soit poussé plus que par le passé dans une direction pratique, que les exercices, séminaires, etc, trouvent systématiquement leur place dès le début à côté des cours et développent ainsi l'initiative des étudiants.

5. A cet égard, nous réclamons aussi partout, non seulement pour l'enseignement supérieur des sciences naturelles, mais aussi pour celui des mathématiques, d'autres ressources telles que : salles de lecture et de travail, séminaires, salles de collections et salles de dessin, en général des installations d'institut.

6. L'organisation des universités est devenue effectivement si compliquée dans les Facultés de philosophie qu'il est impossible à l'étudiant de la comprendre, dès le début, sans éclaircissements. C'est pourquoi nous recommandons en général de donner les conseils et explications nécessaires aux différentes catégories d'étudiants de la Faculté de philosophie, et en particulier aux candidats de nos deux groupes d'études ; conseils dans le genre de ceux qui ont déjà été publiés depuis quelques années dans différents endroits et concernant la question qui nous occupe. Ces explications ne rendent en aucune façon les études schematiques, elles leur sont au contraire très utiles pour le choix des cours et exercices dont nous avons parlé.

7. Nous pensons que les développements que nous donnons dans les paragraphes suivants sont de telle nature que toutes les universités devraient leur rendre justice. Nous ne pensons pas par là les rendre toutes pareilles. Les divergences variées qui règnent entre les différentes universités ont leur valeur propre, et nous ne voudrions en aucune façon les supprimer.

8. Il peut paraître surprenant que dans la suite nous ne parlions pas davantage des différences qui peuvent résulter du fait que les candidats sortent d'un gymnase, d'un « Realgymnasium» ou d'une « Oberrealschule. Nous ne l'avons pas fait parce que ces différences ne peuvent être fixées d'une manière absolue. Les privat-docents devraient donner leurs premiers cours de ma-

nière à offrir à tous leurs auditeurs quelque chose de suffisamment nouveau tout en étant compréhensible pour tous, exigence qui n'a rien d'impossible. Celui qui vient à l'université avec une préparation plus spéciale aura naturellement une tâche plus facile ; il pourra peut-être entreprendre des études plus élevées et spécialiser ses études de bonne heure ou compléter convenablement son instruction dans d'autres directions.

II. — Les études générales des Mathématiques pures et appliquées et de la Physique.

A. Mathématiques.

1. *Remarques générales concernant l'enseignement des mathématiques dans les universités.*

a) D'après la façon de voir des personnes non initiées, il y aurait une différence marquée entre l'enseignement mathématique dans les universités et celui des établissements secondaires, comme s'il s'agissait de domaines séparés n'ayant aucune liaison. Cette conception populaire est due à un développement incomplet de la question. Il est vrai qu'on ne peut nier qu'un contraste profond existe effectivement dans l'organisation de quelques écoles supérieures pour la préparation des candidats. La commission, toutefois, aimerait contribuer par tous les moyens possibles à la disparition de ce contraste, et, elle attire l'attention sur le fait que, pour atteindre ce but, il suffit de se conformer aux arrangements déjà adoptés.

b) Le contraste deviendra moins frappant si dans l'enseignement des mathématiques dans les écoles supérieures, on place, conformément aux propositions faites à Méran, la notion de fonction au centre des études et si l'on en poursuit le développement jusqu'au calcul infinitésimal. Car l'enseignement universitaire part précisément de cette notion fondamentale.

c) On diminuera encore le contraste en accordant une place à l'Université aux mathématiques appliquées qui ont considérablement progressé ces dernières années et pour lesquelles nous établirons un plan spécial. Au fait certaines applications embrassent le champ complet de l'enseignement mathématique.

d) Du reste nous recommandons que dans l'enseignement universitaire des mathématiques on apporte beaucoup de soin à la distinction entre ce qui doit être obligatoire pour tous les candidats à l'enseignement des différentes branches et l'étude plus approfondie conduisant à la spécialisation de l'un ou de l'autre de ces domaines. On devrait éviter toute exagération dans les exigences des études générales que nous traitons ici.

e) Si l'on a soin de faire toujours ressortir, à côté des développements nécessaires, la portée générale des théories traitées par des considérations étendues et rétrospectives, le candidat recevrait alors un développement mathématique qui lui rendrait immédiatement d'utiles services pour sa vocation future et qui n'aurait plus besoin d'un perfectionnement artificiel.

2. *De l'enseignement universitaire des mathématiques appliquées.*

a) On sait que des démarches décisives ont été faites pour réintroduire les mathématiques appliquées dans l'enseignement universitaire. L'organisation des examens de 1898 en Prusse introduisit un enseignement spécial de mathématiques appliquées qui est lié à celui des mathématiques pures et qui prescrit des connaissances déterminées dans les domaines de la géométrie descriptive, des méthodes mathématiques de la mécanique technique, de la topographie et du calcul des probabilités.

b) La mécanique théorique et la physique mathématique ne sont pas introduites ici, car elles sont exigées déjà ailleurs dans l'organisation des examens (mathématiques pures et physique). Du reste les exigences sont évidemment liées au niveau de l'enseignement des mathématiques dans les écoles techniques, niveau qui était différent en 1898 de ce qu'il est maintenant. C'est pourquoi, si l'on veut tenir compte de ce fait, les mots : « méthodes mathématiques de la mécanique technique » devront être interprétés de façon à comprendre non seulement les anciens domaines de la statique graphique et de la cinématique, mais encore les nouvelles méthodes mathématiques des ingénieurs (diagrammes de différentes sortes, etc.).

c) Partant de ce point de vue-là, nous sommes, par intime conviction, de l'opinion générale qui a été exprimée dans l'assemblée des représentants des mathématiques appliquées, à Pâques 1907, à Göttingue[1], à savoir que les mathématiques appliquées ne comprennent pas seulement quelques domaines restreints des mathématiques, mais qu'elles sont bien plutôt la mise en évidence des moyens dont disposent les mathématiques pratiques : du dessin, du calcul et de la mesure dans leur application dans les domaines voisins. Nous pensons aussi que dans l'enseignement des mathématiques appliquées, ces domaines voisins doivent être étudiés à fond, dans leur caractère objectif, s'ils n'interviennent pas déjà d'eux-mêmes dans la préparation des étudiants. L'assemblée déjà citée a tenu compte de cette dernière question en introduisant très à propos la partie technique de la physique dans l'enseignement de la physique déjà en vigueur; mais l'astronomie, la géodésie (et dans une certaine mesure la géophysique),

[1] Voir le compte rendu dans le *Jahresbericht der D. Mathem.-Ver.*, XVI, 1907.

doivent être introduites dans les mathématiques appliquées elles-mêmes.

d) Ainsi les « mathématiques appliquées » embrassent un domaine considérable de l'éducation mathématique. Elles fournissent des connaissances et des aptitudes qui sont d'une utilité constante au maître à tous les degrés des écoles supérieures, surtout si l'instruction est donnée dans le sens de nos programmes de Méran. Nous n'hésiterons donc pas à prescrire les mathématiques appliquées comme une partie nécessaire à toute préparation mathématique normale, — nous sommes par cela d'accord avec les conclusions de la conférence citée — et à recommander, par conséquent, instamment aux candidats en mathématiques les examens en mathématiques appliquées. Aussi les avons-nous introduites dans les schema (Paragraphe V) des études générales de mathématiques et de physique.

e) Nous demanderons à chaque université les installations nécessaires qui sont indispensables pour les mathématiques appliquées telles que nous voudrions les introduire, c'est-à-dire non seulement les maîtres (privat-docents et assistants) nécessaires, mais aussi les installations diverses voulues, comme salles de dessin, etc., et tout particulièrement la création d'observatoires d'enseignement partout où l'on ne trouve pas déjà d'observatoire ou instituts analogues auxquels est liée directement l'instruction de l'astronomie et de la géodésie. Ces observatoires seraient de petits instituts dans lesquels les étudiants trouveraient les ressources et instruments indispensables, et cela dans une mesure suffisante pour le but qu'ils se proposent d'atteindre.

f) Cette extension du domaine des mathématiques appliquées est rendue nécessaire par une petite modification dans l'organisation des examens en Prusse, à savoir qu'en outre des connaissances en géodésie, on en exige, ou tout au moins on désire, en astronomie. Nous recommandons encore, afin que les mathématiques appliquées perdent la position spéciale qu'elles occupent dans le cycle des autres branches, de délivrer le certificat de capacité pour les mathématiques appliquées non seulement pour le premier degré comme il a été fait jusqu'à présent, mais aussi pour le second degré.

g) Pour être complets nous devons encore insister sur le fait que, comme partout ailleurs les exercices pratiques doivent avoir leur place importante dans les mathématiques appliquées. La conférence de Pâques de 1907, déjà citée, a insisté catégoriquement sur cette question en réclamant pour l'usage des mathématiques appliquées l'installation de laboratoires de mathématiques, analogues aux laboratoires de physique et de chimie, et qui trouveraient du reste leur raison d'être également pour les mathématiques pures.

3. *De l'enseignement universitaire des mathématiques pures.*

a) Il va de soi que la culture des mathématiques pures ne doit pas céder le pas aux mathématiques appliquées (ni à l'université ni dans les établissements secondaires), mais qu'elles doivent être soutenues et complétées par ces dernières. Les mathématiques pures restent toujours la partie importante, donnant à l'édifice sa cohésion caractéristique. La Commission est aussi tout à fait de l'avis que le certificat de capacité de l'enseignement des mathématiques appliquées soit lié, dans le règlement des examens en Prusse, à celui des mathématiques pures.

b) La géométrie analytique ainsi que le calcul différentiel et intégral forment, selon la coutume, le début des études universitaires des mathématiques pures; si les propositions formulées à Méran sont mises en vigueur dans les écoles, le jeune étudiant trouvera la liaison immédiate entre ces branches et les résultats acquis en mathématiques dans les classes supérieures des écoles. Il serait aussi excellent pour une préparation rationnelle du futur professeur si l'on adjoignait à ces cours de début en mathématiques pures, des cours sur certains chapitres élevés de l'algèbre et de l'analyse, et d'autres analogues sur la géométrie et la mécanique. Comme cela, la liaison entre cette première partie et la physique théorique serait faite. C'est aussi le moment de faire intervenir des considérations sur les principes et sur les notions intuitives.

c) L'ordre dans lequel ces cours supérieurs devront être suivis est assez indifférent, et le choix des branches à s'assimiler dépend, dans une large mesure, de l'étudiant lui-même. Nous demandons seulement qu'il ne se charge pas trop, car il doit encore pouvoir suivre l'enseignement des mathématiques appliquées et de la physique (voir le tableau des études générales). Il est donc stipulé que les cours détaillés sur certaines parties des mathématiques pures, comme il y en a généralement beaucoup, doivent être considérés comme des cours spéciaux qui ne sont destinés qu'aux candidats qui désirent approfondir les mathématiques pures.

d) A propos de ce qui vient d'être dit, nous ne pouvons nous empêcher d'attirer l'attention sur le fait que certains déplacements, que l'on peut qualifier de contraires à l'esprit normal des choses, ont eu lieu non seulement aux examens, mais aussi dans la marche générale de l'enseignement universitaire, et cela, sous l'influence de règlements d'examens en vigueur depuis une dizaine d'années. Le mathématicien pur, en tant que membre de la commission des examens pour la candidature aux chaires de professeurs, possède un auditoire relativement considérable dont il peut, lorsqu'il le veut, exiger beaucoup. L'astronome par contre,

qui ne fait partie d'aucune commission d'examens se limite, la plupart du temps à la préparation des spécialistes, à moins qu'il ne donne un cours général, pour étudiants de toutes Facultés, sur l'Astronomie populaire, ce qui ne suffit pas pour les candidats. Nous aurons sous ce rapport les mêmes observations à faire plus loin lorsque nous traiterons de l'organisation de la physique expérimentale pour laquelle il faut tenir compte, en outre des candidats à l'enseignement des diverses catégories d'étudiants : médecins, pharmaciens, etc.; on risque donc de ne pas avoir assez égard aux intérêts scientifiques des candidats. Nous pensons, dans nos propositions, qu'il est de toute importance d'aplanir, au moins en quelque mesure, ces inégalités dans la préparation universitaire de nos candidats, inégalités qui sont dues à des circonstances extérieures.

e) Comme conclusion des études générales de mathématiques pures nous recommandons expressément un cours qui présenterait les mathématiques dans leur ensemble et en montrerait l'enchaînement, qui rendrait compte en outre, par une vue d'ensemble, de l'importance des branches supérieures dans les différents degrés de l'exercice scolaire. L'expérience montre en effet que sans ce cours spécial, la plupart des étudiants ne se rendent pas compte du lien intime qui relie les différentes parties de la science mathématique les unes avec les autres, de sorte que le but même à atteindre pour le futur maître est pour ainsi dire manqué. Afin d'éviter toute confusion, nous ajouterons encore expressément que le cours que nous recommandons ici suppose, bien entendu, des auditeurs ayant la maturité voulue et ne s'adresse pas aux candidats voulant n'acquérir que le certificat d'enseignement des mathématiques pures pour le second degré.

f) Dans le schéma (Paragraphe V) des études générales en mathématiques et en physique, nous n'avons pas donné une place spéciale aux cours sur les principes philosophiques et historiques des mathématiques qui, à l'heure qu'il est, sont demandés de divers côtés. Nous pensons que les questions dont nous parlons pourront être traitées avantageusement dans les cours que nous avons proposés, tant qu'elles ne font pas l'objet d'études spéciales. Pour des études spéciales dans une direction philosophique ou historique, nous désirerions au contraire des développements plus considérables que ceux qui ont prévalu jusqu'ici ; mais ce n'est pas la place ici de nous étendre sur ce sujet.

g) Nous insistons aussi, pour l'étude des mathématiques pures, sur la nécessité d'exercices variés qui développeront la personnalité des étudiants. En commençant par de simples problèmes, ceux-ci doivent arriver progressivement à des travaux personnels qu'ils pousseront jusqu'au bout, et soumettront aussi, suivant les cas, à leurs camarades dans des conférences libres au séminaire.

Ces exercices pratiques devraient pouvoir se combiner avec ceux des mathématiques appliquées, de façon que l'étudiant puisse régulièrement prendre part, à partir du premier semestre et durant toute son activité universitaire aux exercices pratiques de ces deux catégories de mathématiques (pures et appliquées). Naturellement, pour que cela soit possible, il faudra le secours d'assistants; en passant, nous ne recommandons pas ces exercices pratiques pour lesquels en Prusse on a coutume de compter un assistant pour 30 étudiants.

h) Pour terminer, nous observerons, conformément à ce qui a déjà été dit, qu'il est indispensable pour l'étudiant d'avoir à sa disposition des salles de travail et des bibliothèques de séminaires (où il puisse trouver la littérature nécessaire à sa vocation); ces exigences ont leur raison d'être, étant donné l'esprit suivant lequel on conçoit actuellement une étude ordonnée des mathématiques pures. Nous recommandons aussi des collections de modèles mathématiques qui aident intuitivement à comprendre les cours. L'étendue de ces installations devrait être comprise à peu près comme celle des séminaires de philologie ou d'histoire.

B. — Physique.

Nous pensons tout d'abord que les études de mathématiques et de physique de nos candidats revêtiront un caractère d'unité idéale grâce à l'intervention des mathématiques appliquées, car la culture des mathématiques appliquées telle que nous l'entendons, empiète déjà d'elle-même à bien des égards sur le domaine physique. Grâce à cette liaison, il ne restera à la physique que la tâche spéciale de développer le côté expérimental et les procédés inductifs de cette science.

2. Pour ce qui concerne les installations pratiques de physique on trouve dans presque toutes les universités des instituts physiques modernes. Nous avons à exprimer le vœu que dans tous ces instituts on accorde aussi l'attention voulue aux applications techniques de la physique. Par le fait qu'en plusieurs endroits il existe déjà des installations mécaniques et électrotechniques, il sera facile d'obtenir quelque chose d'utile avec des dépenses relativement faibles. Nous désirons en outre une place plus considérable pour les laboratoires de physique que l'on devrait agrandir en plusieurs endroits (voir 5).

3. Nous recommandons ensuite des transformations dans l'enseignement concernant le cours habituel de physique expérimentale. On s'est souvent plaint en effet du fait que ce cours ne correspondait pas au niveau d'instruction mathématique et physique que possèdent les étudiants en enseignement, au sortir de l'école.

Il ne faut pas oublier que les principes de la physique reçoivent petit à petit un développement assez considérable, non seulement dans les écoles réales de neuf années, mais aussi dans les gymnases; ce sera encore davantage le cas lorsque nos propositions de Meran auront été adoptées dans les écoles et spécialement lorsqu'on aura introduit dans toutes les écoles des exercices de physique (facultatifs ou obligatoires). On utilisera à l'école, cela va sans dire, dans l'enseignement de la physique, toutes les connaissances mathématiques dont l'élève dispose. Un cours universitaire pour lequel on ne suppose aucune connaissance préliminaire, tel qu'il en existait autrefois partout et tel qu'il en existe encore dans quelques endroits, est contraire à cet état de choses, et spécialement un cours où l'on évite avec soin tout ce qui est mathématique et où l'on entame des discussions prolixes et pénibles n'a pas sa place à l'université.

4. Un cours de physique expérimentale répondant au besoin de l'époque devrait présenter l'étude d'ensemble du domaine de la physique en menant de front les théories et les démonstrations expérimentales ; notre idée s'est trouvée du reste confirmée par de nombreux représentants universitaires des sciences physiques. Un tel cours devrait faire un usage continuel du calcul différentiel et intégral élémentaire. Pour cela, nous devons non seulement attendre l'exécution des projets proposés à Méran, mais encore nous en remettre aux privat-docents pour l'organisation de cours complémentaires destinés aux auditeurs qui ne suivent pas, en dehors de cela, les deux semestres de calcul différentiel et intégral (comme le font les candidats à l'enseignement des mathématiques et de la physique). On dira, sans doute, que certaines catégories d'auditeurs qui avaient l'habitude de suivre ce cours de physique expérimentale, protesteront à chaque apparition de considérations mathématiques. Si c'est réellement le cas, on devrait instituer pour eux un cours spécial de physique (comme on l'a fait par exemple à Vienne depuis des années). Par la façon de procéder, en vigueur jusqu'à présent en maint endroit, non seulement nos candidats perdent un temps précieux, mais ils n'ont plus le plaisir de l'étude et leurs progrès en souffrent.

5. Nous recommandons ensuite aux candidats un important développement des exercices pratiques de physique. Ceux-ci se réduisent principalement, jusqu'à présent, aux exercices de mesures auxquels l'étudiant a coutume de prendre part immédiatement après avoir terminé son cours de physique expérimentale. Nous voulons certainement maintenir cet état de choses, nous désirons seulement que l'étudiant ne soit pas conduit par cela à une façon de procéder toute schématique, mais qu'il soit plutôt en relation personnelle avec le privat-docent (ou assistants spéciaux) qui s'occupera de lui individuellement. Cependant, conformément à des désirs souvent exprimés, nous aimerions encore un autre

genre d'exercices comme on en trouve depuis peu en quelques endroits, et qui devraient, dans l'intérêt des futurs maîtres, être organisés d'une façon systématique. Ce seraient tout d'abord des exercices développant l'habileté des mains où l'on apprendrait en particulier la manipulation du verre et du métal et où l'on donnerait quelques indications sur les outils et le matériel). Ce seraient ensuite des enseignements pratiques sur le maniement des instruments et la construction d'appareils (pour lesquels la première place ne serait pas donnée aux appareils d'école, mais plutôt aux instruments scientifiques et aux appareils pour l'enseignement universitaire qui fourniront à l'étudiant l'occasion d'expériences appropriées. Un cours particulier enfin serait consacré à la connaissance pratique des applications techniques de la physique (machines et électro-technique). Ce cours trouverait son importance non seulement en ce qui concerne la culture générale de la science, mais encore pour ce qui touche aux besoins de l'enseignement scolaire qui réclame du maître, dans une mesure toujours plus large, une certaine connaissance de ces matières. On pourrait même, au besoin, instituer à cet effet un enseignement spécial.

6. Pour ce qui concerne les cours de physique supérieure qui rentrent dans le cadre de nos études générales, nous nous contenterons d'exprimer le vœu qu'ils exposent dans une étude d'ensemble la physique théorique, mais qu'on ait soin de la rendre claire par de nombreuses démonstrations expérimentales.

7. Il est indispensable aussi que l'étudiant en physique se munisse également de quelques connaissances en chimie, même s'il n'a pas l'intention d'acquérir (comme nous le recommandons dans le § VII.) un grade formel en chimie. Il suffirait qu'il suivit pendant un semestre le cours d'introduction de chimie générale, et qu'il fréquentât, pendant un semestre également, un laboratoire de chimie correspondant à ses besoins.

III. — Les Etudes générales en Chimie et en Géologie, y compris la Minéralogie et la Biologie.

Sur l'étendue et la délimitation de ces branches et leur importance dans les examens de professorat.

a) Les branches d'études que nous examinons dans le présent chapitre sont également considérées dans les règlements d'examens actuellement en vigueur comme allant ensemble, mais elles sont groupées d'une façon un peu différente de celle que nous recommandons.

Dans les règlements d'examens de Prusse, la *chimie* et la *minéralogie* forment une seule branche d'examen, comprenant également la géologie, de telle sorte qu'on exige la connaissance des principaux terrains et formations géologiques, de l'Allemagne en particulier.

Dans le domaine biologique, *botanique* et *zoologie*, on introduit, d'après les règlements prussiens, la connaissance de l'anatomie et de la physiologie du corps humain, comme base de l'*anthropologie*.

b) Dans les projets de réformes présentés par le rapport de la commission d'enseignement de Méran, on trouvera tout d'abord une modification importante par le fait que la *géologie* est traitée indépendamment de la *chimie* et de la *minéralogie* tandis que jusqu'à présent on l'avait comprise dans ces deux branches. Elle mérite cette place dans l'instruction scolaire par son importance comme trait d'union entre la nature organique et inorganique; elle donne par cela même une certaine unité à l'observation de la nature, et grâce à elle ces deux domaines revêtent le caractère d'une science historique.

Dans les projets de Méran, l'enseignement propre de la géologie ne comprend qu'un semestre en « Oberprima, » mais les autres branches parallèles, par exemple la chimie, supposent des connaissances géologiques lorsqu'elles traitent du sel gemme, des calcaires, de la houille, des silicates, etc. De même l'enseignement biologique exige en divers endroits des considérations sur les formes fossiles des gisements houilliers, par exemple en botanique dans l'étude des cryptogames et des conifères, en zoologie dans celle des mollusques (ammonites et belemnites), des crustacés (tribolites), et des reptiles (sauriens fossiles et leurs formes de transformation).

L'étude de la géologie prendra encore plus d'extension lorsque, ainsi que nous le désirons, on aura introduit l'étude de la *géographie* dans celle des sciences naturelles, de façon à réunir l'enseignement de ces deux branches. Des questions, concernant la configuration superficielle des pays et les bases géologiques de la géographie actuelle des plantes et des animaux, entreront alors en considération et exigeront une étude détaillée de la géologie.

Il résulte de cela que le maître de chimie et de biologie doit avoir à sa disposition des connaissances géologiques approfondies et qu'il n'est pas juste de ne considérer cette branche, dans les examens pour l'enseignement, que comme une simple dépendance de la chimie.

c) Dans les propositions de Méran, on confère également une plus grande importance à la *minéralogie* que celle qu'on lui a accordée jusqu'à présent. Quoique dans ces projets elle soit traitée

dans l'enseignement général de la chimie comme une partie de la chimie inorganique, il ne faut pas oublier que le cours de minéralogie en « Unterprima » a comme but la préparation à l'étude générale de géologie en « Oberprima » ; du reste ces sciences ont entre elles des rapports étroits, spécialement dans la façon dont elles sont traitées dans l'enseignement scolaire, et personne ne contestera les liens intimes qui unissent la minéralogie et la chimie.

d) En vertu de ces considérations, la commission estime qu'il est convenable de considérer le domaine de la *géologie* et de la *minéralogie* comme branche d'examen indépendante et de le séparer de la chimie. Cette manière de voir a d'autant plus sa raison d'être que la chimie mérite, au même titre que la physique, d'être considérée comme une branche d'examen indépendante, aussi bien par son importance en tant que branche d'enseignement que par son étendue.

e) Dans les projets de la commission d'enseignement concernant les établissements réaux, il est donné une grande extension aux sciences biologiques, botanique et zoologie, de sorte qu'il y a des raisons pour considérer ces deux domaines comme des branches d'examen spéciales, ainsi que du reste on l'a recommandé de divers côtés.

Cependant, abstraction faite de ce qu'il ne serait pas bon de multiplier davantage le nombre des branches indépendantes, il est d'un intérêt général de ne pas séparer ces deux domaines, qui sont du reste intimement liés, mais de reconnaître toutefois leur importance comme sciences spéciales en tenant compte des considérations suivantes :

α. Etant donné la place actuelle occupée par ces deux sciences, il ne convient pas que les examens en *botanique* et en *zoologie* se passent en présence du même examinateur.

β. Pour ce qui concerne l'enseignement biologique jusque dans les classes supérieures, il est préférable de ne pas conserver la remarque faite au paragraphe 25 du règlement des examens, à savoir que la capacité à l'enseignement de la botanique et de la zoologie pour le premier degré soit déjà reconnue lorsque le candidat ne l'a obtenue que pour l'un des domaines, tandis que pour l'autre il n'a obtenu que celle du second degré.

f) En vertu des considérations qui précèdent, nous recommandons aux candidats en chimie-biologie la préparation aux trois branches d'examen suivantes :

A. Chimie.

B. Géologie (y compris la minéralogie).

C. Biologie (botanique, zoologie y compris l'anthropologie).

Remarques particulières a chacun de ces domaines.

A. Chimie.

1. *Généralités sur la place de la chimie dans les sciences naturelles.*

La chimie a, en quelque sorte, la même tâche à remplir, relativement aux autres branches des sciences naturelles que celle des mathématiques appliquées vis-à-vis des autres branches des mathématiques. De même que la chimie, dans ses rapports avec la géologie et la minéralogie, explique la formation et la transformation des minéraux et des roches, son importance fondamentale dans les sciences biologiques réside dans le fait qu'elle permet de comprendre les changements de substance caractérisant toute vie organique.

2. *De l'enseignement universitaire en chimie.*

a) La meilleure introduction que l'étudiant puisse trouver dans le domaine de la chimie est, comme de coutume, le cours général de *chimie expérimentale*, durant deux semestres. Nous recommandons que ce cours soit institué de façon à aborder d'emblée tous les domaines qui seront utiles au candidat dans sa future vocation.

b) Ce cours général comprendra, par conséquent, une étude d'ensemble de la chimie inorganique et l'examen des principes fondamentaux de chimie organique. Pour cette dernière, on s'occupera avant tout des combinaisons importantes concernant les transformations de substance des plantes et des animaux ; cependant nous recommandons en outre pour les deux domaines, le point de vue technique et industriel si important au point de vue économique[1]. Il est à recommander également d'intercaler dans le cours quelques aperçus sur la chimie physique et de donner en même temps une idée du développement de la chimie en tant que science en citant les noms des savants les plus en vue dans ce domaine.

c) Le candidat devra ensuite compléter cette préparation par des *exercices pratiques* de séminaires et de laboratoire.

d) Dans les *travaux de laboratoire* il est à recommander qu'on s'occupe des étudiants individuellement et que ces derniers ne

---

[1] (Par exemple la préparation des alcalis, des acides, du verre; les principaux procédés employés dans les fonderies comme dans la préparation du fer et de l'acier; la fabrication de l'alcool, du sucre, l'importance de l'industrie du gaz et du goudron, les matières colorantes, ce qu'il y a de plus important dans la chimie agricole, etc.)

travaillent pas tous uniformément dans l'analyse qualitative et quantitative, comme cela se voit en plus d'un endroit. Dans ses manipulations, le candidat se bornera à étudier les réactions des anions et des cathions et les méthodes de l'analyse quantitative (poids et mesure); naturellement le candidat devra pouvoir également déterminer la constitution chimique d'un minéral simple au moyen de l'analyse qualitative; il doit avoir compris également l'analyse élémentaire et les méthodes pour la détermination des poids moléculaires, de façon à pouvoir exposer ces méthodes et au besoin refaire ces expériences au cas où il serait appelé à enseigner dans un établissement où la chimie est traitée d'une façon relativement complète, comme dans les « Oberrealschulen », où il devra trouver les appareils nécessaires. Mais il ne devra pas être question d'une connaissance complète et approfondie de l'analyse qualitative et quantitative.

e) C'est pourquoi les candidats devraient s'exercer dans les travaux de laboratoire à préparer des expériences, à acquérir une certaine habileté technique dans le montage et la construction d'appareils et dans la préparation d'expériences de démonstration; autant de points qui semblent indispensables à l'enseignement scolaire et en particulier pour les exercices pratiques exécutés en classe.

Pour cela il faut avoir à sa disposition des assistants particuliers, et le mieux serait de les choisir parmi les candidats ayant terminé leurs études.

f) Dans le même ordre d'idées, des séminaires ont été organisés dans quelques universités, dans lesquels le privat-docent expose quelques chapitres choisis, et où les auditeurs s'exercent également à des conférences libres avec expériences.

g) Quant aux cours plus approfondis, comme les cours détaillés de chimie organique, de chimie analytique, physique et technique, ils ne s'adressent qu'aux candidats qui désirent faire de la chimie une étude spéciale. Pour les candidats à l'enseignement qui forment la majorité, il suffira de quelques brèves conférences d'une heure ou deux par semaine où l'on exposera quelques notions sur ces domaines spéciaux (comme on l'indiquera dans les programmes qui suivront), notions qui pourront compléter les lacunes éventuelles du cours général.

B. Géologie (y compris la minéralogie).

1. *Généralités.*

a) Comme nous l'avons déjà fait observer plus haut, les propositions présentées à Méran n'ont ménagé, même dans les écoles réales supérieures, qu'un temps relativement restreint à l'ensei-

gnement propre de géologie et de minéralogie; mais ces dites propositions supposent pour l'enseignement des branches parentes, des connaissances géologiques et minéralogiques si variées que l'enseignement universitaire de la géologie et de la minéralogie doit se faire avec tout autant de soins que celui des autres branches analogues.

b) D'une manière générale, l'enseignement de la minéralogie doit précéder celui de la géologie. C'est pourquoi nous traiterons ces deux branches dans l'ordre indiqué.

2. *De l'enseignement universitaire en minéralogie.*

a) Le cours général de chimie expérimentale en traitant des corps simples et de leurs combinaisons que l'on rencontre dans la nature, aura déjà introduit les principaux minéraux, donné des renseignements sur leur constitution chimique et mentionné ce qu'il y a de plus important sur les formes cristallines.

b) Il est en outre à désirer que les minéraux soient traités systématiquement dans un cours particulier, avec des considérations spéciales sur leurs transformations, leur forme, leur importance dans la constitution des roches et leur utilisation technique. A ce propos, nous recommandons de rendre cet enseignement vraiment utile par une étude intelligente de la nature.

c) Par contre, le candidat ne devra pas s'astreindre à suivre ces cours détaillés de cristallographie et d'optique physique comme on en donne dans plusieurs universités. Il est préférable de traiter sans trop de détails ce qu'il y a de plus important sur ces domaines dans le cours général de minéralogie. Les cours spéciaux n'ont leur raison d'être que pour les candidats qui ont l'intention d'approfondir ce domaine.

d) Nous avons les mêmes recommandations à faire que précédemment au sujet de l'organisation des exercices pratiques des candidats. Un semestre devrait suffire pour cette partie pratique.

3. *De l'enseignement universitaire en géologie.*

a) Il est difficile d'établir une règle définitive, admise d'une manière générale, quant à l'ordre à suivre pour les cours de géologie. La *géologie générale* suppose dans quelques chapitres une certaine connaissance en « géologie historique », mais d'un autre côté une connaissance des forces transformantes de la nature est nécessaire pour la compréhension de la succession des couches terrestres et de même une certaine connaissance en paléontologie est indispensable pour comprendre l'importance des fossiles comme indices révélateurs de l'époque. Ensuite la détermination

de l'époque par l'observation des groupes de fossiles, joue un rôle en *paléontologie*. Le meilleur procédé à suivre pour surmonter la difficulté qui réside dans l'ordre à adopter pour les cours de géologie, sera de traiter chacun des chapitres mentionnés ci-dessus de façon à ce qu'ils se complètent les uns les autres. Après mûres réflexions, la commission recommande pour la préparation des candidats à l'enseignement de géologie l'ordre suivant.

α. *La géologie générale* doit être traitée en premier lieu, en vertu précisément de son caractère de généralité. Il sera bon d'intercaler dans l'introduction quelques éclaircissements sur la division et la suite des époques en géologie, sur l'importance des fossiles pour déterminer l'époque, sur les formations des couches terrestres, etc. La géologie générale est indispensable au chimiste à cause des transformations des matières constituant l'écorce terrestre. Par ses recherches sur les forces et phénomènes qui exercent une action sur l'écorce terrestre, elle jette les fondements nécessaires pour la connaissance de la configuration superficielle de notre planète et de ses propriétés.

β. Dans la *géologie historique* (science des formations successives) le but principal n'est pas d'établir d'une façon précise, au moyen des fossiles, la succession des couches terrestres. Sa tâche est bien plutôt de déterminer autant qu'on peut le faire à l'aide des différentes catégories de fossiles, les transformations dans la configuration superficielle de notre globe et les différences qui en résultent dans les conditions de la vie ; cette détermination devra se faire pour les quelques époques géologiques qui ont été déterminées d'après l'ordre d'ancienneté des fossiles qui leur appartiennent. Cette étude des formations terrestres successives se continuera par celle du développement historique de la couche superficielle actuelle et de sa différenciation bionomique ; dans ce chapitre elle est en relation étroite avec la géologie générale et son utilité pour le géographe est évidente.

γ. En traitant les fossiles comme restes de plantes et d'animaux la *paléontologie* les met en rapport direct avec les systèmes botaniques et géologiques, en parlant de l'extension de ces systèmes à certaines époques. Également en relation avec la géologie historique, la paléontologie donne aux branches biologiques le caractère de sciences historiques.

b) En dehors des cours sur ces différents domaines, nous recommandons aux candidats des exercices pratiques ou séminaires spéciaux touchant à la pétrographie, la géologie et la paléontologie. Il va de soi que les collections des instituts doivent être librement accessibles aux étudiants. Mais surtout beaucoup d'excursions dans les environs immédiats ou éloignés, comme elles sont du reste d'usage partout ; elles doivent être considérées comme des compléments indispensables aux cours.

C. Biologie (botanique et zoologie y compris l'anthropologie).

1. *De l'enseignement universitaire en botanique.*

a) La tâche qui incombe à l'enseignement universitaire de la botanique est tout d'abord de procurer à l'étudiant une connaissance générale des plantes et d'en développer ensuite le point de vue morphologique, physiologique et biologique.

Dans ce but, la commission recommande :

α. un cours général de morphologie et systématique des plantes vasculaires en insistant plus spécialement sur les catégories de plantes utiles au point de vue économique ;

β. un deuxième cours sur l'anatomie et la physiologie des plantes s'appuyant sur les phénomènes biologiques les plus importants (processus de la fructification, relations des plantes entre elles et avec les animaux) ;

γ. un cours sur les cryptogames inférieures (bryophytes et thallophytes), en particulier sur l'importance des êtres vivants inférieurs dans la nature et pour l'homme.

Pour terminer il faudrait instituer un cours général de biologie, qui se trouve mentionné également dans le chapitre suivant concernant l'enseignement universitaire en zoologie, et qui traiterait des conditions générales d'existence des êtres vivants et, par la même occasion, de la répartition géographique des plantes et des animaux.

b) Comme précédemment des excursions scientifiques dans les environs plus ou moins immédiats rendront d'utiles services pour l'étude de la flore indigène.

En examinant, dans le cours de ces excursions, des groupes de plantes qui diffèrent au point de vue de l'habitat, il faudra insister tout spécialement sur la façon dont les plantes dépendent du lieu et de la qualité du terrain, de la saison et du climat ou également de la manière dont l'homme les cultive. En procédant ainsi, la connaissance biologique du pays formera la base d'une étude intelligente de la géographie des plantes.

Il est à recommander aussi d'organiser des excursions pour examiner sur les lieux mêmes les moyens que possèdent les plantes pour se protéger contre des influences extérieures diverses, les dispositions qui permettent la propagation des germes, les relations entre les plantes et les animaux et d'autres considérations générales d'ordre biologique.

c) En outre, pour que l'étudiant apprenne à connaître plus intimement la végétation des zones étrangères, il faut recommander les démonstrations dans les jardins botaniques, serres et musées

de plantes, au moyen de plantes fraîches ou conservées, les descriptions concernant la géographie des plantes en s'aidant au besoin de dessins figuratifs.

d) Comme dans toutes les études de sciences naturelles, il est ici de la plus haute importance que le futur maître de botanique s'initie aussi tôt que possible aux exercices pratiques au laboratoire ou dans les séminaires.

Tout d'abord, le candidat qui se destine à l'enseignement de cette branche devra s'exercer au maniement du microscope et à la technique microscopique. Il devra se livrer ensuite à l'étude de la constitution anatomique microscopique de la plante en cellules et en canaux, et acquérir la connaissance des formes de plantes inférieures. En outre, dans l'intérêt du futur enseignement scolaire que le candidat sera appelé à donner, il est nécessaire d'acquérir à l'université une pratique suffisante dans la préparation d'expériences concernant la physiologie des plantes. Enfin, des expériences et observations d'ordre biologique, comme on en fait déjà dans plus d'une université, trouveront ici leur place.

Dans tous ces exercices pratiques le dessin d'après nature doit venir constamment en aide aux travaux microscopiques.

Il va de soi qu'on étudiera en outre les méthodes ordinaires concernant la conservation des plantes et que les jardins botaniques et collections seront à la libre disposition des étudiants.

2. De l'enseignement universitaire en zoologie y compris l'anthropologie.

a) L'enseignement universitaire en zoologie s'est développé, en ce qui concerne les problèmes touchant aux recherches scientifiques, dans une direction tout autre qu'en botanique, et, en vérité, ce développement s'est trouvé peu favorable pour la préparation des candidats. L'étude de la zoologie en ce qui concerne principalement l'anatomie comparée, devrait déjà se faire d'une façon succincte dans l'enseignement des classes supérieures malgré son caractère de science élevée. Dans les classes moyennes, on se bornera à un aperçu des principales formes du règne animal et principalement des animaux du pays et de leurs conditions d'existence; on développera dans cette étude les différenciations et caractères généraux extérieurs de préférence à ceux de l'organisation intérieure.

D'une manière générale la préparation du candidat laisse plus à désirer dans ce qui touche à la différenciation des formes animales (par exemple dans la connaissance des insectes si importante pour la biologie des fleurs), que dans la connaissance des plantes.

Il ne faut pas ensuite, dans l'intérêt même de l'enseignement scolaire, que le point de vue physiologique soit éclipsé par le côté morphologique. En vue même des instructions concernant l'hygiène qu'il est désirable de donner à l'école, il est important que dans l'étude faite à l'Université du corps humain, les processus relatifs aux changements de substances et la physiologie du système nerveux ne soient pas traités d'une façon trop sommaire,

b) Parmi les cours habituels, nous recommandons avant tout aux candidats ceux de zoologie systématique et de même les cours d'anatomie comparée.

Dans les premiers qui donnent une idée générale de la parenté naturelle des diverses races d'animaux, il sera bon d'introduire, en outre de l'histoire sommaire de la zoologie en tant que science, les principes de la théorie de la descendance et de les discuter. Dans les autres cours, on traitera les principes de l'histoire du développement (embryologie).

Un cours détaillé d'embryologie ne devrait s'adresser qu'à des spécialistes.

Par contre nous recommandons aux candidats un cours jouant le même rôle que l'étude des cryptogames en botanique, traitant des animaux inférieurs qui sont particulièrement importants pour l'homme, spécialement des parasites y compris les parasites du sang, ceux qui nuisent à l'agriculture et à l'horticulture et d'autres.

c) Pour terminer les études de biologie, il serait très important d'instituer un cours, faisant en quelque sorte le pendant de celui qui terminerait les études mathématiques, sur les conditions générales d'existence des êtres vivants et sur leur répartition géographique qui en dépend. Par cela, la zoologie et la botanique qui, à l'heure qu'il est, sont encore considérées comme des branches visiblement séparées, trouveront leur réunion en une science qui envisagera à un point de vue uniforme les phénomènes d'existence de tout être vivant.

d) En zoologie également il faudra donner aux travaux dans les laboratoires et à la participation aux exercices éventuels de séminaires une importance pour le moins aussi considérable qu'aux cours.

En zoologie, les exercices pratiques auront pour but de développer l'art de la dissection anatomique par des préparations des systèmes organiques des différentes formes animales et si possible aussi du corps humain. Ces exercices permettront également de déterminer, à l'aide des collections de l'institut, les types d'animaux rapportés d'excursions.

Ensuite on s'occupera, dans cette partie pratique, du microscope et de ses applications. Il permettra tout d'abord l'étude des prin-

cipales sortes de tissus et servira de guide pour reconnaître et déterminer par soi-même, les formes les plus importantes du règne animal inférieur.

En outre, pour que l'observation se fasse avec toute la pénétration désirable, il sera bon que les étudiants s'exercent dans tous les travaux pratiques à dessiner d'après l'objet même qu'ils observent.

On s'arrangera à pouvoir disposer largement des collections zoologiques et profiter des viviers et jardins zoologiques.

e) Comme en botanique, des excursions générales devront être organisées régulièrement pour compléter l'enseignement universitaire ; ces excursions permettront d'observer les animaux du pays sur place et d'étudier leur genre de vie. On doit attendre du futur maître qu'il connaisse les formes les plus fréquentes des poissons, mollusques et crustacés qui peuplent nos rivières, de même que les animaux terrestres les plus importants, spécialement des groupes des oiseaux et insectes indigènes et leur importance pour l'homme et dans la nature en général : et qu'il ait appris à observer leur vie et leurs habitudes dans les lieux mêmes de leur existence. La visite des jardins zoologiques et botaniques se recommande beaucoup pour développer cette étude.

f) Il ne faut naturellement pas omettre pour le candidat à l'enseignement de la biologie, l'étude de la constitution du corps humain et des fonctions de ses organes.

Mais les cours d'anatomie et de physiologie qui sont ordinairement organisés par la Faculté de médecine sont beaucoup trop détaillés pour les besoins des étudiants en science naturelle et de ceux qui se destinent à l'enseignement. Il est donc à souhaiter qu'un cours peu détaillé soit institué, offrant sous une forme sommaire ce qui est nécessaire au futur instituteur. Sans aborder des considérations touchant spécialement la médecine, ce cours devra former une base convenable à l'enseignement d'hygiène qu'il est désirable de donner à l'école. On doit s'attendre à ce qu'un cours de ce genre sur l'anatomie et la physiologie de l'homme soit encouragé par des auditeurs d'autres Facultés, à cause de son caractère général.

g) Il serait aussi recommandable que, dans un but professionnel également, on organisât un cours abrégé d'anthropologie physique et psychique en y comprenant les âges préhistoriques. Un tel cours ne manquerait certainement pas non plus d'intérêt général et serait suivi par de nombreux auditeurs.

IV. — Des études générales en philosophie et pédagogie. Culture générale.

1. Conformément au règlement des examens, les branches variées d'études des candidats à l'enseignement doivent être complétées par des études générales en philosophie et pédagogie dont nous devons dire maintenant quelques mots. Nous ne nous proposons en aucune façon d'entrer dans les détails, nous désirons simplement dire notre avis d'une façon générale relativement aux questions qui se présentent ici.

2. Nous tenons à dire tout d'abord que nous attachons la plus grande importance à ces études générales, à condition qu'elles soient bien conduites ; elles nous semblent avoir une importance considérable quant à l'influence qu'elles auront plus tard sur le futur maître.

3. Le règlement des examens fait rentrer dans le domaine philosophique l'histoire de la philosophie, la logique et la psychologie. Nous pensons que ces domaines ne doivent pas être exposés dans les cours d'une façon schématique, mais être au contraire présentés d'une manière intéressante et vivante permettant au candidat d'acquérir une conception claire et juste de l'importance considérable de ces branches dans l'ensemble des résultats généraux du travail scientifique. C'est précisément pour cela que nous recommandons de renvoyer ces études à la seconde moitié du temps consacré aux études universitaires, alors que le candidat dispose, en outre d'un jugement plus mûr, des connaissances scientifiques plus étendues.

4. Pour ce qui concerne l'étude universitaire de la pédagogie, on constate une différence essentielle suivant les différents états allemands. Tandis qu'en Allemagne du sud et en Saxe la pédagogie pratique avec ses leçons d'essais, fait partie de l'université, on se borne en Prusse à exposer d'une façon générale les questions pédagogiques (histoire de la pédagogie), alors que la préparation pratique des candidats se fait dans des séminaires institués, dans des écoles spéciales. Par conséquent, le temps que le candidat consacre à l'université est exclusivement réservé à la préparation scientifique de la future activité professionnelle.

5. Nous avons trouvé bon de nous relier à ce point de vue-là au système de Prusse, comme nous le montrerons d'une façon plus détaillée plus loin au chapitre IX, lorsque nous parlerons des séminaires dans les écoles supérieures. Ceci n'exclut pas le fait que nous considérons l'étude générale des questions pédagogiques fondamentales à l'université comme excellente, spécialement pour

les branches de mathématiques et de sciences naturelles, et cela d'autant plus que les séminaires dont nous avons parlé ne doivent pas encore avoir obtenu partout ce degré d'instruction scientifique complète que nous voudrions exiger d'eux. Chacun sait le rôle important que joue, à l'heure qu'il est, le rapport entre la pédagogie et la psychologie, nous préférerions cependant qu'on ne s'en occupe d'une façon plus détaillée que dans le cas éventuel d'études spéciales du candidat.

Nous estimons, cela va sans dire, que chaque candidat doit, dans l'intérêt de sa préparation générale à l'université, s'initier à ces études de philosophie et de pédagogie dont il vient d'être question et en tirer profit de diverses manières. Mais nous ne voudrions pas par cela restreindre par trop le champ de la culture générale. Le candidat en mathématiques et en sciences naturelles devra aborder en premier lieu le domaine philosophique-historique, mais aussi la participation à certains cours de médecine sera parfois très recommandable, comme par exemple l'hygiène, si importante pour ce qui touche à l'école. Du reste chacun peut suivre ses tendances individuelles, et ce n'est pas la place ici de spécifier davantage; nous ne tenons compte de la chose dans les schémas d'études qui vont suivre qu'en laissant intentionnellement du temps libre (dans la première moitié des études) pour les cours en question.

V. — Schéma pour les études générales des deux groupes.

A. Introduction.

1. Afin de nous convaincre que les exigences diverses et les conseils que nous présentons dans les chapitres précédents (II à IV) sont compatibles, et comment ils le sont, nous proposons, à titre d'essai, des plans d'études relatifs aux deux groupes, mathématiques-physique et chimie-biologie. Nous aimerions par cela donner une impulsion aux discussions sur la question générale de l'organisation des études pour ce qui concerne le domaine que nous traitons. Il s'agit ici de quelque chose de beaucoup plus difficile que la détermination convenable du domaine respectif de chaque branche d'étude, à savoir la délimitation qu'il est bon de donner à chaque branche particulière pour laisser une place suffisante à d'autres branches tout aussi importantes. Au fait, chaque spécialiste qui consultera pour la première fois les schémas qui suivent se plaindra du nombre restreint d'heures consacrées à l'étude de sa branche; puisse-t-il nous proposer une meilleure distribution du temps.

2. Ces schémas ne sont relatifs, nous le répétons encore, qu'aux études fondamentales que devraient entreprendre, selon notre façon de voir, tous les étudiants des deux groupes que nous avons en vue ; c'est-à-dire à ce que nous avons appelé dans le chapitre I, B : les études générales. Quant aux études spéciales qui en dépendent nous y reviendrons avec plus de détails aux chapitres VI et VII. Comme on l'a déjà dit, nous avons disposé de six semestres pour les études générales. Sans doute nous craignons que plus d'un étudiant ait besoin d'un temps plus considérable pour les terminer. Nous ne voulons pas dire par là qu'il faille toujours en chercher la cause dans un manque de zèle, mais bien aussi dans des circonstances extérieures d'ordres divers comme par exemple les changements d'université occasionnels (qui sont cependant quelque chose d'utile en soi).

3. Nous nous sommes particulièrement attachés dans nos plans d'étude à ne pas trop charger le temps des étudiants. Nous estimons qu'il est nécessaire que l'étudiant ne travaille pas seulement dans les salles de cours et les laboratoires, mais également pour soi à la maison et développe ainsi sa personnalité scientifique indépendante. Nous voulons également lui laisser la liberté de donner dès l'abord à ses études de l'extension dans telle ou telle direction d'après ses propres vues. Les schémas supposent pour les derniers semestres 3 ou 4 heures de travail à l'Université, en y comprenant les cours et les séminaires (il faut ajouter à cela les exercices pratiques qui demandent encore un plus grand nombre d'heures mais qui sont en général moins attachants). Les premiers semestres sont encore moins chargés comme on le voit dans les schémas, car nous avons laissé la quatrième colonne (études générales secondaires) libre pour les raisons que nous avons signalées.

4. En outre, nous attirons spécialement l'attention sur le fait que les études générales telles que nous les proposons, renferment dans chaque groupe trois branches du règlement des examens, au cas toutefois où la géologie, y compris la minéralogie, sont instituées comme branche spéciale du règlement, comme nous l'avons proposé plus haut (chapitre III, A). On a par conséquent la possibilité d'acquérir un certificat complet d'enseignement supérieur. C'est précisément pour cela, qu'en parlant dans le chapitre VI des études spéciales, nous pouvons faire abstraction de l'extension de ces études sur d'autres domaines et recommander simplement de les approfondir dans telle ou telle direction particulière.

B. Schéma pour les études générales en mathématiques et en physique.

Nous proposons le schéma suivant :

Semestre	Branches principales			Etudes générales ; branches secondaires
1	Calcul différentiel et intégral I	Géométrie analytique	Physique expérimentale I	
	Exercices pratiques et séminaires			
2	Calcul différentiel et intégral II	Géométrie descriptive (y compris la géométrie projective)	Physique expérimentale II	
	Exercices pratiques et séminaires			
3	Equations différentielles	Mécanique élémentaire y compris les méthodes graphiques et numériques	Introduction à la chimie	
	Exercices pratiques et séminaires			
4	Algèbre et théorie des nombres	Courbes et surfaces	Mécanique supérieure	Histoire de la philosophie et pédagogie
	Exercices pratiques et séminaires			
5	Théorie des fonctions	Mesures et calcul des probabilités	Physique théorique I	Logique
	Exercices pratiques et séminaires			
	Cours général	Astronomie et géophysique	Physique théorique II	Psychologie
	Exercices pratiques et séminaires			

Pour ce schéma nous renvoyons aux explications données dans le chapitre III ; nous faisons remarquer en outre que l'ordre à adopter pour les branches que nous avons placées dans la première et la seconde colonne, à partir du commencement du troisième semestre, est très arbitraire ; d'ailleurs aucune université n'est dans la possibilité de présenter les cours en question chaque année ; par conséquent, nous conseillons aux étudiants de les suivre quand l'occasion se présente.

Du reste nous appuyons sur le fait que ce schéma B ainsi que le suivant n'est qu'un exemple de la façon dont on peut organiser

ces études ; loin de nous la pensée d'établir en quelque manière que ce soit, des principes déterminés.

C. *Schéma pour les études générales en chimie-biologie.*

Nous nous sommes mis d'accord pour le plan d'études suivant :

Semestre	Branches principales			Etudes générales branches secondaires	Semestre
1	Chimie expérimentale I	Physique expérimentale I	Morphologie et systématique des plantes vasculaires avec excursions		été
	Exercices pratiques et séminaires				
2	Chimie expérimentale II	Physique expérimentale II	Anatomie et physiologie des plantes		hiver
	Exercices pratiques et séminaires				
3	Minéralogie	Géologie générale	Zoologie systématique avec excursions		été
	Exercices pratiques et séminaires				
4	Chimie physique	Etude des cryptogames avec excursions	Chapitres choisis de la biologie des animaux inférieurs	Histoire de la philosophie et pédagogie	hiver
	Exercices pratiques et séminaires				
5	Chimie technologique	Géologie historique avec excursions	Anatomie comparée et physiologie des animaux	Logique	été
	Exercices pratiques et séminaires				
6	Biologie générale : Géographie des animaux et des plantes	Paléontologie : Anthropologie y compris les époques préhistoriques	Anatomie et physiologie de l'homme	Psychologie	hiver
	Exercices pratiques et séminaires				

Nous nous sommes efforcés dans le schéma ci-dessus d'avoir le même nombre de cours sur les branches organiques et inorganiques. Du reste les mêmes observations sont à faire sur ce

schéma que sur le précédent ; nous renvoyons de nouveau aux explications du chapitre III.

VI. — Etudes finales.

A. Études spéciales, doctorat, places d'assistants.

1. Comme nous l'avons dit, la durée des études générales a été réduite à 6 semestres dans les schémas précédents, afin de permettre à l'étudiant qui désire consacrer à ses études 8 à 10 semestres, de compléter ses études dans telle ou telle direction. Il peut être question, par exemple, d'approfondir ses études dans un domaine spécial (études spéciales), travail qui se terminera dans certains cas par l'obtention du doctorat. D'autres natures douées différemment chercheront plutôt à étendre d'une façon appropriée (pas trop loin cependant) les branches inscrites dans nos schémas. Nous reviendrons là-dessus au chapitre VII ; il doit être question tout d'abord des études spéciales elles-mêmes.

2. La direction des études spéciales doit dépendre en premier lieu des goûts de l'étudiant et des circonstances extérieures. Comme règle générale il est à désirer que les divers champs d'activité soient développés simultanément d'une manière uniforme, depuis les mathématiques théoriques jusqu'aux sciences naturelles pures où l'observation joue le premier rôle. Le futur maître des écoles supérieures doit posséder autant que possible les connaissances scientifiques les plus diverses.

3. Pour ce qui concerne le doctorat, nous tenons spécialement à ce que le candidat produise un *travail scientifique personnel*. Par conséquent le talent et le temps sont les premières conditions nécessaires.

Il faut éviter cependant toute exagération. Lorsqu'un candidat est forcé de consacrer quatre semestres à parfaire sa thèse, c'est décidément trop ; avec du talent et du zèle, deux semestres devraient être la moyenne. D'un autre côté la thèse ne devrait pas être commencée trop tôt, mais seulement lorsqu'on possède une idée d'ensemble de l'importance et de l'étendue du sujet que l'on veut traiter.

4. L'indépendance scientifique plus considérable qui est obtenue par le doctorat peut être rendue sensiblement plus complète en entrant pour un certain temps comme assistant dans un institut scientifique. On ne devrait cependant pas y rester plus d'un ou deux ans, afin que le candidat ne soit pas détourné de sa vocation future. La place d'assistant devrait immédiatement suivre le temps des études afin que l'activité universitaire ne soit pas interrom-

pue entre temps. A ce propos nous recommandons un changement dans les règlements qui touchent à ce sujet (en Prusse). D'après ces règlements la place d'assistant n'est conférée que lorsque le candidat a achevé son année de séminaire et son année d'essai. Nous recommandons qu'une place puisse déjà être obtenue lorsque le candidat a passé ses examens d'enseignement et que l'année de séminaire et l'année d'essai soient renvoyées à plus tard.

VII. — Etudes finales (:

B. Extension du champ d'études par l'acquisition de branches accessoires.

1. La direction suivant laquelle cette extension des branches qui figurent dans nos schémas devra se faire, dépend encore dans une large mesure de circonstances individuelles, en particulier du talent du candidat; nous attirons cependant l'attention sur le choix de branches qu'il serait spécialement désirable d'entreprendre à cause de leur rapport intime avec les domaines scientifiques à réunir et en vue également des besoins de l'école.

2. Il y a d'abord la combinaison *physique-chimie.* Par son organisation la physique a été fortement influencée par l'astronomie théorique, tandis que la chimie repose bien plus sur des bases expérimentales directes. Il n'en est pas moins indubitable que la physique et la chimie n'apparaissent que comme les 2 faces d'un même objet, et cette manière de voir se confirme de plus en plus à mesure que l'on avance dans leur étude. Il est donc très désirable qu'il se présente des candidats qui complètent d'une façon approfondie leurs études de mathématiques et de physique par la chimie, ou au contraire leurs études de biologie et de chimie par la physique. On a besoin actuellement, spécialement dans les grands établissements, de candidats ayant une préparation de ce genre.

3. Nous recommandons ensuite, comme extension du champ d'études, a) *un enseignement de Philosophie* (philosophische Propädeutik) ; b) *la géographie.* Quelque différentes que puissent paraître ces deux branches, il est cependant reconnu que grâce à elles les mathématiques et les sciences naturelles sont envisagées à un point de vue plus vaste sous lequel elles apparaissent en rapport avec d'autres domaines scientifiques.

Nous espérons que par cette influence l'importance considérable et uniforme de nos deux branches ne sera pas amoindrie, mais qu'elle apparaîtra au contraire visiblement. Par conséquent, nous recommandons instamment qu'un nombre de candidats qui ne soit pas

trop restreint envisagent les deux branches en question et cela aussi bien pour les candidats du groupe mathématiques-physique que pour ceux du groupe chimie-biologie. Nous devons encore attirer spécialement l'attention des premiers sur l'importance des mathématiques appliquées pour les futurs géographes.

4. Les recommandations qui viennent d'être faites relativement aux études philosophiques et géographiques sont confirmées par la place que nous avons donnée à ces branches dans nos projets d'enseignement de Méran, en partant du point de vue scolaire. Nous le répétons, ni la philosophie, ni la géographie ne doivent être comptées comme telles parmi les branches des mathématiques et des sciences naturelles; elles relient plutôt certaines parties des mathématiques et des sciences naturelles aux résultats d'autres domaines scientifiques. Ce n'est du reste pas notre tâche de faire des propositions déterminées sur l'organisation de ces deux branches à l'école, de même que nous n'en parlons pas pour ce qui concerne l'université. Notre tâche doit se borner à signaler avec insistance, et en partant de notre point de vue, l'importance considérable de ces deux branches.

VIII. — Examens de professorat.

1. Nous placerons ici les désirs que nous formulons au sujet des modifications à apporter au règlement des examens, en vertu de ce qui précède.

a) *Mathématiques et physique.* Nous recommandons d'exiger pour l'examen des mathématiques appliquées des connaissances en astronomie (y compris la géophysique). Nous recommandons également en passant, pour plus d'uniformité (car les mathématiques appliquées doivent être considérées comme une branche d'examen au même titre que les mathématiques pures et la physique) que l'on puisse, le cas échéant, délivrer les deux degrés pour les mathématiques appliquées comme pour les autres branches.

b) *Chimie et biologie.* Nous proposons de séparer la minéralogie de la chimie et d'instituer à nouveau la géologie et la minéralogie comme branche spéciale. Nous proposons en outre d'abolir le règlement suivant lequel le premier degré peut déjà être obtenu pour la zoologie et la botanique (qui comptent pour une branche), alors que les connaissances correspondantes n'ont été acquises que pour l'un de ces deux domaines.

2. Ensuite, pour ce qui concerne l'*examen général* (Allgemeine Prüfung), nous nous joignons au vœu qui a été déjà souvent formulé d'exclure de cet examen les chapitres qui ne constituent qu'une répétition d'une certaine partie des examens de maturité

(Abiturientenexamen). On ne conçoit pas pourquoi l'on exige encore une fois ces domaines à cet examen, alors qu'il n'en est pas question dans les autres Facultés où l'on pourrait cependant tout aussi bien le faire. Par contre, nous pensons qu'il est très important de conserver un examen général en philosophie et pédagogie, et cela en vertu d'observations faites précédemment; les deux branches ont une importance spécifique pour la future vocation du candidat. Nous désirons cela va sans dire, que tout ce qui n'est que mémoire pure soit écarté des examens.

3. Nous demandons d'une manière générale que l'examen de professorat (Oberlehrerexamen) s'assure autant que possible du travail individuel de chaque candidat. Le résultat d'études spéciales éventuelles prendra une forme plus définitive par un mémoire ou par un travail écrit spécial dans le cas où une thèse de ce genre n'aurait pas été faite. Nous recommandons en outre que le candidat présente, en s'inscrivant pour l'examen, des pièces justificatives de sa participation aux exercices et séminaires, de même que des certificats concernant son temps de pratique et éventuellement des témoignages de ses examens semestriels (témoignages d'application et d'autres). Les examinateurs sont alors capables de se faire une idée beaucoup plus juste du genre de travail du candidat que s'ils ne possédaient pas ces pièces. La commission n'a pas pris de décision pour ce qui concerne l'institution d'un examen intermédiaire que l'on recommande, comme on le sait, en plusieurs endroits; elle craint que cela n'entraîne des conséquences qu'il est préférable d'éviter.

4. Dans notre manière de voir, les examinateurs devraient en principe être tous choisis parmi les professeurs de l'université et en plus grand nombre. Non seulement parce que seuls ils sont dans la possibilité de connaître la valeur scientifique du candidat par leurs rapports personnels avec lui, mais surtout parce que seuls ils ont sans cesse à l'esprit les conditions progressives et se transformant continuellement de l'activité universitaire. Non seulement un examen passé dans ces conditions serait plus juste que s'il se passait en présence d'examinateurs étrangers, mais il serait en même temps plus facile et plus agréable pour le candidat, par le fait que les spécialistes de l'université seront moins renfermés dans des formules spéciales que des examinateurs étrangers.

5. Sans doute, les examinateurs doivent éviter d'exiger des connaissances spéciales dans leur branche lorsqu'il s'agit d'un examen où il ne peut être question de spécialisation de la part du candidat. L'action simultanée de plusieurs examinateurs doit sévir contre cet état de chose. Nous espérons en tout cas que ces considérations, comme celles que nous formulons maintenant, pourront contribuer à faire disparaître les inconvénients que l'on trouve par-ci par-là.

IX. — Séminaires pédagogiques dans les écoles supérieures. Préparation scientifique ultérieure.

1. Nous attribuons la plus grande importance *aux séminaires pédagogiques* des écoles supérieures, en tant qu'ils complètent les études universitaires, tout en les déchargeant par une introduction immédiate dans la pratique de l'enseignement. Mais on se plaint d'un côté de ce que les candidats en mathématiques et sciences naturelles de plusieurs endroits, faute d'enseignement spécial, ne reçoivent pas une préparation suffisante dans leur domaine ; et d'un autre côté l'on se plaint de ce que très souvent, lorsqu'il manque des maîtres, on les charge tout de suite du nombre complet d'heures revenant à ces derniers, ce qui rend manifestement illusoire le but que doit remplir l'année de séminaire.

2. Nous réclamons aussi bien du séminaire une *introduction générale* des candidats dans leur vocation qu'une *introduction spéciale* dans l'activité des branches qu'ils ont en vue. Suivant des propositions qui nous ont été faites ainsi qu'à d'autres personnes, le candidat devrait recevoir sa préparation principale dans un certain séminaire, mais il devrait visiter ensuite plusieurs établissements de ce genre de différents types. D'autre part, des personnes autorisées nous ont fait remarquer que les candidats des séminaires devraient avoir à leur disposition une bibliothèque didactique dont on devrait doter les séminaires, bibliothèque qui servirait aussi bien pour leur préparation pédagogique générale que pour l'enseignement spécial de leurs branches. Nous ajoutons à cela, sans autres développements, les importantes propositions qui nous ont été faites pour ce qui touche la partie physique ; ces propositions auront également une importance indirecte pour les autres sciences naturelles comme pour les mathématiques.

3. Ces propositions sont les suivantes : Il semble désirable d'organiser un cours systématique d'exercices sur l'emploi d'appareils physiques et sur leur présentation au point de vue de l'enseignement. De même, le besoin d'un cours sur la préparation et surveillance d'exercices de physique d'élèves, se fera d'autant plus sentir à mesure que ces exercices s'introduiront dans les établissements supérieurs. Afin que ces cours puissent avoir les résultats voulus, il sera nécessaire de fournir les établissements en question de collections appropriées, car les collections ordinaires des écoles ne suffisent pas généralement pour ces besoins. Si, comme on le recommande de divers côtés, on fondait dans quelques endroits des musées scolaires, ces derniers rendraient d'utiles ser-

vices aux candidats. A ce propos, l'installation par le ministère de l'instruction en Prusse, de la « Alte Urania » à Berlin qui sert aussi spécialement à la préparation des candidats, est non seulement très estimable en soi, mais c'est aussi un premier pas fait dans cette direction. Il serait à désirer que de pareilles installations se fissent dans d'autres provinces, sans que pour cela des installations dans le même but dans d'autres établissements d'instruction soit considéré comme superflu.

4. Il y a une autre proposition plus vaste à faire au sujet du programme que nous voudrions voir accepter dans tous les séminaires; ce serait d'y introduire quelques considérations sur l'*hygiène scolaire* (où l'on traiterait, en dehors des questions générales touchant les soins à donner à la santé, de problèmes choisis de psychiatrie, de neurologie et de médecine interne ainsi que des conditions légales diverses). Naturellement, dans plus d'un endroit, personne ne pourra entreprendre cet enseignement d'une façon autorisée ; c'est pourquoi, la préparation du maître en hygiène devrait se faire pendant ce que nous nommerons sa préparation scientifique ultérieure (wissenschaftliche Fortbildung), dont nous avons encore à dire quelques mots.

5. Une condition indispensable pour cette préparation scientifique ultérieure, c'est d'avoir à sa disposition des *bibliothèques* appropriées, ce qui manque par trop (par le fait que la plupart des bibliothèques d'écoles sont très pauvrement fournies pour ce qui est des mathématiques et des sciences naturelles).

Nous attirons ensuite l'attention sur les *cours de vacances* en sciences naturelles, tels qu'on en donne depuis une quinzaine d'années dans un nombre toujours croissant d'universités. La commission recommande d'augmenter encore le nombre de ces cours qui peuvent être facilement suivis par les maîtres (cours obligatoires de vacances soutenus financièrement par les participants). On devrait cependant aborder dans ces cours des domaines plus variés. Nous avons déjà parlé de l'hygiène. D'un autre côté on a souvent manifesté le désir (ce qui est conforme aux projets de réformes présentés par la commission) de voir dans un plus grand nombre d'endroits les mathématiques incorporées dans ces cours. Nous verrions également avec plaisir s'ouvrir dans les écoles polytechniques des cours de vacances pour les maîtres de mathématiques et de sciences naturelles, comme on les recommande à l'heure qu'il est.

6. Les ressources précédentes ne suffisent pas à elles seules pour la préparation scientifique ultérieure. La commission recommande spécialement que l'on accorde d'une façon libérale aux maîtres capables des semestres de congé en vue de cette préparation. Cela se passe déjà pour ce qui concerne le domaine historique-philologique; c'est peut-être en vue des visites à faire aux musées

et bibliothèques ou à certains endroits remarquables au point de vue historique, ou bien l'étude des langues étrangères, ou encore et surtout, l'étude économique des pays étrangers. Mais on éprouve précisément les mêmes besoins du côté des mathématiques et des sciences naturelles. Par exemple que l'on s'efforce pour les géologues et les représentants des sciences naturelles, à apprendre à connaître, par leur observation personnelle, les formations caractéristiques, la flore et la faune, et spécialement aussi les jardins zoologiques et botaniques. Le physicien et le chimiste le mathématicien également sauront également tirer profit d'études personnelles analogues, et pour tous, en tout cas, l'étude des conditions d'enseignement des autres pays sera particulièrement stimulante.

7. Les branches philologiques-historiques devraient nous servir de modèle par le fait que pour elles, le contact entre les représentants des écoles supérieures et des universités n'a jamais été négligé aussi complètement qu'il l'est généralement chez nous. La commission acceptera avec plaisir tout règlement capable de donner une impulsion nouvelle aux efforts qui ont été faits durant ces dix dernières années en vue d'un tel rapprochement.

X. — Statistique.

1. La commission estime que ce n'est pas sa tâche de s'occuper des diverses questions concernant la situation du corps enseignant des établissements supérieurs. Néanmoins, déjà dans l'intérêt de ses projets de réformes, elle considérera comme bienvenu tout règlement capable d'assurer le bon fonctionnement de la carrière de maître supérieur. A ce propos, elle désirerait attirer l'attention sur un défaut particulier de l'activité universitaire touchant la préparation des candidats à l'enseignement. Ce sont les grandes variations de conditions auxquelles nos étudiants sont soumis. C'est-à-dire que parfois les candidats les plus capables sont dans l'obligation de rester pendant de longues années inactifs avant de trouver une place, et que d'autres fois on est obligé d'avoir recours pour des places importantes à des candidats ne possédant pas une préparation complète. Les causes de ces oscillations ne sont pas encore clairement connues ; dans tous les cas on aime à croire qu'il ne s'agit pas seulement de l'action mécanique de la loi de l'offre et de la demande, à laquelle est encore malheureusement toujours lié un retard dans les périodes successives. Quoi qu'il en soit, il n'en est pas moins vrai qu'une *statistique bien ordonnée*, qui serait publiée à intervalles rapprochés, rendrait ici, ainsi que pour d'autres questions, d'importants services.

2. Jusqu'à présent, une partie seulement de cette statistique a été faite d'une façon satisfaisante (grâce à des hommes d'état et par initiative privée), à savoir, le nombre des candidats ayant passé chaque année leurs examens, le nombre des candidats qui font leur année de séminaire et le nombre des places obtenues dans les écoles supérieures. Par contre, la *statistique de l'université*, c'est-à-dire celle qui donne le nombre des étudiants dont nous nous occupons, laisse encore fort à désirer ; les catalogues du personnel de nos universités ne semblent ni suffisamment détaillés ni suffisamment comparables, pour qu'on soit en état d'en tirer des conclusions certaines. D'autre part, il est très difficile d'estimer le nombre d'étudiants nécessaires pour les besoins de l'enseignement. Il ne s'agit pas seulement du fait qu'un nombre important de ces étudiants se destinent à d'autres carrières (techniques par exemple), mais aussi de l'augmentation continuelle des établissements d'instruction, qui ont besoin de maîtres ayant une préparation académique en mathématiques ou en sciences naturelles. Aux écoles supérieures dont le nombre va toujours croissant (et qui sont ordinairement les seules dont on tienne compte dans les statistiques) s'ajoutent les nombreuses écoles spéciales préparant pour des carrières diverses, puis les hautes écoles de divers genres, et actuellement les écoles supérieures nouvellement instituées, pour jeunes filles. Aux yeux de la commission, ce serait un réel progrès de pouvoir publier, à intervalles réguliers, des rapports généraux sur les différentes questions qui surgissent ici.

XI. — Ensemble des dispositions nouvelles que nous désirons voir adopter dans les universités.

Nous répétons ici les souhaits que nous avons formulés au sujet des dispositions à prendre dans l'enseignement des mathématiques et des sciences naturelles à l'université.

1. Pour les SCIENCES NATURELLES, il s'agissait moins de la création nouvelle d'instituts que d'une extension appropriée de leur installation, en rapport avec les transformations que nous avons recommandées dans l'enseignement. Mentionnons ces modifications d'une manière plus détaillée :

a) En *Physique*, nous avons souhaité une modernisation du cours d'introduction de physique expérimentale, un contact plus intime avec les applications techniques et avant tout une adaptation des exercices pratiques aux besoins des candidats.

b) En *Chimie* également, nous avons désiré que l'on donne au cours général une forme plus conforme au but poursuivi, mais nous avons recommandé spécialement de diriger les travaux dans

les laboratoires de façon à tenir compte de la future vocation du candidat et particulièrement du fait qu'il aura lui-même plus tard à diriger des exercices pratiques d'élèves.

c) Nous avons recommandé également en *géologie* et spécialement en *minéralogie*, que l'on tienne mieux compte dans les cours et dans les exercices pratiques, du but poursuivi, c'est-à-dire l'enseignement dans les écoles supérieures.

d) Dans les *branches biologiques*, nous avons désiré, tout d'abord en *botanique*, que l'on apporte tous ses soins à la préparation d'expériences sur la physiologie de la plante, d'autant plus que ces expériences pourront être utiles plus tard dans les exercices pratiques d'élèves.

e) Nous avons recommandé ensuite de cultiver le *dessin d'après nature* dans tous les exercices pratiques du domaine biologique.

f) Puis nous avons souhaité en *zoologie*, comme complément du cours sur la systématique du règne animal, des *excursions régulières*, comme on a coutume de le faire dans l'enseignement de la botanique; ces excursions ayant pour but d'observer les animaux du pays dans les lieux mêmes où ils se tiennent.

g) Nous avons recommandé plus loin pour l'étude de la *zoologie*, que l'on ne tienne pas seulement compte du point de vue anatomique, mais aussi du point de vue physiologique.

h) Que l'on institue un cours spécial sur l'anatomie et la physiologie de l'homme, conforme aux besoins des candidats.

i) De même un cours sur les différences physiques et ethnologiques du genre humain *(anthropologie)*, en y comprenant les époques préhistoriques, et finalement

k) Un cours final sur la *biologie générale* des êtres vivants.

2. Pour les MATHÉMATIQUES, par contre, nous avions à proposer une augmentation des ressources extérieures de l'enseignement.

a) Tout d'abord, pour ce qui concerne les *mathématiques appliquées*, l'installation dans *toutes* les universités (et pas seulement dans quelques-unes comme jusqu'à présent), de salles spéciales de dessin et de travail, et l'installation d'observatoires pour l'enseignement (qui pourraient servir également pour l'enseignement en géodésie), partout où l'on ne possède pas le matériel nécessaire à l'enseignement de l'astronomie.

b) Pour les *mathématiques pures* également, si cela n'a pas déjà été fait, l'installation de salles de lecture et de travail (salles de séminaires), en même temps qu'une augmentation des exercices pratiques.

Il est regrettable que, précisément dans les grandes universités, on ait fait si peu sous ce rapport, tandis que partout les instituts de sciences naturelles d'un côté, et les collections et séminaires historiques-philologiques de l'autre, peuvent servir de modèles à ce point de vue. Et cependant, les sommes que coûteraient ces

installations mathématiques sont bien peu considérables si on les compare à celles que nécessitent les installations analogues pour les autres branches. Sans doute, il faut tenir compte du changement dans l'activité intérieure de l'enseignement, et cette modification ne se fera pas sans amener des déformations diverses des charges de l'enseignement et une certaine transformation (intérieure) de la tradition. En tout cas, nous ne sommes pas les seuls à demander ces réformes, nous ne faisons que répéter ce qui s'est toujours dit pendant ces dernières années dans les congrès nationaux et internationaux de mathématiques.

XII. — Sur la préparation des candidats à l'enseignement des mathématiques et des sciences naturelles par les écoles techniques supérieures.

1. Nous aimerions dire encore quelques mots sur cette importante question actuellement si discutée, car une connaissance exacte de la situation en dehors des branches dont il est directement question, doit n'avoir été que peu répandue. Remarquons tout d'abord que dans toute cette question il ne s'agit que des candidats à l'enseignement des mathématiques, de physique et de chimie et pas de ceux à l'enseignement de biologie. Observons ensuite que certaines parties des mathématiques, de la physique et de la chimie sont traitées sans aucun doute d'une façon plus directe dans les écoles techniques supérieures qu'à l'université, comme naturellement la physique technique, la chimie technique, mais aussi tout ce qui compte comme mathématiques appliquées, au sens strict du mot, comme la géométrie descriptive, les appareils de mesures, la mécanique technique. En outre, il serait possible de faire entrer dans la préparation de nos candidats, les éléments généraux de culture technique dont l'importance croissante n'est pas à méconnaître. C'est seulement par ce moyen, semble-t-il, qu'on aura la possibilité de préparer systématiquement les maîtres de mathématiques, physique et chimie pour les écoles techniques spéciales toujours plus nombreuses et plus importantes.

2. Il est très curieux que cette question, dont nous venons de donner les caractères principaux, ait été résolue dans les différents états allemands de façons si diverses.

En Bavière et en Wurtemberg les universités et les écoles techniques sont depuis longtemps sur le même pied, et tiennent compte, d'une manière réciproque, des semestres passés dans l'un ou dans l'autre de ces établissements, et ce pied d'égalité se manifeste encore par le fait que dans les commissions d'examens les professeurs de toutes les universités et écoles polytechniques sont

également représentés. Il en est de même en Saxe, où il existe depuis plusieurs années dans l'école technique supérieure de Dresde une section spéciale pour les candidats à l'enseignement ; il y a cependant une différence à Dresde et à Leipzig par le fait que chacune a sa commission d'examens particulière.

La Prusse forme l'autre extrême. A l'origine les écoles techniques supérieures ne prenaient aucune part à la préparation des maîtres. Une modification fut apportée tout d'abord par la commission d'examen de 1898 (qui introduisit également pour la première fois les mathématiques appliquées comme branche spéciale d'examen). On spécifia que l'on tiendrait compte aux candidats en mathématiques, physique et chimie des semestres qu'ils auraient passés dans les écoles polytechniques, mais seulement jusqu'à trois, ce qui signifie, (si l'on tient compte de la période de trois ans officiellement prescrite,) que ces candidats doivent avoir passé trois semestres de leur temps d'étude à l'université. Ce nouveau règlement n'amena cependant aucune modification dans l'organisation des écoles techniques ; il faut remarquer du reste qu'il n'a été appliqué jusqu'à présent que dans une mesure très limitée. La chose est trop compliquée. Nous avons jugé bon de reproduire ici les développements qui nous ont été fournis sur ce sujet par une personne très compétente et qui, par le fait qu'ils touchent à plusieurs questions de détails, permettront de se rendre compte d'une façon générale des difficultés et des intérêts en jeu.

3. La dite personne, qui était autrefois professeur à l'université et qui professe actuellement dans une école technique supérieure de Prusse nous écrit à ce sujet :

« Sans aucun doute, les candidats trouveront tout ce qui leur est nécessaire pendant les quatre premiers semestres aux écoles polytechniques, pour ce qui concerne les mathématiques pures et la physique (pour la chimie également). Par contre, il en est autrement pour les mathématiques appliquées, parce que les candidats dans cette branche sont préparés en vue d'utiliser aussi bien que possible les directions concernant la préparation des ingénieurs. Par exemple, les exercices étendus en géométrie descriptive sont une charge trop considérable pour les candidats à l'enseignement ; mais c'est encore pire pour ce qui touche aux domaines techniques qui, s'adressant à des spécialistes, exigent un nombre d'heures qui empêcherait le candidat de consacrer le temps nécessaire à l'étude des autres branches requises. C'est comme si l'on voulait recommander aux étudiants en biologie de suivre les cours généraux et les exercices pratiques de la Faculté de médecine en vue de compléter leurs connaissances en anatomie, physiologie et hygiène.

« Un autre défaut apparaît encore dans les écoles polytechniques de Prusse, si on les compare à celles de l'Allemagne du sud et de

Dresde. Comme la commission le recommande (voyez chapitre IV) une certaine instruction en philosophie et en histoire forme la base au moyen de laquelle le collège des maîtres de nos écoles supérieures, aussi bien que le système de la préparation par domaines trouvent leur unité ; ce côté philosophique et historique n'est pas suffisamment développé dans les écoles polytechniques de Prusse. Pour qu'il en soit autrement, l'organisation d'un enseignement régulier par des professeurs d'état semble indispensable, et l'on ne doit pas s'en tenir à des cours occasionnels de privat-docents.

« En outre, dans les écoles polytechniques de Prusse, il n'est pas possible aux candidats à l'enseignement d'obtenir leur promotion à la fin des études. Le même défaut se retrouve dans les écoles polytechniques de Stuttgart et de Dresde ; Munich seulement fait exception ; dans cette ville, le droit de promotion existe pour tous et le titre habituel de D^r^ rer. techn. peut être obtenu déjà sur présentation d'une thèse mathématique. Comme en Prusse il faut avoir passé son examen de diplôme pour être admis à l'examen de **Dr-Ing**., il serait juste que l'examen de maître supérieur fût mis au même rang que celui du diplôme, et que tous les candidats des écoles polytechniques pussent se présenter pour l'obtention du titre de **Dr-Ing**., ce qui ne peut se faire maintenant. »

Les changements qu'il faudrait effectuer dans l'organisation des écoles polytechniques de Prusse pour qu'elles puissent se charger de la préparation *complète* des candidats à l'enseignement sont les suivants :

a) Dans les *mathématiques pures* (physique et chimie également) l'introduction de conférences pour les semestres supérieurs et pour les étudiants plus avancés, ainsi que de cours réguliers correspondant à ceux que la commission a indiqués dans le plan d'études.

b) Dans les *mathématiques appliquées*, l'introduction de dispositions spéciales permettant au candidat de terminer d'une façon appropriée les études qu'il se propose, et particulièrement de conférences encyclopédiques sur les grands domaines de la technique qui permettront aux candidats d'entrer en contact avec le cercle d'idées des techniciens.

c) La création de chaires de professeurs d'états pour les branches générales d'instruction, qui assurent une préparation suffisante en philosophie et en histoire.

d) La possibilité d'être promu au rang de **Dr-Ing**. de même que, cela va de soi, la participation des professeurs de l'université à l'examen des candidats.

Le professeur auquel nous nous sommes adressés ajoute encore :

« Les écoles techniques supérieures auraient l'avantage de pouvoir offrir les conférences et exercices nécessaires aux techniciens qui, exceptionnellement, désireraient acquérir en mathématiques et en physique une préparation plus approfondie, et il est certain que de tels techniciens se spécialisant ainsi dans la technique scientifique, ne sont pas à dédaigner et seront même fort recherchés.

Ensuite, les professeurs de mathématiques et de physique auront une sphère d'action plus étendue et une activité plus satisfaisante que maintenant car, pour le moment, ils doivent se contenter de cours pour commençants et ne peuvent par conséquent donner à leur science toute l'extension qu'ils désireraient ; en outre, il serait plus facile aux candidats de partager leur temps entre l'université et l'école polytechnique ce qui serait beaucoup à désirer, étant donné l'état actuel des choses.

« Mais les universités également retireraient un avantage de ces dispositions : la nécessité d'agir concurremment avec les écoles polytechniques, aurait comme effet la manifestation de forces restées jusqu'à présent à l'état latent et serait un puisssant stimulant ; dans les endroits où des procédés arriérés sont en vigueur on s'efforcerait de les améliorer afin de se placer à la hauteur. Par cela, nous ne pensons en aucune façon que les divisions ordinaires des écoles polytechniques ne doivent devenir qu'une simple copie des Facultés de mathématiques et de sciences naturelles, pas plus que ces Facultés ne doivent être transformées en sections universitaires techniques. Bien au contraire chacun de ces établissements doit développer librement selon ses propres forces : seulement, leur égalité devra être reconnue malgré la différence spécifique, dans le même ordre d'idée que l'égalité des écoles supérieures humanistes et réalistes qui a été reconnue à la conférence des écoles de 1900 et sanctionnée par l'ordre supérieur le 26 novembre de la même année. »

4. La commission d'enseignement hésite à adopter d'une façon formelle les développements qui précèdent, parce qu'on lui a fait à ce sujet de nombreuses questions qui ne sont certainement plus de sa compétence. Nous aimerions en tout cas obtenir pour la préparation des candidats à l'enseignement les dispositions mentionnées concernant les écoles polytechniques qui ne sont pas en Prusse. Mais nous recommandons pour la Prusse, en vue de préparer à cet égard le développement de l'enseignement, de faire tout d'abord une expérience. D'après ce que l'on nous a rapporté, il semble que parmi les écoles polytechniques de Prusse, celle de Dantzig conviendrait le mieux pour cela, à cause de la composition de son corps enseignant et des conditions dans lesquelles se trouve cet établissement. Que l'on institue, à titre d'essai, la préparation des maîtres que nous recommandons, et, lorsqu'après

quelques années le moment sera venu de remanier en Prusse le règlement des examens de professorat, on pourra le référer à des résultats effectifs basés sur l'expérience pour les décisions concernant cette question fondamentale.

Remarques finales.

Nous ne voudrions pas terminer ce rapport, sans adresser un appel pressant à ceux que cela concerne, afin qu'ils nous soutiennent dans nos efforts.

Tout d'abord aux autorités supérieures. Nous les prions d'examiner avec soin nos propositions, et nous espérons qu'ils les soutiendront ensuite, aussi bien par la concession des moyens requis, que surtout par une administration bienveillante et intelligente. A ce propos, nous voudrions encore une fois bien spécifier que, conformément au développement actuel de la science, et si l'on désire que la préparation des candidats à l'enseignement se fasse dans de bonnes conditions, il est nécessaire de séparer les études mathématiques des études biologiques ; c'est là la base de tous nos développements. Les schémas que nous avons donnés au chapitre V pour les études générales le montrent clairement. Car ils ne contiennent rien de ce que l'on pourrait appeler superflu en ce qui concerne l'enseignement dont le maître devra se charger plus tard. On nous a souvent dit, cependant, que l'enseignement biologique à l'école réclamait un nombre trop restreint d'heures pour qu'on puisse lui consacrer partout un maître spécial : il est donc nécessaire de familiariser éventuellement le mathématicien avec l'enseignement biologique et le biologue avec l'enseignement mathématique. Nous avons à répondre d'un côté qu'il en sera autrement sous ce rapport dès que nos projets de Méran seront plus en vigueur, mais, d'un autre côté que des propositions ont été faites, dans le chapitre VII, concernant l'extension des branches d'études de nos candidats qui devraient être capable dans tous les cas d'aplanir les difficultés en question. D'autre part, nous devons ajouter que, d'après les communications qui nous ont été faites, ce n'est pas généralement sous la pression de de force majeure que l'on a chargé des maîtres de préparation insuffisante de l'enseignement mathématique et biologique, mais bien plutôt par suite de considérations secondaires. Il faut aussi se rappeler que les circonstances d'autrefois étaient plus simples qu'elles ne le sont maintenant. C'est pourquoi nous désirons insister sur le fait que les mathématiques et la biologie présentent des caractères tout à fait hétérogènes, et que celui qui, par suite de son instruction, est qualifié pour l'un de ces domaines ne doit pas se croire nécessairement qualifié pour l'autre.

Nous adressons ensuite tout particulièrement notre appel aux professeurs académiques. Si les principes que nous recommandons sont adoptés, cela ne se fera pas sans certaines difficultés pour chaque professeur. Et nous faisons abstraction des préjudices d'ordre matériel qui sont à prévoir ça et là, et spécialement aussi des difficultés d'ordre personnel. Car il n'est agréable à aucun professeur de substituer une sphère d'action plus restreinte à l'influence prépondérante qu'il exerce sur ses étudiants dans l'enseignement approfondi de sa branche; ou, dans un autre cas, de porter préjudice à l'enseignement scientifique spécial en le transformant pour l'adapter aux besoins généraux. D'autre part, partout où des améliorations ont dû se produire, cela a toujours été le privilège des professeurs universitaires d'agir par leur propre initiative. Il faut cependant reconnaître que les intérêts généraux de la préparation scientifique de nos candidats à l'enseignement ont dû par trop céder la place à des intérêts d'un ordre plus spécial. Les professeurs intéressés de la même université — ou également les professeurs de la même branche dans les différents établissements — devraient se réunir et s'entendre, par des délibérations en commun, surles changements et conventions à adopter. Et si nos propositions pouvaient exercer à ce propos une réelle émulation, ce serait leur meilleur résultat.

Nous nous adressons enfin au cercle si vaste des maîtres dans l'enseignement secondaire supérieur. Si les ressortissants des autres branches académiques ne se lassent pas de recommander instamment, après entente, de nouvelles réformes concernant l'instruction préparatoire de la future génération, et surtout de la présenter publiquement, nous devons souhaiter que nos maîtres adoptent plus que par le passé les mêmes mesures. De cette manière, aucun préjudice ne sera porté au principe de la culture scientifique tel que nous le soutenons ici. Car, l'aptitude dans sa vocation basée sur une préparation scientifique solide a toujours été et doit rester le point d'honneur des maîtres de l'enseignement secondaire supérieur en Allemagne.

Table des matières.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE DEUX TRIANGLES, OU DE DEUX TÉTRAÈDRES

Les remarques qui vont suivre sont tellement simples et évidentes que j'avais quelque peine à les croire nouvelles ; il me semblait qu'elles avaient dû se présenter à l'esprit de beaucoup d'autres mathématiciens. Aussi, les ayant faites depuis longtemps, et en ayant gardé trace dans de vieilles notes, ne me serait-il pas venu à la pensée de les publier, sans le hasard d'une conversation avec un ami, beaucoup mieux informé que moi sur la Géométrie du triangle.

Il m'affirma que ces propriétés n'étaient pas connues de lui et qu'il les croyait réellement nouvelles. S'il n'en est pas ainsi, je m'en excuse à l'avance, et la chose est après tout fort possible ; car la bibliographie de ce chapitre de la science est devenue fort abondante, et personne ne peut guère se tenir au courant de tout ce qui s'imprime dans le monde.

1. — Considérons dans un plan deux triangles ABC, $A'B'C'$, et deux points M, M', qui, rapportés respectivement à chacun d'eux, aient les mêmes coordonnées barycentriques α, β, γ.

Prenant une origine arbitraire O, menons par ce point les vecteurs OA_1, OB_1, OC_1, OM_1, équipollents et AA', BB', CC', MM', chacun à chacun. Le point M_1, par rapport au triangle $A_1B_1C_1$ aura encore les mêmes coordonnées barycentriques α, β, γ.

En effet, en supposant qu'on ait $\alpha + \beta + \gamma = 1$, ce que nous pouvons toujours faire puisqu'il s'agit de coordonnées homogènes, nous avons les deux équipollences

$$OM = \alpha OA + \beta OB + \gamma OC \;, \qquad OM' = \alpha OA' + \beta OB' + \gamma OC' \;,$$

d'où par différence,

$$MM' = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' \;,$$

c'est-à-dire,

$$OM_1 = \alpha OA_1 + \beta OB_1 + \gamma OC_1 .$$

Une propriété de ces figures consiste en ce que, si l'on divise dans un même rapport les segments AA', BB', CC', MM', en A_2, B_2, C_2, M_2, le point M_2, aura encore α, β, γ pour coordonnées barycentriques, par rapport au triangle $A_2 B_2 C_2$. Cela se voit immédiatement en écrivant les vecteurs $OA_2, \ldots$ sous la forme

$$pOA + qOA', \ldots (p + q = 1) .$$

2. — Etant donnés seulement les deux triangles ABC, A'B'C', on peut se proposer de déterminer α, β, γ de telle sorte que les deux points M, M' coïncident en P, et de construire ce point P, que je propose d'appeler *pôle barycentrique* du système des deux triangles.

Dans ce but, reprenons la figure $OA_1 B_1 C_1$ considérée ci-dessus, et appelons $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ les coordonnées barycentriques de O par rapport au triangle $A_1 B_1 C_1$. On aura

$$\alpha_0 OA_1 + \beta_0 OB_1 + \gamma_0 OC = 0 \ , \quad \text{ou } \alpha_0 AA' + \beta_0 BB' + \gamma_0 CC' = 0 \ .$$

et il en résulte que les points M, M' considérés ci-dessus, et qui ont pour coordonnées particulières $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, coïncident entre eux; leur position commune détermine donc le point P cherché, et $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ sont les coordonnées de ce point par rapport aux deux triangles.

La construction du point P est dès lors toute naturelle ; les droites OA_1, OB_1, OC_1, coupant respectivement les côtés $B_1 C_1, C_1 A_1, A_1, B_1$, en D_1, E_1, F_1, si l'on divise BC en D, de telle $OA_1 D_1$, AD, et déterminer P sur cette dernière de telle sorte sorte que $\frac{BD}{DC} = \frac{B_1 D_1}{D_1 C_1}$, et si de même $\frac{CE}{EA} = \frac{C_1 E_1}{E_1 A_1}$, le point P sera l'intersection des droites AD et BE.

On peut même se contenter du tracé des deux droites que $\frac{PA}{AD} = \frac{OA_1}{A_1 D_1}$ · L'indétermination du point O pourrait aussi permettre une légère simplification.

Il est clair qu'on pourrait se servir du triangle A'B'C' au lieu de ABC.

Tout ceci nous donne en somme la résolution géométrique de l'équipollence $\alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' = 0$, où les rapports mutuels de α, β, γ sont les inconnues.

Cette construction s'applique aux cas singuliers où les triangles donnés dégénèrent, et se réduisent à des points, ou à des systèmes de trois points en ligne droite; le lecteur n'aura pas de peine à le reconnaître. Nous voulons seulement appeler ici l'attention sur quelques circonstances spécialement intéressantes.

Si le triangle $A_1B_1C_1$ se réduit à trois points en ligne droite, cette droite ne passant pas par le point O, il est évident qu'aucun système de coordonnées barycentriques ne permet de rapporter O à $A_1B_1C_1$; le pôle barycentrique disparaît donc dans ce cas.

Si AA', BB', CC' sont équipollentes, le triangle $A_1B_1C_1$ se réduit à un point; et le pôle barycentrique est rejeté à l'infini dans la direction AA'.

Si AA', BB', CC' sont parallèles, mais non équipollentes, les points A_1, B_1, C_1 sont sur une droite passant par O; les coordonnées α, β, γ ne sont pas déterminées entièrement; il y a une infinité de pôles barycentriques, situés sur une droite qui n'est autre que l'axe d'homologie des triangles ABC, A'B'C', dont le centre d'homologie est à l'infini.

Si les deux triangles donnés ABC, A'B'C' sont semblables, leur pôle barycentrique sera leur centre de similitude, directe ou inverse.

Remarquons que pour le triangle $A_2B_2C_2$ dont nous avons parlé au n° 1, un point rapporté à ce triangle et ayant pour coordonnées $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ ne sera autre que P. Donc le pôle barycentrique de deux triangles ABC, A'B'C' est commun à tous les triangles dont les sommets divisent AA', BB', CC' proportionnellement.

3. — Nous allons retrouver le point P par une méthode qui va nous conduire à une construction encore plus simple. Imaginons (en supposant toujours qu'on ait $\alpha + \beta + \gamma = 1$) que, par rapport au triangle ABC, nous considérions tous

les points qui ont une valeur donnée α pour coordonnée barycentrique correspondant à A. Ils sont tous situés sur une parallèle à BC, qui divise la hauteur issue de A dans le rapport $\frac{\alpha}{1-\alpha}$. On peut en dire autant pour le triangle A′B′C′, et le point de concours des deux parallèles à BC, B′C′ est tel que ses distances à ces deux droites sont dans le même rapport que les deux hauteurs correspondantes, issues de A et de A′. Le lieu des points ayant même coordonnée α, par rapport aux deux triangles ABC, A′B′C′, est donc une droite passant par l'intersection de BC, B′C′. Si l'on reprend la même observation, appliquée aux coordonnées β et γ, on a trois droites qui viennent concourir au point P.

Pour la construction effective, il suffit évidemment de déterminer deux de ces droites.

Les considérations qui précèdent amènent en particulier à cette proposition.

Deux triangles ABC, A′B′C′ *étant donnés sur un plan, soient* a *le point de rencontre de* BC *et* B′C′, a_1 *celui des parallèles à* BC *et* B′C′ *menées respectivement par* A *et* A′; *soient* b, b_1 *et* c, c_1 *les points analogues relatifs aux deux autres couples de côtés. Les droites* aa_1, bb_1, cc_1, *concourent en un même point* P.

Ce point P est le pôle barycentrique des deux triangles.

4. — Le cas des deux triangles directement semblables ABC, A′B′C′ offre quelques particularités intéressantes. Ainsi que nous l'avons fait remarquer plus haut, le pôle barycentrique est alors le centre de similitude directe. Il a dès lors mêmes coordonnées homogènes, non seulement barycentriques, mais quelconques, par rapport aux deux triangles.

P désignant ce centre de similitude, nous avons

$$PA' = \lambda PA\ ,\quad PB' = \lambda PB\ ,\quad PC' = \lambda PC\ ,$$

λ représentant un rapport complexe, de deux vecteurs.

Si maintenant A_2, B_2, C_2, comme plus haut, sont les points qui partagent les segments AA′, BB′, CC′ dans un même rapport $\frac{q}{p}$ $(p+q=1)$, nous avons

$$PA_2 = pPA + qPA'\ ,\quad PB_2 = pPB + qPB'\ ,\quad PC_2 = pPB + qPC'\ ,$$

ou

$$PA_2 = (p + \lambda q) PA, \ldots$$

et, de là

$$A_2B_2 = (p + \lambda q) AB, \quad A_2C_2 = (p + \lambda q) AC$$

$$\frac{A_2B_2}{A_2C_2} = \frac{AB}{AC}.$$

Les deux triangles ABC, $A_2B_2C_2$ sont donc directement semblables, et par conséquent nous avons la propriété suivante, qui n'est pas nouvelle, mais qui mériterait peut-être plus d'attention qu'on ne lui en accorde d'habitude :

ABC, A'B'C' *étant deux triangles directement semblables, si l'on divise les segments* AA', BB', CC' *en parties proportionnelles en* A_2, B_2, C_2, *le triangle* $A_2B_2C_2$ *est directement semblable à chacun des triangles donnés.*

5. — Il est facile de voir que les considérations développées précédemment s'appliquent à deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D' donnés dans l'espace ; c'est-à-dire qu'il existe un certain point P qui, rapporté aux deux tétraèdres aura mêmes coordonnées barycentriques. Nous pouvons appliquer à la détermination de ce point la construction du n° 3. Les plans ABC, A'B'C' se coupent alors suivant une certaine droite ; les plans parallèles menés par D, D' respectivement, ont une intersection parallèle, et ces deux intersections déterminent un plan (d) ; en appelant (a), (b), (c) les trois plans analogues relatifs aux trois autres couples de faces, les quatre plans (a), (b), (c), (d) auront pour intersection commune le pôle barycentrique P des deux tétraèdres.

Le cas particulier de similitude nous montre que, dans l'espace aussi bien que dans le plan, il existe un centre de similitude pour deux figures semblables, soit directement, soit symétriquement. Et ce point est aisé à construire, puisqu'il n'est autre que le pôle barycentrique de deux tétraèdres correspondants, attachés aux deux figures semblables considérées.

6. — Il est possible de donner à quelques-uns des résultats précédents une forme mécanique qui se comprend d'elle-même d'après les développements donnés ci-dessus.

Si trois points, dans un plan, ou quatre points, dans l'espace, sont animés de mouvements rectilignes et uniformes, on peut attribuer à ces points des masses telles que leur centre de gravité reste invariable.

Il faut entendre ici par le mot « masse » des coefficients positifs ou négatifs. Pour que les masses soient toutes positives, il faut et il suffit que l'une quelconque des vitesses soit dirigée dans l'angle (ou plan, ou trièdre) opposé à celui que forment les autres vitesses. C. A. Laisant.

THÉORIE DES MIROIRS PLANS PARALLÈLES A UNE MÊME DROITE

1. Supposons n miroirs plans tous parallèles à une même droite l et désignons par $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ les lignes d'intersection des faces réfléchissantes avec un plan quelconque perpendiculaire à l.

Considérons dans ce plan les rayons issus d'un point fixe R. Soit r un des rayons initiaux et $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ les rayons réfléchis successivement par $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ (Fig. 1).

Dans sa Géométrie projective[1], Cremona examine la construction d'un rayon r passant par R et faisant avec r_n un angle donné à l'avance. On sait que cette construction se déduit d'un problème célèbre de Poncelet[2] consistant à inscrire un polygone dans un autre polygone et dont les côtés passent par des points arbitrairement donnés. En général cette construction possède deux solutions. Mais, pour le problème de Cremona qui est un cas particulier du problème de Poncelet, ce résultat doit être modifié ; c'est ce que nous voulons démontrer. Nous en déduirons les propriétés des miroirs angulaires dont on se sert en géodésie.

Pour plus de généralité supposons que la réflexion d'un

---

[1] *Elements of projective geometry*, p. 199. (édition anglaise).
[2] *Traités des propriétés projectives des Figures.*

rayon puisse avoir lieu sur toute l'étendue d'une face réfléchissante et qu'un rayon réfléchi r_i qui ne frappe pas la face consécutive m_{i+1} doive être prolongée en arrière jusqu'au point d'intersection avec cette surface, d'où il est réfléchi de nouveau. Il est évident que ce postulat renferme les faits physiques comme cas particuliers.

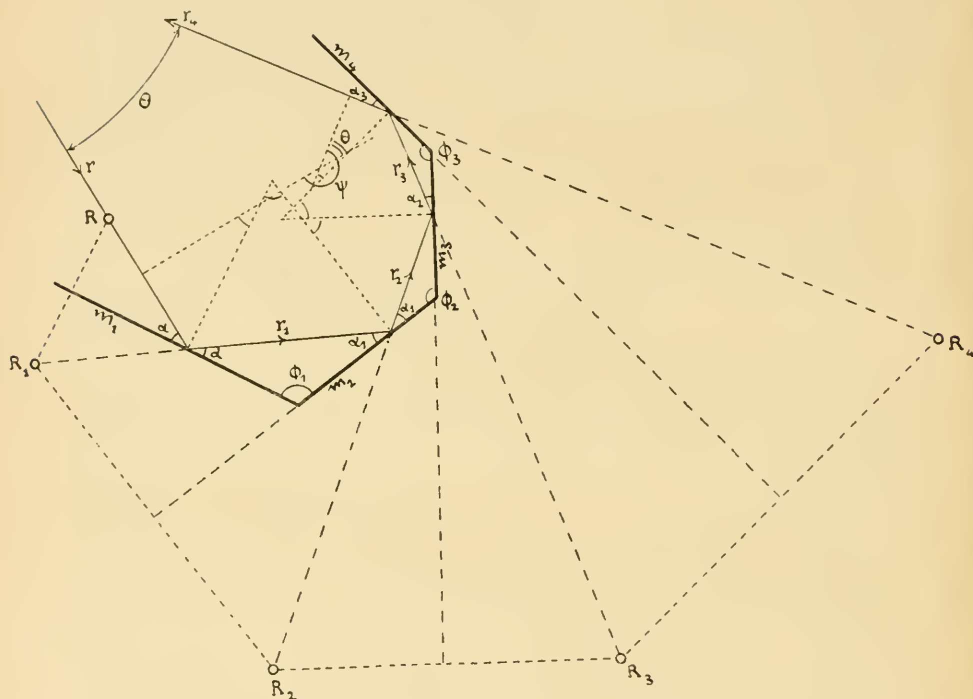


Fig. 1.

2. Cela posé, tous les rayons réfléchis r_1 passent par un point fixe R_1 qui est le symétrique de R par rapport à m_1 ; tous les rayons r_2 passent par R_2 qui est le symétrique de R_1 par rapport à m_2, etc.

Finalement tous les rayons r_n réfléchis par la face m_n passent par R_n qui est le symétrique de R_{n-1} par rapport à m_n.

Les rayons (r) et les rayons (r_n) forment deux faisceaux projectifs et ils engendrent une conique C qui passe par les points R et R_n.

Dans le problème de Cremona il faut construire un rayon r formant avec r_n un angle donné θ. Pour trouver ce rayon on fait passer un cercle K par R et R_n de telle manière que les angles inscrits soutenus par la corde RR_n soient tous égaux à θ sur un côté, et à $\pi - \theta$ sur l'autre. Les faisceaux formés par les rayons (r) et (r_n) coupent le cercle K en deux ponctuelles projectives dont les points doubles, s'ils existent, déterminent les deux solutions du problème. On voit aisément que les faisceaux successivement formés par les rayons (r) (r_1) (r_2), ..., (r_n) sont congruents et, alternativement, de sens contraires. Par conséquent. si le nombre n des miroirs est pair, les faisceaux (r) et (r_n) sont de même sens et donnent un cercle C passant par R et R_n.

Dans ce cas le problème de Cremona n'a pas de solutions. Mais si on dispose des α de telle manière que le cercle C *coïncide avec* K, *on a une infinité de solutions; tout rayon* r *passant par* R *satisfait aux conditions du problème.*

Si n *est un nombre impair les faisceaux* (r) *et* (r_n) *sont de sens contraires et engendrent une hyperpole. Dans ce cas il y a deux solutions.*

3. Nous voulons maintenant établir la relation entre l'angle d'incidence α sur m_1 du rayon r, les angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$ formés par m_1 et m_2, m_2 et m_3, ..., m_{n-1} et m_n et l'angle θ formé par r et r_n.

La figure donne les relations suivantes:

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} + \varphi_{i+1} = \pi ,$$

$$\alpha_{i+1} = \pi - \alpha_i - \varphi_{i+1} ;$$

d'où

$$\alpha_1 = \pi - \alpha - \varphi_1 ,$$

$$\alpha_2 = \alpha + \varphi_1 - \varphi_2 ,$$

$$\alpha_3 = \pi - \alpha - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 .$$

. . . .

$$\alpha_{2k-1} = \pi - \alpha - (\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \cdots + \varphi_{2k-1}) .$$

$$\alpha_{2k} = \alpha + (\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \cdots - \varphi_{2k}) .$$

L'angle formé par les deux perpendiculaires sur r et r_n est égal à

$$\psi = \alpha + (\pi - \varphi_1) + (\pi - \varphi_2) + \dots + (\pi - \varphi_{n-1}) + \alpha_{n-1} ,$$

ou

$$\psi = \alpha + \alpha_{n-1} + (n-1)\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_{n-1}) ,$$

et

$$\theta = \pi - (2\pi - \psi) = \psi - \pi .$$

ou

$$\theta = \alpha + \alpha_{n-1} + (n-2)\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_{n-1}) .$$

4. Pour n pair et égal à $2k$ on a

$$\theta = \alpha + \pi - \alpha - (\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \dots + \varphi_{2k-1}) + (n-2)\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_{2k-1}) ,$$

d'où

$$\theta = (n-1)\pi - 2(\varphi_1 + \varphi_3 + \dots + \varphi_{2k-1}) .$$

On voit que θ est indépendant de α, et est constant; ce qui montre bien que le point d'intersection de r *et* r_n *décrit un cercle. D'ailleurs on peut faire varier les angles $\varphi_2, \varphi_4, \dots$, d'une manière arbitraire, sans changer θ.*

On peut aussi faire varier les $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5, \dots$ individuellement si leur somme reste constante. Prenons par exemple $n = 4$, et $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors

$$\frac{\pi}{2} = 3\pi - 2(\varphi_1 + \varphi_3) ,$$

d'où

$$\varphi_1 + \varphi_3 = \frac{1}{2}\left(3\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{4} .$$

Pour satisfaire cette condition on peut poser $\varphi_1 = \varphi_3 = \frac{5\pi}{8}$, c'est-à-dire, faire les angles entre les deux premiers et les deux derniers miroirs tous les deux égaux à 112° 30'. L'angle entre a_2 et a_3 est arbitraire. Cela ressort de la fig. 2.

Pour $n = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. De la formule on tire

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\varphi_1 , \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4} .$$

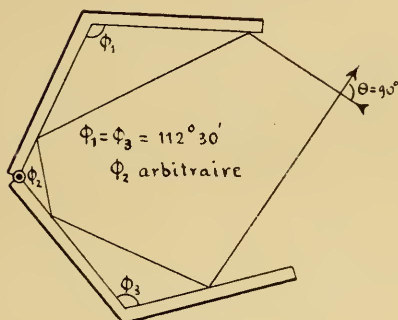


Fig. 2.

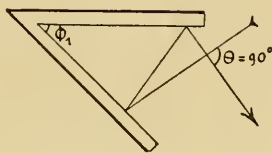


Fig. 3.

C'est le cas, bien connu dans l'arpentage, de l'équerre optique (fig. 3).

5. Pour n impair et égal à $2k + 1$, on a

$$\theta = \alpha + \alpha_{2k} + (2k - 1)\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_{2k}) ,$$

ou

$$\theta = 2\alpha - 2(\varphi_2 + \varphi_4 + \cdots + \varphi_{n-1}) + (n - 2)\pi .$$

L'angle θ dépend de α et ne change pas si on fait varier les angles φ_1, φ_3, ... arbitrairement. On peut aussi modifier les angles φ_2, φ_4, ... mais en faisant leur somme constante.

Arn. Emch (Soleure, Suisse).

SUR LA NATURE DES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

(2me article).

Au sujet de mon précédent article sur les axiomes de la géométrie, M. Peano m'a fait l'honneur de m'écrire. L'opinion que je lui prête n'est pas, dit-il, la sienne.

A vrai dire je n'ai pas attribué à M. Peano l'opinion n° 1. Lorsqu'on discute l'indépendance des axiomes, il faut bien les rejeter chacun leur tour, et voir ce que devient dans ces cas la géométrie; faire, comme si ces axiomes étaient arbitraires, faire comme si l'on était de l'opinion n° 1. Voilà à peu près ce que j'ai voulu dire.

La conclusion de mon article manque peut-être un peu de netteté. Depuis que je l'ai écrit, j'ai de nouveau réfléchi sur ce sujet. Voici comment je formulerai actuellement mon opinion.

Il y a deux manières de voir, un peu différentes, mais non contradictoires entre elles.

1re MANIÈRE DE VOIR. La notion d'identité de deux objets, la notion d'un objet qui ne change pas avec le temps est nécessaire à toute science. Le changement lui-même ne peut être conçu que par comparaison à quelque chose d'invariable. Et comme d'autre part rien n'est fixe dans l'univers, il faut bien admettre qu'une figure puisse rester invariable tout en changeant de place par rapport à d'autres. Le concept de figure invariable s'offre ainsi à nous comme une sorte de nécessité; sans lui la science serait impossible.

Mais ce concept est vague; les axiomes ont pour but de le préciser. Admettons les axiomes de la géométrie métrique relatifs aux droites, au plan, à la distance. Les droites, les plans, les distances physiques ne sont définies que par à peu près; elles ne satisfont aussi aux axiomes que par à peu près. On n'a du reste jamais cherché une vérification expérimentale rigoureuse. Elle serait inutile, comme on va voir.

Je nomme *plan*, *droites*, *distances* parfaites, des objets satisfaisant rigoureusement aux axiomes, et ne différant que d'une façon inappréciable des *plans droites distances* physiques.

La première partie de ma phrase constituerait l'opinion n° 3 de mon dernier article. Cette opinion est insoutenable je l'ai montré. La seconde partie de la phrase modifie l'opinion n° 3, et comme on va voir, la rend acceptable.

Reprenons en effet l'objection faite à l'opinion n° 3 soient $\alpha\beta\gamma$ trois quantités définissant un point, et appelées coordonnées provisoires du point.

On nomme X Y Z trois fonctions de $\alpha\beta\gamma$, ne prenant pas toutes trois la même valeur en 2 points différents. Ce seront les coordonnées définitives du point.

Enfin nous nommons *plan* l'ensemble des points dont les coordonnées X Y Z vérifient une équation de 1er degré, *droite* l'ensemble des points communs à deux plans, et distance de deux points X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1, la fonction

$$\sqrt{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2 + (Z_1 - Z_0)^2}$$

avec ce sens donné aux mots, toute la géométrie euclidienne est vraie. Mais cela, avons nous dit, ne permet nullement de définir le *plan*, *la droite*, *la distance*, car nos trois fonctions X Y Z sont arbitraires.

Mais nous assujetissons maintenant nos trois fonctions à être telles que les *plans*, *droites*, *distances* ainsi définies ne diffèrent pas sensiblement des *plans droites distances* physiques. Ce choix est possible, nous l'admettons. Il reste encore indéterminé. En effet soient X Y Z 3 fonctions satisfaisant à cette condition, ε une quantité inférieure à toute quantité appréciable par des moyens physiques, ΔX, ΔY, ΔZ trois fonctions arbitraires, mais toujours inférieures en valeur absolue à ε. Les 3 fonctions suivantes,

$$X + \Delta X\ ,\ Y + \Delta Y\ ,\ Z + \Delta Z$$

rempliront aussi bien que X Y Z les conditions demandées.

Mais que l'on prenne pour définir la droite, le plan, la dis-

tance, le premier ou le 2° système de fonctions, cela n'a aucun inconvénient.

Dans la pratique il n'y a aucune différence entre les deux manières de voir, puisque ΔX, ΔY, ΔZ sont inappréciables. En théorie la chose est indifférente, le raisonnement ne s'appuyant pas sur ce qu'on nomme effectivement droite, plan, distance, mais sur les propriétés de ces objets. Ces propriétés sont les mêmes dans l'un et l'autre cas.

2me MANIÈRE DE VOIR. Appelons point, droite, distance, etc., un système d'objets satisfaisant aux axiomes, sans nous préoccuper des autres systèmes d'objets pouvant aussi y satisfaire. Nous établissons ainsi la géométrie. Après la géométrie nous pouvons passer à la mécanique. Nous introduisons d'autres objets il nous faudra d'autres axiomes. Après la mécanique rien ne nous empêchera de passer au moyen d'autres axiomes aux sciences physiques, à l'optique par exemple. Nous aurons ainsi une science purement abstraite très étendue. Alors, si nous avons bien choisi nos axiomes, cette science sera conforme à la réalité. *La science est un édifice logique en correspondance avec la réalité sensible.*

Les axiomes de la géométrie ne sont pas à eux seuls des définitions; on ne peut pas passer au concret sans faire intervenir une notion physique étrangère à la science pure. On ne peut sans instruments vérifier que deux distances sont égales. Le fait que le compas est un solide invariable est un fait étranger à la géométrie, et cette invariabilité ne saurait être démontrée géométriquement.

Les choses sont différentes, si l'on a fait aussi de la physique une science rationnelle. Dans le vide la lumière se propage en ligne droite. Cela se démontre comme on sait à l'aide du principe d'Huygens. La surface de l'onde est une sphère, on l'admet. Il n'y a pas de raison pour que la lumière aille plus vite dans une direction que dans une autre. C'est le principe de la raison suffisante. Mais ce raisonnement nous fournit une droite concrète, le rayon lumineux. En mécanique le principe de l'inertie nous fournit aussi une droite concrète, mais nous ne l'utilisons pas, les difficultés du mouvement

relatif en sont la cause. La statique des fils nous en fournit une autre, le fil tendu.

On voit par là une différence capitale entre les axiomes de la géométrie et ceux des sciences physiques. Les premiers nous donnent une science cohérente en elle-même, mais restant en dehors du domaine réel. Les seconds au contraire nous font pénétrer dans ce domaine. Peut-être trouvera-t-on un jour en étudiant l'optique, quelque contradiction à supposer faux le postulatum d'Euclide. M. Andrade, du reste a déjà trouvé dans la statique non-euclidienne des fils une manière de contradiction.

M. Peano, je l'ai dit plus haut, déclare que l'opinion n° 1, d'après laquelle les axiomes sont arbitraires, n'est pas la sienne.

Effectivement dans un mémoire fort intéressant sur les fondements de lagéométrie, (Rivista di Mathematica, Tome IV) il dit expressément :

« Certes il est permis à chacun d'admettre telles hypothèses « qu'il veut, et de développer les conséquences logiques « contenues dans ces hypothèses. Mais pour que ce travail « mérite le nom de géométrie, il faut que ces hypothèses ou « postulats expriment le résultat des observations les plus « simples et élémentaires des figures physiques.....

« En conséquence, au point de vue pratique, il ne me « paraît pas licite de prendre comme postulat de la géomé- « trie projective le suivant :

« *Deux droites situées dans un même plan ont toujours un* « *point commun.* Car cette proposition ne se vérifie pas par « l'observation, et même est en contradiction avec les théo- « rèmes d'Euclide. »

On peut bien, ajoute M. Peano, introduire de nouveaux êtres, *(points idéaux,)* mais par des définitions convenables, et en démontrant que les axiomes sont vrais pour de tels êtres.

A propos de ces points fictifs ou idéaux, je veux faire une remarque concernant le postulatum d'Euclide.

Lorsque la ligne droite est supposée définie, mais pas la distance, le postulatum n'est ni vrai ni faux; supposons la distance définie de telle façon qu'il soit faux. Pour le rendre vrai, *par une nouvelle définition de la distance* il faudra ajouter à l'espace des points fictifs. (On suppose que la définition de la ligne droite ne soit pas changée.)

Je supposerai, pour simplifier les choses, le postulatum faux mais la constante de la géométrie non-euclidienne extrêmement grande, afin que, DANS UN ESPACE RESTREINT la géométrie diffère extrêmement peu de la géométrie euclidienne.

D'après les travaux de Klein et Cayley, il existera une transformation faisant correspondre à tout point M de l'espace un point M′ intérieur à une certaine sphère S. A une droite correspond une droite. A deux points P et Q correspondent deux points P′ et Q′ et si P′Q′ coupe la sphère en A et B, le distance PQ sera égale à k fois le logarithme du rapport anharmonique des 4 points P′Q′ AB. Nous nommons cette expression la pseudodistance de P′Q′, k dépend du choix de l'unité de longueur.

Ainsi la distance PQ est la pseudodistance P′Q′.

Donnons maintenant un nouveau sens au mot distance, appelons *distance nouvelle PQ la distance P′Q′.*

Ainsi, la distance nouvelle PQ est la distance P′Q′.

Comme P′ et Q′ sont intérieurs à S, P′Q′ n'est pas très grand, et la géométrie à l'intérieur de S est sensiblement Euclidienne.

Avec la nouvelle définition de la distance, la géométrie sera donc euclidienne pour tout l'espace.

Mais la distance nouvelle restera finie, et inférieure à un diamètre de la sphère S. Pour la rendre infinie, il faudra introduire des points fictifs, dont les correspondants seraient extérieurs à la sphère S.

(A la vérité la géométrie n'est que sensiblement euclidienne, il serait facile de lever cette difficultè. Cela entraînerait des longueurs. Du reste on peut prendre la sphère S extrèmement petite).

J'ai donc démontré la proposition énoncée.

On peut faire l'inverse. La distance étant d'abord Eucli-

dienne faire une distance nouvelle non-euclidienne. C'est même bien plus facile, mais alors il faut exclure de l'espace des points en faisant d'abord partie. (Je suppose toujours conservé le sens du mot *droite*).

Un changement de sens du mot distance entraîne un changement de sens du mot angle. La droite étant définie, la géométrie est euclidienne ou non selon le sens du mot *angle*. Appelons droite orientée une droite sur laquelle a été choisi un sens positif. Bornons-nous à la géométrie plane soit D une droite orientée, Δ une autre droite orientée dans le même plan. On pourra supposer que la définition de l'angle satisfait à l'axiome suivant : Si deux droites orientées font le même angle avec D, elles font le même angle avec Δ.

C'est là une forme commode du postulatum d'Euclide. Elle ne suppose pas la notion de distance, et ne suppose pas non plus des points à l'infini. Elle permet d'étudier séparément la translation. Cette transformation se définit facilement par des égalités d'angles. Deux droites parallèles sont deux droites orientées faisant les mêmes angles avec une droite orientée D. On pourrait donc aussi commencer la géométrie par les équipollences.

Je n'en dirai pas plus long sur ce sujet, car je suis conduit à cette question : « Comment faut-il enseigner la géométrie élémentaire ? » Cette question mériterait un long développement; je le traiterai peut-être plus tard : je le ferais mal dans cet article contenant sur la géométrie des réflexions un peu disparates.

J. Richard (Dijon).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Une page élémentaire de Lagrange.

Dans son petit volume *Théorie et Usage de la Règle à Calculs*, dont l'*Enseignement Mathématique* publie un compte rendu dans ce même numéro, M. P. Rozé a reproduit une page de Lagrange, extraite de ses conférences aux élèves des Ecoles Normales et empruntée à ses *Oeuvres complètes* (t. VII, p. 200). Il s'agit de l'approximation dans la multiplication des nombres décimaux. Les observations du grand géomètre sont trop justes, et elles pourraient avoir une trop heureuse influence sur l'enseignement si elles étaient entendues, pour que nous hésitions à les mettre sous les yeux de nos lecteurs.

La Rédaction.

Lorsqu'on a un nombre entier avec des décimales à multiplier par un nombre entier avec des décimales, la règle générale est de regarder les deux nombres comme des nombres entiers, ensuite de retrancher, de droite à gauche, dans le produit, autant de chiffres qu'il y a de décimales dans les deux nombres ; mais cette règle a souvent, dans la pratique, l'inconvénient d'allonger l'opération plus qu'il ne faut ; car, quand on a des nombres qui contiennent des décimales, ces nombres ne sont ordinairement exacts que jusqu'à un certain rang de décimales ; aussi l'on ne doit conserver dans le produit que les parties décimales du même ordre. Par exemple, si le multiplicande et le multiplicateur contiennent chacun deux rangs de décimales et n'ont que ce degré de précision, on aurait, par la méthode ordinaire, quatre rangs de décimales dans leur produit ; par conséquent il faudrait négliger les deux dernières comme inutiles, et même comme inexactes. Voici comment on peut s'y prendre pour n'avoir dans le produit qu'autant de décimales que l'on veut.

J'observe d'abord que, dans la manière ordinaire de faire la multiplication, on commence par les unités du multiplicateur, qu'on multiplie par celles du multiplicande, et ainsi de suite. Mais rien n'oblige à commencer par la droite du multiplicateur, on peut également commencer par la gauche ; et, à dire vrai, je ne sais pas pourquoi on ne préfère pas cette manière qui aurait l'avantage de donner tout de suite les chiffres de la plus grande valeur ; car, ordinairement dans la multiplication des grands nombres, ce qui intéresse le plus, ce sont les derniers rangs de chiffres ; souvent même on ne fait la multiplication que pour connaître quelques-uns des chiffres des derniers rangs : et c'est là, pour

le dire en passant, un des grands avantages du calcul par les logarithmes, lesquels donnent toujours, dans les multiplications comme dans les divisions, ainsi que dans l'élévation aux puissances et dans l'extraction des racines, les chiffres suivant l'ordre de leur rang, à commencer par le plus élevé, c'est-à-dire en allant de gauche à droite.

En faisant la multiplication de cette manière, il n'y aura proprement d'autre différence dans le produit, si ce n'est que l'on aura pour première ligne celle qui aurait été la dernière, suivant la méthode ordinaire, pour seconde ligne celle qui aurait été l'avant-dernière, et ainsi des autres.

Cela peut être indifférent lorsqu'il s'agit de nombres entiers et qu'on veut avoir le produit exact ; mais, lorsqu'il y a des parties décimales, l'essentiel est d'avoir dans le produit les chiffres des nombres entiers, et de descendre ensuite successivement à ceux des nombres décimaux ; au lieu que, suivant le procédé ordinaire, on commence par les derniers chiffres décimaux, et l'on remonte successivement aux chiffres des nombres entiers.

Pour faire usage de cette méthode, on écrira le multiplicateur au dessous du multiplicande, de manière que le chiffre des unités du multiplicateur soit au-dessous du dernier chiffre du multiplicande. Ensuite on commencera par le dernier chiffre à gauche du multiplicateur, qu'on multipliera comme à l'ordinaire par tous ceux du multiplicande, en commençant par le dernier à droite, et en allant successivement vers la gauche ; et l'on observera de poser le premier chiffre de ce produit au-dessous du chiffre du multiplicateur et les autres successivement à gauche de celui-ci. On continuera de même pour le second chiffre du multiplicateur, en posant également au-dessous de ce chiffre le premier chiffre du produit, et ainsi de suite. La place de la virgule, dans ces différents produits, sera la même que dans le multiplicande, c'est-à-dire que les unités des produits se trouvent toutes dans une même ligne verticale avec celles du multiplicande; par conséquent, celles de la somme de tous les produits ou du produit total seront encore dans la même ligne. Ainsi il sera aisé de ne calculer qu'autant de décimales qu'on voudra. Voici un exemple de cette opération, où le multiplicande est 437,25 et le multiplicateur est 27,34 :

437,	25
27,	34
8745	0
3060	75
131	175
17	4900
11954	4150

J'ai écrit dans le produit toutes les décimales ; mais il est aisé de voir comment on peut se dispenser de tenir compte de celles que l'on veut négliger. La ligne verticale est pour marquer plus distinctement la place de la virgule.

Cette règle me paraît plus naturelle et plus simple que celle qui est attribuée à Oughtred, et qui consiste à écrire le multiplicateur dans un ordre renversé.

Sur la théorie des parallèles.

Je lis dans l'*Enseignement mathématique* (n° du 15 septembre 1907) une manière intéressante de faire la théorie des parallèles en géométrie élémentaire.

En voici une autre : je ne prétends pas qu'elle soit la meilleure. Je la donne pour ce qu'elle vaut.

I° Axiome de Similitude. Soit une figure F. composée de n points $A_1 A_2 \ldots A_n$. Une figure G composée de n points $B_1 B_2 \ldots B_n$. Les figures F et G seront dites semblables si le rapport $\frac{A_i A_k}{B_i B_k}$ est le même quels que soient i et k. Ce rapport sera dit rapport de similitude. L'axiome consiste en ceci : *La figure F étant donnée ainsi que le rapport de similitude la figure G existe toujours.*

Cet axiome paraît compliqué. Il n'est cependant que l'expression précisée de cette vérité banale. Si tout grandissait proportionnellement il n'y aurait aucun moyen de s'en apercevoir. Pour que toutes choses puissent grandir proportionnellement, il faut que l'axiome soit vrai.

II° Théorème. *Dans deux figures semblables à une droite correspond une droite à un plan un plan.*

Soient $A_1 A_2 A_3$ 3 points en ligne droite ; on aura :

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 = A_1 A_3$$

et en remplaçant les longueurs figurant dant cette égalité par des longueurs proportionnelles.

$$B_1 B_2 + B_2 B_3 = B_1 B_3 .$$

Donc $B_1 B_2 B_3$ sont en ligne droite.

Soit maintenant P un plan, il est engendré par une droite $A_1 A_2$ dont deux points $A_1 A_2$ décrivent des droites X, Y. La surface correspondante sera engendrée par la droite $B_1 B_2$, les points $B_1 B_2$ décrivant les droites correspondantes à X, Y. Dailleurs X, Y concourant en un point A_3, les droites correspondantes concourent en B_3. La droite $B_1 B_2$ engendre donc un plan.

III° Théorème. *A une sphère correspond une sphère à un cercle un cercle.*

Car à des rayons égaux correspondent des rayons égaux.

IV°. *A un polygone régulier correspond un polygone régulier.* Un polygone régulier est une figure ayant tous ses côtés égaux et tous ses sommets sur un même cercle. Ces propriétés subsistent évidemment dans la figure semblable.

V°. *A un angle correspond un angle égal.*

L'angle au centre d'un polygone régulier de n côtés est la n^{me} partie de quatre angle droits, ou $\frac{4}{n}$; dans la figure correspondante, d'après le théorème précédant il lui correspond l'angle au centre du polygone régulier correspondant, c'est-à-dire $\frac{4}{n}$. Si nous prenons dans la 1re figure k fois l'angle au centre ou $\frac{4}{n}$, il lui correspondra dans la seconde figure k fois l'angle au centre ou $\frac{4k}{n}$. Le théorème est donc démontré dans le cas où l'angle est commensurable avec l'angle droit. Dans le cas contraire on démontrera que deux angles correspondants ont même valeur approchée à $\frac{1}{n}$ près. (L'angle droit étant l'unité).

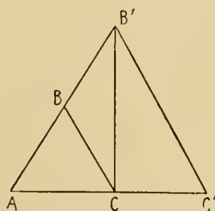
VI°. *La somme des angles d'un triangle ne peut surpasser deux droits.* (Démonstration connue).

VII°. *Si la somme des angles d'un certain triangle vaut deux droits, il en est de même pour tout autre triangle.* (Démonstration connue).

VIII°. *La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits*

Deux triangles semblables ont les mêmes angles, on peut donc les placer de façon qu'ils aient un angle commun. Soient ABC, AB′C′ ces deux triangles. Si AB $<$ AB′ on aura aussi AC $<$ AC′. Joignons B′C.

La somme S des angles du triangle ABC, plus la somme Σ des angles du triangle BCB′, cela fait la somme T des angles du triangle ACB′ plus la somme des deux angles réunis en B qui vaut 2 droits



$$S + \Sigma = T + 2 .$$

De même la somme T des angles du triangle ACB′, plus la

somme U des angles du triangle B'CC' vaut deux droits plus la somme S des angles du triangle AB'C'

$$T + U = S + 2 .$$

en ajoutant ces deux égalités on a

$$\Sigma + U = 4 .$$

comme ni Σ ni U ne peuvent surpasser deux droits on a $\Sigma = 2$, $U = 2$. Il existe donc des triangles dont la somme des angles vaut deux droits ce qui d'après le théorème précédent suffit.

On pourrait éviter l'intervention du théorème VII, en montrant que dans la figure du théorème VIII, on peut faire le triangle BCB' égal à un triangle donné quelconque.

J. Richard (Dijon).

A propos d'un théorème relatif au triangle.

Le n° 12 du 15 mars 1906 (p. 180) du *Bull. des sciences math. et phys. élémentaires* contient une note *sur le problème relatif à la résolution d'un triangle dont on connait deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.*

La résolution proposée par l'auteur appelle quelques remarques. Elle consiste à envisager les côtés du triangle ABC comme cordes d'arcs du cercle circonscrit de rayon r et de centre O. L'angle B et les côtés $BC = a$, $CA = b$ étant supposés connus, elle donne pour les éléments inconnus les expressions suivantes :

$$\sphericalangle AOC = 2B, \quad r = \frac{b}{\sqrt{2(1 - \cos AOC)}}, \quad \cos 2A = \frac{2r^2 - a^2}{2r^2},$$
$$C = 180 - (A + B) \quad \sphericalangle AOB = 2C, \quad c = r\sqrt{2(1 - \cos AOB)}.$$

Mais ces formules contiennent plusieurs expressions non monomes, aussi n'ont-elles aucune portée pratique.

On peut les mettre sous une forme plus simple, comme nous l'a fait remarquer M. l'abbé Gelin, en observant que l'on a

$$1 - \cos 2B = 2\sin^2 B, \quad 1 - \cos 2C = 2\sin^2 C .$$

On a alors

$$2r = \frac{b}{\sin B}, \quad \sin A = \frac{a}{2r}, \quad C = 180 - (A + B), \quad c = 2r \sin C,$$

formules que l'on démontre du reste directement sur la figure en partant des relations

$$a = 2r \sin A, \quad b = 2r \sin B, \quad c = 2r \sin C.$$

Enfin si l'on remplace $2r$ par sa valeur, on a

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}, \quad C = 180 - (A + B), \quad c = \frac{b \sin C}{\sin C},$$

qui sont les expressions fournies par la solution classique.

L'emploi de l'auxiliaire r est superflu et l'on voit aisément qu'il n'évite pas le *cas douteux*[1], comme l'auteur semble croire, suivant une remarque de M. Barbette.

R. Guimaraes (Elvas, Portugal).

CHRONIQUE

Académie des Sciences de Paris.

Prix décernés :

La séance publique annuelle consacrée aux prix de l'Académie des Sciences a eu lieu le 2 décembre sous la présidence de M. Chauveau. M. G. Darboux, secrétaire perpétuel, présente les rapports sur les prix décernés par l'Académie pour l'année 1907[2].

Géométrie; *prix Francœur*. — Le prix est décerné à M. E. Lemoine pour l'ensemble de ses travaux mathématiques.

Prix Bordin. — Le prix est attribué au mémoire de MM. Enriques et Severi.

Prix Vaillant. — Le prix est réparti, en parties inégales, entre MM. Jacques Hadamard, G. Lauricella, A. Korn et T. Boggio. Le premier des mémoires sera publié dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Mécanique; *prix Montyon*. — M. Cuënot, pour ses études sur les déformations des voies de chemin de fer. Mention très honorable à M. Petot, pour sa théorie des automobiles.

Prix Poncelet. — Le prix est attribué à feu M. le colonel Renard, pour ses recherches mathématiques et expérimentales sur la mécanique et pour la part qui lui revient dans l'état actuel de l'aéronautique.

---

[1] Le *cas douteux* qui se présente dans la résolution des triangles rectilignes, se trouve très bien traité, et fort simplement, dans la *Plane and spherical Trigonometry in three parts*, par M. B. Goodwin, 7e édit., Longmans, Green and C°, New-York and Bombay, 1903, 154-155.

[2] La liste des prix proposés pour les années 1907-1909 a été publiée dans *L'Ens. math.* du 15 janvier 1907.

Astronomie : *prix Lalande.* — M. Th. Lewis (de l'Observatoire de Greenwich).

Prix Valz. — M. Giacobini (de l'Observatoire de Nice).

Prix G. de Pontécoulant. — M. Gaillot (de l'Observatoire de Paris).

Histoire des Sciences ; *prix Binoux.* — Un prix est décerné à M. le Prof. G. Loria (Gênes) pour l'ensemble de ses travaux sur l'Histoire des Sciences.

Prix généraux ; *prix Wilde.* — M. Ch. Nordmann, pour ses recherches sur la photométrie des Astres.

Prix Saintour. — M. Gonessiat, pour ses travaux d'Astronomie. — M. de Séguier, pour son ouvrage sur la théorie des groupes.

Prix Petit d'Ormoy (sciences mathématiques). — Le prix est décerné à M. P. Duhem, pour l'ensemble de ses travaux de physique mathématique.

Prix Laplace. — Œuvres de Laplace remises à M. L. Daum, sorti premier de l'Ecole polytechnique de Paris et entré, en qualité d'élève ingénieur, à l'Ecole nationale des mines.

Prix Révol. — Partagé entre MM. Daum et Painvin entrés les deux premiers à l'Ecole des mines, et MM. Cambournac et Galatoire Malégaric, entrés les deux premiers à l'Ecole des ponts et chaussées.

Programme des prix proposés,

pour les années 1909, 1910, 1911, 1912 et 1913.

Géométrie ; *prix Francœur* (1000 fr.). — Ce prix annuel sera décerné à l'auteur des découvertes ou des travaux utiles aux progrès des sciences mathématiques pures et appliquées.

Prix Bordin (3,000 fr.). — L'Académie met au concours, pour 1909, la question suivante :

L'invariant absolu qui représente le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce d'une surface algébrique dépend d'un invariant relatif ϱ, *qui joue un rôle important dans la théorie des intégrales de différentielles totales de troisième espèce et dans celle des courbes algébriques tracées sur la surface. On propose de faire une étude approfondie de cet invariant, et de chercher notamment comment on pourrait trouver sa valeur exacte, au moins pour des catégories étendues de surfaces.*

Grand Prix *des Sciences mathématiques* (3,000 fr.). — L'Académie met au concours, pour 1910, la question suivante :

On sait trouver tous les systèmes de deux fonctions ménomorphes dans le plan d'une variable complexe et liées par une relation algébrique. Une question analogue se pose pour un système de trois fonctions uniformes de deux variables complexes, ayant

partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle et liées par une relation algébrique.

L'Académie demande, à défaut d'une solution complète du problème, d'indiquer des exemples conduisant à des classes de transcendantes nouvelles.

Mécanique; *prix Fourneyron* (1,000 fr.). — L'Académie met au concours, pour 1910, la question suivante : *Étude théorique et expérimentale des effets des coups de bélier dans les tuyaux élastiques.*

Prix Poncelet (2,000 fr.). — Décerné alternativement à un ouvrage sur les mathématiques pures ou sur les mathématiques appliquées.

Le prix Poncelet sera décerné en 1909 à un ouvrage sur les mathémathiques appliquées et en 1910 à un ouvrage sur les mathématiques appliquées.

Prix Vaillant (4,000 fr.). — L'Académie a mis au concours, pour l'année 1909, la question suivante :

Perfectionner, en un point important, l'application des principes de la dynamique des fluides à la théorie de l'hélice.

Prix Boileau (1,300 fr.). — Ce prix triennal est destiné à récompenser les recherches sur les mouvements des fluides, jugées suffisantes pour contribuer au progrès de l'hydraulique. A défaut, la rente triennale échue sera donnée, à titre d'encouragement, à un savant estimé de l'Académie et choisi parmi ceux qui sont notoirement sans fortune. L'Académie décernera le prix Boileau dans sa séance annuelle de 1909.

Astronomie; *prix Pierre Guzman* (100,000 fr.). — Décerné à celui qui aura trouvé le moyen de communiquer avec un astre autre que la planète Mars. Prévoyant que le prix de cent mille francs ne serait pas décerné tout de suite, la fondatrice a voulu, jusqu'à ce que ce prix fût gagné, que les intérêts du capital, cumulés pendant cinq années, formassent un prix, toujours sous le nom de Pierre Guzman, qui serait décerné à un savant français, ou étranger, qui aurait fait faire un progrès important à l'Astronomie. Le prix quinquennal, représenté par les intérêts du capital, sera décerné, s'il y a lieu, en 1910.

Prix Lalande (540 fr.). — Ce prix annuel doit être attribué à la personne qui, en France ou ailleurs, aura fait l'observation la plus intéressante, le mémoire ou le travail le plus utile aux progrès de l'Astronomie.

Prix Valz (460 fr.). — Ce prix annuel est décerné à l'auteur de l'observation astronomique la plus intéressante qui aura été faite dans le courant de l'année.

Prix Janssen. — Ce prix biennal, qui consiste en une médaille d'or destinée à récompenser la découverte ou le travail faisant faire un progrès important à l'Astronomie physique, sera décerné en 1910.

Prix G. de Pontécoulant (700 fr.). — Ce prix biennal, destiné à encourager les recherches de mécanique céleste, sera décerné dans la séance publique annuelle de 1909.

Histoire des Sciences; *prix Binoux* (2,000 fr.). — Ce prix alternatif sera décerné, en 1909, à l'auteur de travaux sur l'Histoire des Sciences et, en 1910, à l'auteur de travaux sur la géographie ou la navigation.

Prix Petit d'Ormoy. (Deux prix de 10,000 fr.) — L'Académie a décidé que, sur les fonds produits par le legs Petit d'Ormoy, elle décernera tous les deux ans un prix de dix mille francs pour les Sciences mathématiques pures ou appliquées, et un prix de dix mille francs pour les Sciences naturelles. Elle décernera les prix Petit d'Ormoy, s'il y a lieu, dans sa séance publique de 1909.

Prix Pierson-Perrin (5.000 fr.). — Ce nouveau prix biennal, destiné à récompenser le Français qui aura fait la plus belle découverte physique, telle que la direction des ballons, sera décerné, pour la première fois, à la séance publique de 1909.

Prix Leconte (50,000 fr.). — Ce prix doit être donné, en un seul prix, tous les trois ans, sans préférence de nationalité :

1° Aux auteurs de découvertes nouvelles et capitales en mathématiques, physique, chimie, histoire naturelle, sciences médicales;

2° Aux auteurs d'applications nouvelles de ces sciences, applications qui devront donner des résultats de beaucoup supérieurs à ceux obtenus jusque-là. — L'Académie décernera le prix Leconte, s'il y a lieu, en 1910.

Congrès des mathématiciens allemands.

Dresde, septembre 1907.

Les mathématiciens allemands se sont réunis à *Dresde*, du 15 au 18 septembre 1907, à l'occasion du Congrès des naturalistes et médecins allemands. Ils étaient présidés par MM. v. Brill, président de l'Association allemande des mathématiciens et Krause, délégué du Congrès des naturalistes.

Dans une première séance générale MM. Klein et Gutzmer ont rendu compte du travail de la *Commission d'enseignement* et présentent le rapport sur la *préparation scientifique des candidats à l'enseignement secondaire supérieur* élaboré par la dite commission. Nos lecteurs trouveront en tête de ce numéro une traduction de ce remarquable travail qui mérite d'être examiné et discuté dans les divers groupements de professeurs de l'enseignement secondaire et universitaire.

La Commission d'enseignement a été complétée et comprendra un ou deux délégués des grandes sociétés et associations qui ont in-

térêt à suivre l'organisation de l'enseignement scientifique. L'Association allemande des mathématiciens nomme comme délégués MM. Klein et Stäckel.

IIe Centenaire d'Euler. L'Association a rendu hommage à la mémoire d'Euler en organisant une série de conférences à l'occasion du 2e centenaire de sa naissance :

1. A. v. Brill (Tubingue) : Introduction à la célébration du 2e centenaire d'Euler.
2. Schlesinger (Klausenberg) : Sur un problème de l'analyse indéterminée chez Fermat, Euler, Jacobi et Poincaré.
3. A. Pringsheim (Munich) : Sur la transformation des séries d'après Euler.
4. S. Brauer (Karlsruhe) : La théorie des turbines d'après Euler.
5. P. Gans (Tubingue) : Euler comme physicien.
6. E. Timerding (Strasbourg) : Sur les travaux d'Euler dans le domaine de la mécanique nautique.
7. W. Hort (Gr.-Lichterfelde) : L'importance d'Euler dans la technique scientifique.
8. Hoppe (Hambourg) : Les mérites d'Euler en optique.
9. Archenhold (Treptow) : La correspondance d'Euler.

La publication des oeuvres complètes d'Euler devait nécessairement être soulevée à cette occasion, de même qu'elle a été discutée au printemps, à la séance organisée par la Société de mathématiques de Berlin[1]. M. Rudio (Zurich) a informé l'assemblée que la Société helvétique des sciences naturelles a chargé une commission de 7 membres d'étudier la question de la publication des œuvres d'Euler; il a exprimé le vœu que l'Association nomme de son côté une commission. Sur la proposition du comité, l'assemblée nomme une commission de trois membres composée de MM. Pringsheim, Stäckel et Krazer; elle se mettra en rapport avec M. Rudio. Il est désirable que la question puisse être examinée et résolue au Congrès international qui se tiendra à Rome en avril 1908.

Communications scientifiques. — Voici la liste des travaux qui ont été présentés dans les séances de la section de mathématiques.

1. K. Rohn (Leipzig) : Ueber algebraische Raumkurven (Referat).
2. L. Schlesinger (Klausenburg) : Ueber die Entwicklung der analytischen Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865 (Referat).
3. F. Klein (Göttingen) : Ueber den Zusammenhang zwischen dem sogenannten Oszillationstheorem der linearen Differentialgleichungen und dem Fundamentaltheorem der automorphen Funktionen.
4. G. Landsberg (Kiel) : Krümmungstheorie und Variationsrechnung.

[1] V. *L'Ens. math.*, 9e année p. 222, 489, 1907.

5. Schönflies (Königsberg) : Ueber das sogenannte Richardsche Paradoxon der Mengenlehre.

6. F. Hausdorff (Leipzig) : Ueber dichte Ordnungstypen.

7. H. Wiener (Darmstadt) : Geometrische Invariantentheorie der binären Formen.

8. V. Varicak (Agram) : Zur nichteuklidischen Geometrie.

Séance administrative. — L'Association allemande des mathématiciens compte aujourd'hui 703 membres; elle a publié un annuaire détaillé contenant quelques indications biographiques sur chacun de ses membres.

M. le Prof. F. Klein (Gœttingue) est nommé président pour la période du 1er octobre 1907 au 30 septembre 1908.

La prochaine réunion aura lieu à *Cologne*.

IVe Congrès international des mathématiciens.

Rome, 6-11 avril 1908.

Le IVe Congrès international des mathématiciens, auquel S. M. le Roi d'Italie a bien voulu accorder son haut patronage, sera inauguré à Rome le 6 avril 1908 à 10 h. du matin, dans la Salle des Horaces et des Curiaces au Capitole. L'ordre du jour de la séance d'ouverture comprend entre autres, un discours de M. Volterra sur les mathématiques en Italie dans la seconde moitié du XIXe siècle. Le soir avant, à 9 h. 30, il yaura une réunion préliminaire dans l'*Aula Magna* de l'Université.

Les séances successives seront tenues dans les salles de l'Académie des Lincei (Palais Cortini, Via della Lungora,) et seront consacrées, le matin aux travaux des sections, l'après-midi aux conférences générales. La séance de clôture aura lieu le samedi 11 avril à 3 h. Le lendemain les Congressistes sont invités, par le Comité d'organisation, à une excursion à la villa d'Hadrien, avec déjeûner à Tivoli.

Les *conférences générales* annoncées sont les suivantes :

MM. Forsyth : On the present condition of partial differential equations of the second order, at regards formal integration.

Hilbert : Die Methode der unendlich vielen unabhängigen Variabeln.

Klein : Ueber die mathematische Encyclopädie.

Lorentz : Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther.

Mittag-Leffler : Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe.

Newcomb : La théorie du mouvement de la lune ; ses progrès et son état actuel.

Picard : L'analyse dans ses rapports avec la Physique mathématique.

Veronèse : Sulla Geometria non Archimedea.

MM. Darboux et Poincaré se sont réservés de faire connaître ultérieurement les sujets de leurs conférences.

Ainsi que nous l'avons annoncé, en mars 1907, le Congrès comprendra *quatre sections*.

Les communications promises pour les sections sont très nombreuses. Signalons, parmi celles-ci, les rapports sur *l'enseignement des mathématiques élémentaires* dans les différentes nations, qui seront présentés par MM. Borel (France,) Gutzmer (Allemagne,) Suppautschitsch (Autriche,) Godfrey (Angleterre,) Smith (Etats-Unis d'Amérique,) Fehr (Suisse).

Renseignements divers. — Les Congressistes jouiront d'une réduction de 40-60 $^{0}/_{0}$ (suivant le parcours) sur les tarifs ordinaires de *Chemins de fer italiens*. Cette réduction s'appliquera au voyage de la frontière à Rome, depuis le 25 mars, ainsi qu'à dix autres voyages que le Congressiste, après avoir pris part au Congrès, pourra effectuer en Italie, jusqu'au 5 mai 1908.

L'*Association Nationale pour le mouvement des Etrangers* (Associazione Nazionale per il movimento dei Forestieri ; Sede di Roma, Via della Colonna, 52) se charge gratuitement de procurer aux Congressistes un logement, dans des hôtels, des pensions ou des chambres meublées, pour un prix variant entre 4 et 12 fr. par jour. L'Association établira en outre un bureau de renseignements à la gare de Roma-Termini, pendant les journées du 4, 5 et 6 avril.

La *taxe d'inscription* au Congrès est de 25 francs. Cette somme doit être adressée à « M. Vincenzo Reina, trésorier du IV[e] Congrès international des mathématiciens, Piazza S. Pietro in Vincoli, 5, Rome. » Les membres qui voudront jouir des réductions sur les prix des chemins de fer devront verser leur cotisation avant le 25 mars 1908.

Les personnes appartenant aux familles des Congressistes pourront, en versant 15 francs, jouir des mêmes avantages, réductions, etc., exception faite pour le volume des Actes.

Pour tous les renseignements se rapportant au Congrès, s'adresser au *Secrétaire général*, M. le Prof. G. Castelnuovo, Piazza S. Pietro in Vincoli, 5, Rome.

Faculté des sciences de Paris; thèses de doctorat.

Thèses de doctorat des sciences mathématiques soutenues en 1907 : — Fatou (Pierre): Séries trigonométriques et série de Taylor (14 février 1907).

Traynard (E.) : Sur les fonctions théta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques (9 avril 1907).

Montel (P.) : Sur les suites infinies de fonctions (25 mai 1907).

Lambert (Armand) : Sur les coefficients du développement de la fonction pertubatrice (5 novembre 1907).

Etats-Unis : thèses de doctorat.

Thèses présentées aux principales universités américaines pendant l'année universitaire 1906-1907 :

Université de Chicago : G. D. Birkhoff, Asymptotic properties of certain differential equations with applications to boundary value and expansion problems. — A. Ranum, On a new kind of congruence groups. — A. L. Underhill, Invariants under point transformations in the calculus of variations. — B. M. Walker, On the resolution of higher singularities of algebraic curves into ordinary, double points.

Université Johns Hopkins : C. S. Atchison, Curves with a directrix. — A. E. Landry, A geometrical interpretation of binary syzygies.

Université Harvard : W. Ch. Brenke, A contribution to the theory of trigonometric and zonal harmonic series.

Université Cornell : R. Morris, On the automorphic functions of the group $(0, 3 ; l_1, l_2, l_3)$.

Université de Visconsin : F. E. Allen, On the determination of cyclic involutions of order three.

Université Yale : H. H. Conover, On certain problems in the calculus of variations.

Université de Virginia : F. W. Reed, Singular points in the approximate development of the pertubative function. — W. B. Stone, The groups of two, three and four parameters of space and their differential invariants.

Nominations et distinctions.

M. E. Almansi, professeur extraordinaire de physique mathématique à l'Université de Pavie, est nommé professeur ordinaire.

M. Baillaud, directeur de l'Observatoire de Toulouse, est nommé directeur de l'Observatoire de Paris.

M. F. Bernstein, privat-docent à l'Université de Halle, est nommé professeur chargé des mathématiques des assurances à l'Université de Gœttingue.

M. Bucherer, privat-docent, est nommé professeur à l'Université de Bonn.

M. St. Jolles, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieure de Charlottenbourg.

M. Lebesgue chargé de cours, est nommé professeur de mécanique rationnelle et appliquée à la Faculté des Sciences de Poitiers.

M. J. Loschner est nommé professeur de géodosie à l'Ecole technique supérieure allemande de Brünn.

M. R. Marcolongo, professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Messine, est transféré à la même chaire dans l'Université de Naples (comme successeur de M. Siacci, décédé).

M. G. A. Miller, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire à l'Université de l'Illinois (Etats-Unis).

M. Oertel, de l'Observatoire de Munich, est nommé professeur de géodosie à l'Ecole technique supérieure de Hanovre.

M. G. Picciati, privat-docent à l'Université de Padoue, est nommé professeur extraordinaire de mécanique rationnelle à l'Université de Bologne.

M. O. Fedone, professeur extraordinaire de mécanique rationnelle à l'Université de Gênes, est nommé professeur ordinaire.

M. E. Vivanti, professeur de calcul infinitésimal à l'Université de Messine, est transféré à la même chaire à l'Université de Pavie.

Privat-docents. — Sont admis en qualité de privat-docents :

M. E. Bianchi, pour l'astronomie, à l'Université de Rome.

M. L. Sinigallia, pour le calcul infinitésimal à l'Université de Pavie.

M. M. Winkelmann, pour les mathématiques et la mécanique à l'Ecole technique supérieure de Karlsruhe.

Nécrologie.

Lord Kelvin. — L'Angleterre vient de perdre l'un de ses plus grands savants, sir William Thomson (Lord Kelvin depuis 1892), décédé le 17 décembre 1907 à Londres. Né à Belfast le 26 juin 1824, il débuta déjà en 1846 dans l'enseignement universitaire, à Glascow, et ne tarda pas à prendre place au premier rang des physiciens modernes. Ses principaux travaux ont été réunis dans un ouvrage comprenant trois volumes et intitulé *Mathematical and physical Papers* (1882-1892).

J. Janssen. — M. Janssen, le savant directeur de l'Observatoire de Meudon, est mort le 23 décembre 1907, à l'âge de 84 ans.

Cours universitaires.

Paris ; *Collège de France.* (1er semestre, à partir du 2 décembre 1907). *Mécanique analytique et mécanique céleste :* M. Hadamard, suppléant, traitera des trajectoires réelles de la Dynamique (2 leçons par semaine). — *Mathématiques :* M. Humbert, suppléant, étudiera quelques questions d'analyse et d'arithmétique (2 leçons par semaine). — *Mathématiques.* Fondation Claude-Antoine Peccot) : M. Pierre Boutroux, chargé du cours, traitera de l'inversion des fonctions uniformes.

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1908. — 1 vol. in-16, de plus de 950 p. avec figures et planches ; 1 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

La librairie Gauthier-Villars vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1908. — Suivant l'alternance adpotée, ce Volume, de millésime pair, contient, outre les données astronomiques, des Tableaux relatifs à la Physique, à la Chimie, à l'Art de l'Ingénieur. Cette année, nous signalons tout spécialement les Notices de M. G. Bigourdan : *La distance des astres et en particulier des étoiles fixes,* et celle de M. F. Guyou : *L'Ecole d'astronomie pratique de l'Observatoire de Montsouris.*

Carlo Bourlet. — **Cours abrégé de Géométrie** ; II. *Géométrie dans l'espace.* — 1 vol. cart. 235 p. ; fr. 1,80 ; Hachette et Cie, Paris.

Nous avons déjà annoncé la première partie de cet ouvrage *(Géométrie plane)* dans le tome précédent (1907, p. 73). La deuxième partie, qui vient de paraître, en est la suite naturelle et attendue ; elle continue l'œuvre de simplification de l'enseignement géométrique, en restant conforme à la lettre et à l'esprit des nouveaux programmes français.

Le cinquième Livre de Legendre et de Rouché a souvent fait le désespoir des candidats ; il est remplacé avantageusement par un chapitre intitulé : « Les déplacements élémentaires » où les théorèmes relatifs aux droites et plans parallèles se déduisent très simplement de la définition du mouvement de translation rectiligne ; notons en particulier le théorème des angles dont les côtés sont parallèles, qui se démontre habituellement d'une façon si peu naturelle. L'étude des droites et plans perpendiculaires résulte de la rotation ; les démonstrations deviennent si simples que les élèves peuvent facilement les découvrir eux-mêmes.

Les trois derniers chapitres renferment les expressions des aires et volumes des corps usuels, des notions de géométrie cotée, avec études d'ombres propres et portées sur un plan, des indications pour le lavis et enfin des éléments d'arpentage et de nivellement.

De nombreux exercices ont été placés à la fin de chaque chapitre ; les uns numériques ou graphiques, d'autres théoriques, qui éveilleront l'esprit de recherche de l'élève.

La pierre angulaire du nouvel édifice géométrique est cet appel constant à la notion du mouvement, qui facilitera certainement l'enseignement élémentaire ; l'union plus étroite du dessin et de la géométrie théorique est aussi une réforme excellente, pourvu qu'elle n'empêche pas l'élève de suivre l'enchaînement des idées. La méthode nouvelle ne deviendra définitive qu'au moment où elle atteindra le degré de perfection logique des éléments d'Euclide. Le « Cours complet » que M. Bourlet fera paraître sous peu, présentera un exposé de la nouvelle manière, avec toute la rigueur désirable.

L. Kollros (Chaux-de-Fonds).

U. Broggi. — **Traité des Assurances sur la vie avec développement sur le calcul des probabilités.** Traduit de l'italien par S. Lattès. — 1 vol. cart., 306 p. ; 7 fr. 50; Librairie Hermann, Paris.

Cet ouvrage est la traduction du manuel italien de la collection Hoepli que nous avons eu l'occasion de signaler à nos lecteurs. Son principal objet est la théorie des assurances sur la vie avec des développements très étendus sur le calcul des probabilités. On y trouvera notamment des notions sur la statistique et l'établissement des tables de mortalité, le calcul des primes d'assurance et des réserves, les systèmes de participation des assurés dans les bénéfices, la théorie du risque.

Ces divers sujets sont traités avec beaucoup de clarté sous une forme très condensée. L'ouvrage de M. Broggi fournit donc une excellente introduction à l'étude de la théorie des assurances. Plusieurs questions sont traitées d'une manière plus systématique que dans les ouvrages français, aussi croyons-nous, qu'au point de vue théorique, cet ouvrage sera lu avec intérêt par les actuaires de langue française.

M. Chassagny. — **Cours élémentaire de Physique,** conforme aux programmes du 31 mai 1902, avec une préface de M. P. Appell. Cinquième édition. — 1 vol. in-16 de 1144 pages, contenant 808 figures ; 8 fr. ; Hachette & Cie, Paris.

Ce cours de Physique, qui est déjà à sa cinquième édition, est un de ceux qui servent en France dans les parties les plus élevées de l'enseignement secondaire. Il ne nous appartient pas de le juger ici au point de vue de la Physique expérimentale ; étant donné son caractère élémentaire il doit décrire des expériences et présenter des faits et non pas en donner de hautes théories mathématiques réservées à l'enseignement supérieur, telles que celles du cours de M. Bouasse récemment examiné ici (*Enseignement mathématique*, 1907, p. 329). Mais si le présent cours ne fait usage que des mathématiques peu élevées — et nous entendons par là tout aussi bien les premiers principes du calcul des dérivées — il s'en sert largement, sans détours destinés à masquer les dérivations ou des opérations simples que l'on compliquait autrefois sous le fallacieux prétexte de ne pas sortir d'un domaine déclaré élémentaire mais auquel on faisait cependant perdre le caractère en question. Depuis longtemps déjà, on n'hésite plus à commencer l'étude de la Physique par les notions mécaniques telles que celle de la vitesse considérée comme la dérivée de l'espace parcouru.

La préface de M. Appell venant d'un professeur de mécanique ne pouvait manquer de faire ressortir tout l'avantage de telles méthodes. Les transformations physiques des corps sont aujourd'hui entièrement dominées par un principe unique, le principe de la conservation de l'énergie. Dès le début du cours de M. Chassagny, immédiatement après les préliminaires mécaniques, nous trouvons un chapitre sur l'énergie et ses transformations. La force elle-même est considérée comme la dérivée (changée de signe) de l'énergie par rapport au déplacement.

Faire une analyse détaillée de tout ce qui suit est complètement impossible. Contentons-nous de jeter un coup d'œil sur les points dont les anciens cours parlaient à peine. Dans le livre deuxième intitulé *Hydrostatique et statique des gaz* nous trouvons une étude de la capillarité où il est parlé notamment de la tension superficielle des liquides. Dans le livre troisième (chaleur) tout est actuellement dominé par la notion d'énergie calorifique ;

la chaleur est considérée comme un mode de mouvement. Puis vient l'étude des équilibres sous les différentes phases que peuvent présenter les corps ; on peut dire sans exagération que c'est là une introduction, très brève à coup sûr mais excellente, à l'une des parties les plus importantes de la chimie physique.

Le livre quatrième (acoustique) est précédé d'une étude générale du mouvement vibratoire et notamment d'une définition de l'onde. Un parallèle intéressant y est fait entre les vibrations sonores et les vibrations lumineuses. Dans le livre cinquième (optique) il faut signaler une belle étude de la dispersion illustrée d'une magnifique planche en couleurs représentant différents spectres et des paragraphes très importants sur la diffraction, la polarisation et la double réfraction. Ce livre se termine par l'étude du rayonnement de la chaleur.

Arrivons au livre sixième et dernier consacré à l'électricité. Il débute par une théorie générale du potentiel où les points de vue sont les mêmes que dans les préliminaires mécaniques du début de l'ouvrage. Ainsi l'intensité en un point d'un champ électrique est égale à la dérivée (changée de signe) du potentiel par rapport au déplacement sur la ligne de force passant par le point considéré. Nous trouvons même le théorème de Gauss sur le flux de force à travers une surface. Et le même chapitre nous mène jusqu'aux découvertes les plus récentes faites dans le domaine de l'électricité statique : décharges dans les gaz, tubes de Geissler et de Crookes, rayons X, rayons de Becquerel, propriétés des substances radio-actives.

Après les propriétés du courant (lois de Ohm, Joule, Faraday), nous étudions les sources chimiques d'électricité, c'est-à-dire les piles, puis le magnétisme, puis les actions électro-magnétiques.

De même qu'à propos de l'énergie thermique, M. Chassagny nous donne des détails sur les machines à vapeur, il parle maintenant longuement des machines industrielles fondées sur l'induction. Il termine par les oscillations électriques, un coup d'œil rapide sur la théorie électro-magnétique de la lumière et ses applications les plus merveilleuses telles que la télégraphie sans fil.

Pas de descriptions d'expériences inutiles, mais beaucoup de détails sur toutes celles pouvant conduire à des applications. Cette phrase n'est-elle pas le meilleur éloge que l'on puisse faire d'un livre qui se termine d'ailleurs par 147 énoncés de problèmes empruntés aux compositions proposées dans les récents examens et concours.

A. Buhl (Montpellier).

Gaetano Fazzari. — **Breve Storia della matematica.** — I vol. in-16, 268 p.; 4 L.; R. Sandron, Milano, Palermo, Napoli.

Le joli volume que M. Fazzari vient de publier dans la « collection Sandron », tout est surtout destiné aux élèves des écoles secondaires. Il développera chez eux le goût pour l'histoire des branches mathématiques qui forment le sujet de leurs études, mais il sera également lu avec intérêt et profit par tous ceux qui aspirent à compléter, par ce côté, leurs connaissances de l'histoire de la civilisation. Ils y trouveront, en raccourci, et débarrassé de tout apparat inutile d'érudition, un aperçu très bien coordonné du développement de l'arithmétique et de la géométrie élémentaire, depuis les Egyptiens et les Babyloniens jusqu'à la fin du Moyen-Age. Les exigences de la concision, imposée par la nature et le but même de l'ouvrage, n'ont pas empêché

M. Fazzari de donner du relief aux détails les plus caractéristiques et les plus importants dans tous les cas où cela pouvait contribuer à attirer l'attention des lecteurs et à provoquer leurs réflexions sur les parties essentielles du sujet.

Il est bien à souhaiter que cette publication du professeur Fazzari — dont le nom est connu depuis longtemps de tous ceux qui s'intéressent en Italie aux questions d'enseignement mathématique — trouve bon accueil dans le public auquel elle s'adresse. Ce sera le meilleur moyen d'encourager son auteur à poursuivre dans un deuxième volume son exposé du développement de l'algèbre et de la géométrie élémentaire depuis Luca Paciolo jusqu'à nos jours. E. Vailati (Rome).

C. Hawkins. — **Elementary Trigonometry.** (Dent's series of mathematical Text Book). — 1 vol. in-16, 310 p. ; 4/6 ; Dent & C°, Londres.

L'auteur du présent ouvrage a cherché avant tout à développer le côté pratique et utilitaire de la trigonométrie Il s'est efforcé d'intéresser l'élève par des applications nombreuses et variées accompagnant la théorie. Il lui indique même le moyen de construire des appareils simples à l'aide desquels il pourra mesurer des hauteurs, des angles, etc. Il recommande à l'élève d'aller si possible lui-même sur le terrain et d'y opérer des triangulations au moyen de ces instruments. En un mot, il développe par tous les moyens possibles le sens pratique du jeune étudiant.

Le livre traite des sujets suivants : mesure du triangle, éléments d'arpentage, calcul des aires par la triangulation, description des principaux instruments de mesure, rapports trigonométriques, principales formules. Chaque partie est accompagnée de nombreux exemples et exercices. L'ouvrage se termine par un ensemble de problèmes divers.

Comme on le voit, ce volume repond tout à fait aux besoins actuels d'une première étude de la trigonométrie et se recommande aux professeurs de l'enseignement élémentaire.

J.-P. Dumur (Genève.)

G. Loria. — **Vorlesungen über darstellende Geometrie** I. Die Darstellungsmethoden. Deutsch von Fr. Schütte. — 1 vol. cart. 218 p. ; 6 Mk. 80 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

La Géométrie descriptive est souvent envisagée comme une branche des mathématiques appliquées ; on n'a alors en vue que les applications techniques auxquelles elles fournissent des moyens de représentations et de résolution graphique. Si, par contre, on fait l'étude de ses notions fondamentales et de ses méthodes, la Géométrie descriptive vient prendre place dans le domaine des mathématiques pures où elle a l'avantage d'occuper une région voisine des sciences appliquées. La frontière est facile à franchir, mais il est intéressant aussi de rester en deçà et de faire une étude approfondie des ressources qu'offre le domaine limité à ses méthodes et à ses propriétés fondamentales. C'est ce que fait M. Loria dans le présent ouvrage, que nous signalons à l'attention de tous ceux qui enseignent la Géométrie descriptive.

Dans ce premier volume l'auteur examine successivement les différentes méthodes de projections de la Géométrie descriptive ; il les présente avec beaucoup de netteté, sans développements inutiles. Ce sont les méthodes de la projection orthogonale, d'après Monge, de la projection centrale, des

plans cotés et de l'axonométrie, ainsi que l'application à l'étude théorique des deux problèmes fondamentaux de la photogrammétrie.

Il y a là, sous une forme très restreinte, les notions essentielles que doit connaître l'étudiant dans les diverses parties de la Géométrie descriptive conçue au point de vue moderne. La méthode d'exposition est d'une belle clarté, il n'est guère besoin de le dire; elle fait intervenir non seulement la Géométrie élémentaire et l'homographie, mais aussi la Trigonométrie et la Géométrie analytique. L'auteur estime avec raison qu'on doit faire appel à toutes les connaissances mathématiques des étudiants.

H. Fehr.

A. Lanner. — **Neuere Darstellungen der Grundprobleme der reinen Mathematik im Bereiche der Mittelschule.** — 1 vol. in-8°; 122 p., 3 Mk.; O. Salle, Berlin.

L'auteur limite le domaine des mathématiques pures, dont il est question dans le titre, à l'Arithmétique et à l'Algèbre élémentaire. Il s'est proposé de faire un exposé théorique des notions fondamentales qui entrent ou qui devraient entrer dans les programmes de l'enseignement des écoles moyennes, en tenant compte de l'état actuel de la science et des méthodes d'enseignement. Le point de départ est constitué par la notion de nombre, puis viennent les opérations et les extensions successives de la notion de nombre. Il n'y a guère d'intérêt à énumérer les sujets traités, qui sont ceux qui se trouvent généralement dans la plupart des manuels. L'auteur s'arrête aux premières notions de dérivées et d'intégrales. Il traite en outre de l'analyse combinatoire et du calcul des probabilités. L'ordre suivi surprend parfois le lecteur, d'autant plus qu'il n'y a aucune division en chapitres. C'est une succession de paragraphes non numérotés et dont on ne donne pas même un aperçu d'ensemble par une table des matières ou une table alphabétique des sujets traités.

Abstraction faite de ces lacunes, l'ouvrage de M. Lanner donne un excellent aperçu des éléments d'Arithmétique et d'Algèbre dans leur développement historique et logique.

H. F.

Ed. Maillet. — **Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions.** — 1 vol. gr. in-8°, v-275 p.; 12 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

En réunissant en un volume les propriétés connues de la théorie des nombres transcendants, M. Maillet a rendu un grand service à la science. Les analystes lui sauront gré de ce travail pour lequel il était particulièrement qualifié.

On sait qu'on appelle nombres transcendants les nombres qui ne sont racines d'aucune opération algébrique à coefficients entiers. Les étudiants savent, par ouï-dire, que e et π sont transcendants, mais ils ignorent généralement la démontration. Il est vrai que la théorie des nombres transcendants est encore à ses débuts et que les propriétés connues n'ont guère encore pénétré dans l'enseignement et dans les traités.

Grâce au livre de M. Maillet, ces propriétés deviennent accessibles aux étudiants; elles peuvent être étudiées par tout licencié ès sciences mathématiques. Nous signalons ce livre tout particulièrement à ceux qui, attiré par les belles théories de l'Algèbre supérieure, sont à la recherche de quel-

que sujet de thèse. L'auteur en signale fréquemment au cours de son exposé (voir note p. 273), car c'est un domaine encore neuf.

Les questions traitées ont nécessairement de nombreux points de contact avec la théorie des fonctions entières. L'auteur en tient largement compte dans son exposé et dans l'index bibliographiques.

Voici la table des matières traitées :

I. Quelques propriétés des fractions continues, — II. Conditions suffisantes pour qu'un nombre soit transcendant; nombres de Liouville. — III. Propriétés arithmétiques des nombres de Liouville. — IV. Les nombres transcendants considérés comme racines de séries infinies ou de fractions continues. — V. Fonctions génératrices de nombres transcendants. — VI. Sur la classification des nombres irrationnels ou transcendants. — VII. Les fractions décimales et les fractions continues quasi-périodiques. — VIII. Quelques propriétés arithmétiques des racines des équations transcendantes. — IX. Transcendance de e et π; impossibilité de la quadrature du cercle. — X. Extension aux séries à coefficients rationnels des propriétés des polynomes à coefficients rationnels. — XI. Fonctions symétriques. — XII. Sur l'extension de la notion de divisibilité et de réductibilité aux fonctions entières. — Notes : I. sur la classification des fonctions entières. — II. Sur l'ordre des nombres de Liouville. — III. Sur les fonctions hypertranscendantes. — IV. Bibliographie. H. F.

J. Neuberg. — **Cours d'algèbre supérieure** ; nouvelle édition, revue et augmentée ; I vol. gr. in-8, 299 p. ; prix 7 fr. 50 ; Hermann, Paris ; E. Gnuse, Liège, 1907.

Cette nouvelle édition du cours de l'éminent professeur à l'Université de Liège réflète, comme la précédente, les qualités de clarté, d'ordre, de méthode qui caractérisent son enseignement et qui n'excluent ni la sagacité, ni l'esprit d'invention. Il y a introduit quelques modifications et additions suggérées par l'expérience de l'enseignement.

En dépit du titre, on ne doit pas s'attendre à trouver dans cet excellent livre le développement des sujets que nous classons aujourd'hui d'habitude sous cette dénomination « d'Algèbre supérieur. » C'est plutôt comme on va pouvoir s'en rendre compte, un cours d'Algèbre de mathématiques spéciales, pour parler le langage usité en France. Ceci, du reste, n'en diminue en rien la valeur ; ce n'est pas la nature des matières, mais bien le talent d'exposition qui fait le mérite d'un livre ; et aux critiques qui voudraient reprocher à l'auteur d'avoir traité de questions relativement élémentaires, nous serions en droit de répliquer qu'il reste en tous cas quelque chose de *supérieur*, et que c'est l'ouvrage lui-même.

Je ne sais du reste pourquoi l'on s'obstine à employer ces dénominations qui ne répondent à rien de précis et n'ont de sens que par comparaison. La science, dans toutes ses branches, forme une chaîne ininterrompue depuis les premiers éléments jusqu'aux plus hautes théories *actuelles ;* cette chaîne se prolonge sans limites, s'allonge indéfiniment par le jeu des découvertes nouvelles et de l'incessant progrès. Telle théorie appartenant aux plus hautes régions, actuellement, deviendra peut être classique un jour et tombera dans le domaine des éléments.

Quoiqu'il en soit, le cours publié par M. Neuberg s'occupe de questions dépassant les éléments et tout particulièrement de la théorie des équations. Il se divise en dix-neuf chapitres, dont il nous semble utile d'énumérer les titres :

Imaginaires. — Déterminants. — Equations linéaires. — Premiers éléments de la théorie des fonctions. — Principes sur les équations algébriques : — Transformation des équations ; limites des racines. — Théorème de Descartes. — Recherche des racines commensurables. — Des solutions communes à deux équations. — Théorie des racines égales. — Théorème de Rolle. — Théorème de Sturm. — Equations réciproques. — Equations binomes. — Equations du troisième degré et du quatrième degré. — Recherche des racines incommensurables. — Décomposition des fractions rationnelles. — Théorie des différences. — Fonctions symétriques.

Dix Notes complètent l'ouvrage ; elles sont intitulées :

Bibliographie. — Origines de l'Algèbre. — Développements successifs de l'Algèbre. — Sur la notion de fonction. — Sur les nombres complexes. — Sur les déterminants. — Sur les nombres irrationnels. — Sur la notion de limite. — Sur le théorème de d'Alembert. — Sur le calcul des différences.

La plupart de ces notes, très brèves, ont un caractère historique, et fournissent au lecteur des renseignements sommaires, mais précis, sur des points généralement inconnus des élèves, malgré l'intérêt qu'ils présentent.

A la suite de chaque chapitre, figurent quelques exercices habituellement peu nombreux, mais bien choisis, accompagnés souvent de quelques notes.

Ce qui caractérise essentiellement l'ouvrage de M. Neuberg, c'est que, sur chaque sujet traité, on trouve les développements vraiment nécessaires pour une étude sérieuse et une connaissance complète. Les digressions, les considérations latérales sont soigneusement évitées ; c'est une tentation à laquelle les auteurs ne savent pas toujours résister ; mais quand on s'y laisse aller, et qu'il s'agit d'un livre à l'usage des élèves, le résultat, pour ces derniers, est bien funeste : ils errent à l'aventure comme dans un labyrinthe mal éclairé, redoutant toujours de s'engager dans un sentier sans issue.

Ici, c'est tout le contraire : la route est bien jalonnée, et le guide est sûr. Ce livre sera précieux pour les étudiants de Belgique, mais il serait à désirer que les bons élèves, dans tous les pays, pussent le consulter et le lire. Ils y trouveraient une consolidation des connaissances qu'ils commencent à posséder, et ils en tireraient grand profit pour le perfectionnement de leur esprit mathématique. C. A. Laisant.

P. Rozé. — **Théorie et usage de la règle à calculs.** Règle des écoles, règle Mannheim. — 1 vol. gr. in-8, IV-118 p., 85 fig. et 1 pl. ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars. Paris.

La règle à calculs employée depuis plus d'un siècle, perfectionnée de façon remarquable en 1851 par le colonel Mannheim, alors sous-lieutenant à l'Ecole d'application de Metz, s'est répandue peu à peu et a servi de modèle pour la construction d'un grand nombre d'autres règles spécialement ordonnées en vue des diverses applications. Un dernier perfectionnement, relativement récent, dû au professeur Tserepachinsky, a permis de rattacher chaque opération à une règle unique et, par suite, de décharger la mémoire du calculateur, qui, après un exercice suffisant, peut effectuer les opérations machinalement, sans effort.

Cette modification permet en même temps d'obtenir tous les résultats de calculs arithmétiques avec une précision double pour des instruments de mêmes dimensions

Les instruments les plus répandus aujourd'hui sont : la règle Mannheim, telle qu'elle a été imaginée dès 1851 ; la règle des Ecoles et la règle Beghin qui comportent toutes deux la modification Tserepachinsky. Ce sont surtout ces deux types de règles que l'auteur examine dans ce petit volume.

D'une façon générale, il préconise avec grande raison l'usage de ces petits instruments qui permettent d'obtenir des résultats de calcul avec 3 ou 4 chiffres significatifs exacts, et cela, au prix d'un apprentissage de quelques semaines.

Le chapitre I[er] (progressions et logarithmes) contient un exposé rapide de la théorie des logarithmes, sous une forme géométrique, en vue de l'application aux échelles logarithmiques. Vient ensuite une description des dispositions Mannheim et Tserepachinsky ; cette dernière, appliquée à la règle des Ecoles, consiste dans un décalage des échelles supérieures, de la moitié de leur longueur. Les chiffres **1** (indicateurs) sont alors au milieu de la règle et de la réglette. Le chapitre se termine par de très utiles généralités sur la lecture des échelles.

Dans le chapitre II se trouve une description détaillée de la règle des Ecoles, que nous ne pouvons songer à analyser ici. La nouvelle disposition essentielle consiste dans un curseur muni de deux traits, qui peut glisser tout le long de la règle. De nombreux exemples sont donnés pour la pratique des diverses opérations.

Le chapitre III est consacré à la règle de Mannheim Il est spécialement intéressant de lire le dernier paragraphe (précision des résultats) en le rapprochant du paragraphe analogue du chapitre II.

Le chapitre IV se rapporte aux applications de la règle à calculs. Il débute par des considérations très justes sur la manière d'exécuter les calculs numériques, où l'auteur a eu l'heureuse idée d'introduire une page de Lagrange, assurément trop oubliée aujourd'hui. Les applications indiquées sont relatives à l'Arithmétique, la Géométrie, la Trigonométrie, l'Astronomie, la Mécanique et la Physique.

Enfin, dans le dernier chapitre (choix et construction d'une règle) l'auteur donne brièvement quelques indications pratiques fort utiles.

Nous ne saurions assez conseiller la lecture du petit volume de M. Rozé, — et surtout la pratique de la règle à calculs — à toutes les personnes qui se trouvent appelées à faire de la mathématique appliquée.

C.-A. Laisant.

E. Vessiot. — **Leçons de Géométrie supérieure** professées en 1905-1906 à l'Université de Lyon, rédigées par M. Anzemberger. — 1 vol. in-4°, autographié, 322 p. ; 12 fr. ; Imprimeries réunies, Lyon ; Librairie Hermann, Paris.

Ces *Leçons* s'adressent aux étudiants qui désirent s'initier à la géométrie supérieure ; elles leur fournissent une excellente préparation à l'étude des ouvrages sur la théorie des surfaces et des mémoires originaux. L'auteur reprend les notions les plus importantes de la théorie des courbes gauches et des surfaces et met en évidence le rôle fondamental que jouent les formules de Frenet et les deux formes quadratiques différentielles de Gauss.

L'étude des systèmes de droites et de leur application à la théorie des surfaces forme l'objet principal de l'ouvrage. Elle est présentée sous la forme la plus analytique avec discussion approfondie des résultats. L'ou-

vrage se termine par un très intéressant exposé des systèmes de sphères et des systèmes cycliques de Ribaucour.

Voici les titres des treize chapitres que renferme cet ouvrage :

Revision des points essentiels de la théorie des courbes gauches et des surfaces développables. — Surfaces. — Etude des éléments fondamentaux des courbes d'une surface. — Les six invariants. La courbure totale. Surfaces réglées. — Congruences de droites. — Congruences de normales. — Les congruences de droites et les correspondances entre deux surfaces. — Complexes de droites. — Complexes linéaires. — Transformations dualistiques. Transformation de Sophus Lie. — Systèmes triples orthogonaux. — Congruences de sphères et systèmes cycliques. — Exercices. H. F.

H. Weber u. J. Wellstein. — **Encyklopädie der Elementar-Mathematik.** Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. III. *Angewandte Elementar-Mathematik.* — 1 vol. relié, 666 p.; 14 Mk.; B.-G. Teubner. Leipzig.

On sait que le premier volume de ce traité est consacré à l'arithmétique et à l'algèbre, tandis que le second donne un exposé très remarquable des méthodes et propriétés essentielles qui forment la Géométrie élémentaire. Ce dernier volume apporte des applications des éléments d'Algèbre et de Géométrie à quelques-uns des domaines des mathématiques appliquées. Les auteurs n'ont pas cherché à être complets, car il s'agit d'un traité plutôt que d'une encyclopédie au sens habituel du terme. Mais les chapitres qu'ils ont abordés sont approfondis et exposés d'une façon remarquable. Nous n'en ferons pas l'énumération, nous nous bornerons à indiquer les cinq sections dont se compose l'ouvrage : I. *Mécanique ;* géométrie vectorielle ; statique analytique ; dynamique. — II. *Lignes de forces électriques et magnétiques ;* électricité et magnétisme ; électromagnétisme. — III. *Calcul des probabilités ;* méthode des moindres carrés. — *Méthodes graphiques* ; projections sur un plan, sur deux plans ; statique graphique et applications.

Les auteurs se sont limités à ces quelques domaines, très importants il est vrai. Ils ont tenu principalement à montrer la façon dont les mathématiques interviennent dans les applications et, à ce point de vue, leur exposé, toujours précis et clair, est très suggestif pour l'étudiant comme pour le maître. La portée de l'ouvrage serait encore plus grande si, comme on le demande chaque jour davantage dans l'enseignement, les auteurs avaient fait une place, dans le premier volume, aux notions fondamentales si importantes de dérivée et d'intégrale. H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par MITTAG-LEFLER, T. XXXI, Stockholm. Fasc. 1. — H. POINCARÉ : Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. — L. SCHLESINGER : Sur la solution du problème de Riemann. — Ed. HUSSON : Sur un théorème de M. Poincaré relativement au mouvement d'un solide pesant.

Annals of Mathematics, published under the Auspices of Harvard University. Second Séries, vol. VIII, 1906-1907. Cambridge, Mass. E. U.

Nos 3 et 4. — G. A. Miller : Note on the use of group theory in elementary Trigonometry. — M. B. White : The asymptotic Lines on the Anchor ring. — R. Curtiss : On certains theorems of mean value for analytic functions of a complex variable. — Ch. A. SCOTT : Note on Regular Polygons. — E. B. Wilson : The revolution of a dark particle about a luminous centre. — CARMICHAEL : Multiply perfect numbers of four different primes. — STEPHENS : On a system of parastroids. — HEDRICK : A peculiar example in minima of surfaces. — LEHMER : On maximum and minimum values of the modulus of a binomial. — SINCLAIR : On the minimum surface of revolution in the case of one variable End-point. — B. PORTER : On the polynomial convergents of a Power series.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCCIV, Rendiconti. Vol. XVI. Janvier-Juin 1907. Rome.

PINCHERLE : Sopra l'estensione agli sviluppi assintotici di un teorema del sig. HURWITZ. — P. PIZZETTI: Paragone fra due triangoli geodetici a lati uguali. — E. ALMANSI : Sulle equazioni dell'elasticità. — E. ALMANSI : Sopra una classe particolare di deformazioni e spostamenti polidromi dei solidi cilindrici. — P. DUHEM : LEONARDO DA VINCI. — V. CERRUTI : Commemorazione del prof, E. CESARO. — Henri LEBESGUE : Encore une observation sur les fonctions dérivées. — P. PIZZETTI : Paragone fra gli angoli di due triangoli geodetici di eguali lati. — G. FUBINI : Il problema di DIRICHLET considerato come limite di un ordinario problema di minimo. — G. FUBINI : Di alcuni nuovi problemi, ai quali è applicabile il principio di DIRICHLET. — S. MEDICI : Sopra una questione di minimo, che si riconette col problema di DIRICHLET. — Th. DE DONDER : Sur les formes différentielles m-linéaires. — Henri LEBESGUE : Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration. — L. DE MARCHI: Teoria elastica delle dislocazioni tectoniche. — F. ENRIQUES e F. SEVERI : Intorno alle superficie iperellittiche. — P. PIZZETTI : Corollari del teorema relativo al paragone fra due triangoli geodetici di uguali lati. — G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS : Sopra le superficie algebriche che

hanno le coordinate del punto generico esprimibili con funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di du parametri. — Michele Cipolla : Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie. — G. Fubini : Sugli integrali multipli. — Luigi Bianchi : Sulle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche. — Luigi Berzolari : Sopra la configurazione di Kummer e il suo intervento nella teoria delle cubiche gobbe. — R. Marcolongo : La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-matematica. — Giuseppe Picciati : Sull'equazione della propagazione del calore in un filo. — E. Almansi : Un teorema sulle deformazioni elastiche dei solidi isotropi. — Luigi De Marchi : La teoria elastica dell'isostasi terrestre. — Eugenio-Elia Levi : Sulle equazioni lineari alle derivate parziali totalmente ellittiche. — Luciano Orlando : Sopra alcuni problemi di aerodinamica. — Giuseppe Picciati : Sul moto di una sfera in un liquido viscoso. — C. Rosati : Un'osservazione sugli inviluppi dei sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica.

Bulletin of the American Mathematical Society. New-York. Vol. XIII.

Nos 7 à 10 (avril-juillet, 1907). — G. A. Bliss : The construction of a Field of extremals about a given Point. — W. R. Longley : Some particular solutions in the problem of n bodies. — Arth. Ranum : On the matrices of Period a power of p is Jordan's linear congruence groups, modulo p^{α}. — D. C. Gillespie : On the construction of an integral of Lagrange's Equations in the calculus of variations. — E. R Hedrick : On a Final Form of the Theorem of Uniform Continuity. — G. A. Miller : The Groups Generated by three Operators Each of Which is the Product of the Other Two. — R. D. Carmichael : A Table of Multiply Perfect Numbers. — L. E. Dickson : The Symmetric Group on Eight Letters and the Senary First Hypoabelian Group. — J. Edmund Wright : Double Points of Unicursal Curves. — David-Eugène Smith : The Mathematical Tablets of Nippur. — H. S. White : Osgood's Theory of Functions. — R. E. Allardice : On a Limit of the Roots of an Equation that is Independent of All but Two of the Cofficients. — Paul Saurel : On the Distance from a Point to a Surface. — Wm. F. Osgood : The Calculus in our Colleges and Technical Schools (Presidential Adress). — L. E. Dickson : Modular Theory of Group Characters. — Joseph Lipke : On the Shortest Distance Between Consecutive Straight Lines. — G. A. Miller : Note on the Commutator of two Operators. — D. N. Lehmer : A Theorem in the Theory of Numbers. — Cleveland Abbe : Projections of the Globe Appropriate for Laboratory Methods of Studying the General Circulation of the Atmosphere.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, publiés par les secrétaires perpétuels. Gauthier-Villars, Paris. Tome 144. 1907.

21 mai. — Hadamard : Sur la variation des intégrales doubles. — Carton : Sur les groupes de transformations continus. — Barré : Sur les surfaces engendrées par une hélice circulaire.

27 mai. — E. Fischer : Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne.

3 juin. — C. Carathéodory : Sur quelques applications du théorème de Landau-Picard. — E. Goursat : Sur les invariants intégraux. — Loewy et Puiseux : Sur les origines des accidents du sol lunaire.

10 juin. — G. Tzitzéica : Sur une nouvelle classe de surfaces.

17 juin. — W. Stekloff : Sur le développement d'une fonction arbitraire en série infinies. — Barré : Sur les surfaces engendrées par une hélice circulaire. — L. Pilloux : Sur l'intégration de l'hodographe.

24 juin. — Fr. Riesz : Sur une espèce de Géométrie analytique du système de fonctions sommables. — A Korn : Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm. — M. Fréchet : Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires.

1er Juillet. — G. Humbert : Quelques formules relatives aux nombres de classes des formes quadratiques. — P. Boutroux : Sur les intégrales de l'équation différentielle $y' + Ay^2 + By^3 = 0$. — Eug. Fabry : Courbes algébriques à torsion constante.

8 juillet. — A. Danjoy : Sur les fonctions entières de genre fini.

16 juillet. — Caratheodory et Féjer : Remarques sur le théorème de Jensen. — Barré : Sur les surfaces engendrées par une hélice circulaire. — Gonnessiat et Fayet : Sur la méthode de M. Loewy pour l'étude des cercles divisés. — A. Korn : Sur un théorème fondamental de la théorie de l'élasticité.

29 juillet. — H. Bourget : Sur un point de la théorie du Soleil de M. Julius. — De Séguier : Sur les représentations linéaires homogènes des groupes finis. — Chazy : Sur les équations différentielles de 3e ordre à points critiques fixes. — Garnier : Sur les équations différentielles du 3e ordre dont l'intégrale est uniforme. — J. Massau : Sur la représentation des opérations entières de degrés quelconques.

5 août. — H. Poincaré : Rapport présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'équateur.

12 août. — G. Remoundos : Sur les courbes intégrales des équations différentielles. — A. Tchernychewsky : Les choix ; combinaisons générales.

19 août. — Levi-Civita : Sur le mouvement de l'électricité sans liaisons ni force extérieure.

26 août. — L. Fejer : Sur les racines de moindre module d'une équation algébrique.

7 octobre. — M. Riesz : Sur les séries trigonométriques.

14 octobre. — A. Buhl : Sur la sommabilité des séries de Laurent. — Et. Delassus : Sur les invariants des systèmes différentiels. — T. Boggio : Un théorème sur les équations intégrales.

21 octobre. — G. Humbert : Quelques formules relatives aux minima des classes de formes quadratiques binéaires et positives, — G. Goursat : Sur les équations intégrales. — P. Boutroux : Sur les intégrales de l'équation différentielle $y' + Ay^2 + By^3 = 0$.

28 octobre. — P. Boutroux : Sur les points critiques transcendants et sur les fonctions inverses des fonctions entières.

11 novembre. — Ed. Maillet : Sur les fractions continues algébriques. — A. Myller : Sur les solutions périodiques de l'équation $\Delta u + \alpha(x, y, z)u = 0$.

25 novembre. — Lalesco : Sur l'ordre de la fonction entière $D(\lambda)$ de Fredholm. — Byron Heywood : Sur quelques points de la théorie des fonctions fondamentales relatives à certaines équations intégrales. — Montel : Sur les points irréguliers des séries convergentes de fonctions analytiques. — H. Dulac : Sur quelques propriétés des intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle.

2 déc. — Séance publique annuelle ; proclamation de la liste des prix décernés (v. Chronique, p. 71-74 de ce fascicule).

9 déc. Tzitzéica : Sur certaines surfaces réglées. — A. Buhl : Sur la permu-

tation des intégrales d'un système d'équations différentielles. — Lalesco : Sur la fonction D(λ) de Fredholm. — Riquier : Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. — Eug. et Fr. Cosserat : Sur la mécanique générale.

16 déc. — Egoroff : Sur la transformation de Laplace et les systèmes conjugués persistants. — De Seguier : Sur la théorie des matrices. — Chazy : Sur les équations différentielles de troisième ordre ; points critiques fixes. — Saltykow : Sur les transformations infinitésimales et les fonctions adjointes.

30 déc. — E. Wælsch : Sur les invariants différentiels vectoriels et la théorie des formes binaires. — Holmgren : Sur l'équation $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dz}{dy}$. — E. Cartan : Sur la définition de l'aire d'une portion de surface courbe. — P. Boutroux : Sur les fonctions inverses des fonctions entières. — Eug. et Fr. Cosserat : Sur la statique de la ligne déformable. — Edm. Maillet : Sur la décomposition d'un nombre en une somme de puissances huitièmes d'entiers. — H. Andoyer : Sur la théorie de la lune. — Guillot : Tables d'Uranus et de Neptune.

Giornale di Matematiche di Battaglini, dirigé par A. Capelli. — Pellerano, Naples.

Volume XLV, Janvier-Août 1907. — E. Jürgens : Il concetto della multiplicità continua n volte infinita. — F. Giudice : Sulla dimostrazione di Clifford del teorema fondamentale d'algebra. — Pietro Mercatanti : Superficie sovrapponibili alle proprie parallele. — Silvio Minetola : Sopra alcune proprietà delle operazioni di polare. — G. Pirondini : Contributo alla teoria delle caustiche ed anticaustiche. — Luigi Galvani : Un algoritmo applicabile ad alcune serie e sua relazione coi numeri transfiniti. — F. Amodeo : Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nell'evo antico. — Cesare Spelta : Sul moto di una figura rigida piana nel proprio piano. — M. Lerch : Sur une série qui se présente dans la théorie du logarithme intégral. — H. B. Newson : Copia di una Lettera al prof. Ugo Amaldi. — H. B. Newson : Types and Continuous Groups of Real Conformal Transformations in S. — Felice Ceramicola : La proprietà associativa nelle serie. — Isabella Crespi : Sulle funzioni armoniche di tre variabili a due periodi. — Umb. Scarpis : Esposizione elementare della teoria del campo di Galois. — Um. Bini : Sulle rappresentazioni di una superficie sopra un'altra. — P. Medolaghi : Intorno al calcolo formale delle probabilità. — Cesare Bianca : Sull'integrazione della equazione. — F. Amodeo : Nuovo elenco delle opere di Giuseppe Battaglini con cenni riassuntivi.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard, 4e série. Gauthier-Villars, Paris.

T. VII, avril-septembre 1907. — T. Lalesco : Sur la composition des formes quadratiques. — A. Hilaire : Démonstration d'un théorème attribué à Leibniz. — R. B. : Note sur l'article précédent. — A. Pellet : Sur la sphère pédale et le cercle pédal. — G. Fontené : Sur le théorème de Feuerbach. — Georges Remoundos : Sur les forces centrales multiformes. — A. Laureaux : Divisions homographiques sur une conique. — Ch. Méray : Sur la divisibilité des polynomes entiers à plusieurs variables. — M. Fouché : Démonstration géométrique du théorème de Dupin relatif aux systèmes

de trois surfaces qui se coupent orthogonalement. — H. Padé : Sur la réduction en fraction continue canonique de la fonction $e^x x^{-a} \int_x^\infty e^{-z} z^{a-1} dz$. — Lucien Godeaux : Sur une surface remarquable du quatrième ordre. — E. Mathy : Potentiel d'une couronne circulaire électrique de largeur infiniment mince et de densité superficielle égale à l'unité. — E. Mathy : Décomposition en éléments simples de la fonction doublement périodique de seconde espèce ayant un infini d'ordre n. Formation des coefficients. — Solution par M. Jean Servais : Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique en 1907. Composition d'Algèbre et de Trigonométrie. — Solution par M. Philbert du Plessis : Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique en 1907. Composition de Géométrie analytique et mécanique. — Ch. Michel : Sur un classe de quartiques gauches unicursales. — Amsler : Sur les propriétés d'addition d'une suite récurrente considérée par D. Bernoulli. — Farid Boulad : Sur la résolution graphique des équations linéaires. — Farid Boulad : Les polygones corrélatifs des funiculaires et leurs applications. — R. Alezais : Sur le calcul d'une fonction analytique dont on connaît la partie réelle. — J. Juhel-Rénoy : Sur un problème de Mécanique. — Lucien Godeaux : Sur une extension à l'espace d'un théorème de Grassmann. — Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1907 (Mathématiques élémentaires) ; solution par un anonyme. — Solution par M. Jean Servais : Concours d'admission à l'Ecole normale supérieure en 1907 (première composition de Mathématiques). — Solution par M. Jean Servais : Concours d'admission à l'Ecole normale supérieure en 1907 (deuxième composition de Mathématiques), — Certificats de calcul différentiel et intégral. — Variétés (Association scientifique internationale espérantiste). — Correspondance. — Bibliographie. — Certificats de Mécanique rationnelle. — Certificats de Mathématiques générales. — Solutions de questions proposées.

Prace matematyczno-Fizyczne, dirigé par S. Dickstein. T. XVIII. Varsovie.

W. Sierpinski : Sur la sommation d'une série. — A. Denizot : Contribution à la théorie de la perspective axonométrique. — G. Mittag-Leffler : Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. — Zorawski : Notizen aus dem Gebiete der Differentialgeometrie. — G.-A. Miller : On the groups generated by two operators of order three whose product is of order four.

Proceedings of the London Mathematical Society. Série 2, vol. 5, fasc. 1-4.

Harold Hilton : On Sub-groups of a Finite Abelian Group.— J.-E. Campbell : On Bäcklund's Transformation and the Partial Differential Equation $s = F(x, y, z)$. — P.-A. MacMahon : The Diophantine Equation $x^n - Ny_n = z$. — E.-W. Barnes : The Asymptotic Expansion of Integral Functions defined by Generalised Hypergeometric Series. — A.-R. Forsyth : Partial Differential Equations of the Second Order having Integral Systems free from Partial Quadratures. — P.-W. Wood : On the Reducibility of Covariants of Binary Quantics of Infinite Order. — G.-H. Hardy : On the Singularities of Functions defined by Taylor's Series *(Remarks in addition to a former Paper)*. — J. Mercer : On the Limits of Real Variants. — E.-W. Hobson : On Partial Differential Coefficients and on Repeated Limits in general. — Allan Cunningham, R. E. : On Hyper-even Numbers and on Fermat Numbers. — E.-W. Hobson : On the Uniform Convergence of Fourier's Series. — E.-B.

ELLIOT : On the Projective Geometry of a Binary Quartic and its Hessian. — L.-E. DICKSON : Invariants of the General Form Modulo 2.

Rendiconti del Circolo Matematica di Palermo, Direttore G.-B. GUCCIA : Tome XXIII, fasc. 1 et 2. (1er semestre 1907). — T. LEVI-CIVITA : Scie eleggi di resistenza. — Ernesto PASCAL : Su di una generalizzazione delle forme differenziali e dei sistemi covarianti del calcolo differenziale assoluto. Niels NIELSEN : Sur la généralisation d'une formule de Dirichlet. — Guido FUBINI : Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali d'ordine pari. — P. PIZZETTI : Sulla questione della più conveniente lunghezza dei lati nelle triangolazioni geodetiche.— Edm. LANDAU : Über die Darstellung einer ganzen Zahls als Summe von Biquadraten. — J.-W. YOUNG : On a Class of Discontinuous ζ-Groups Defined by Normal Curves of the Fourth Order in a Space of Four Dimensions. — Carl RODENBERG : Geodätische Linien auf Polyederflächen (Mit einem Anhang über das Verhalten der Geodätischen in einem vielfachen Punkte einer krummen Fläche). — Edm. LANDAU : Der Integrallogarithmus und die Zahlentheorie (Bemerkungen zu dem Gleichnamigen § 39 in Herrn Nielsen's *Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten)*. — Alfredo CAPELLI : Sulla matrice di Sylvester per la risultante di due funzioni intere. — G. VITALI : Sull'integrazione per serie. — Adolfo VITERBI : Sullo sviluppo di alcune speciali funzioni di una variabile in serie di funzioni sferiche. — J. LÜROTH : Zur Transformation der Koordinaten in Räumen konstanter Krümmung. — U. SBRANA : Le congruenze W con superficie media piana. — Henri POINCARÉ : Les fonctions de deux variables et la représentation conforme, — Val. CERRUTI : *Ernesto Cesàro ;* Commemorazione. — U. AMALDI : Sui complessi di rette, che ammettono un gruppo continuo proiettivo. — Arnold EMCH : The Configurations of the Points of Inflexion of a Plane Cubic and their Harmonic Polars. — P. PIZZETTI : Confronto fra gli angoli di due triangoli geodetici di eguali lati.

Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft — Fünfter Jahrgang 1906. — 1 vol. in-8° ; Teubner, Leipzig.

DENIZOT : Ueber das Foucaultsche Pendel. — FLECK : Ueber die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen. — FUCHS : Ueber lineare homogene Differentialgleichungen dritter Ordnung mit nur wesentlich singulären Stellen. — GÜNTSCHE : Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie. — HAENTZSCHEL : Ueber die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen. — HESSENBERG : Ueber die Projektion des räumlichen Punktgitters. — JOLLES : Die Grundzüge der Fokaltheorie linearer Strahlenkongruenzen. — KOEBE : Untersuchung der birationalen Transformationen, durch welche ein algebraisches Gebilde vom Range Eins in sich selbst übergeht, in bezug auf ihr Verhalten bei der Iteration — KOPPE : Die Kongruenz $x^\lambda \equiv x$ (mod. 10^n). — LAMPE : Ueber angenäherte Winkelteilungen mit Zirkel und Lineal. — MEISSNER : Ueber systematische Fehler bei Zehntelschätzungen. — ROTHE : Ueber die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz. — SCHAFHEITLIN : Die Lage der Nullstellen der Besselschen Funktionen zweiter Art. — SKUTSCH : Ein Apparat zur Demonstrationen des astatischen Gleichgewichts in der Ebene.— ZÜHLKE : Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, Wien. — Math.-Naturw. Klasse. CXV. Band, 1906. — Gerold's Sohn, Vienne.

Daublebsky v. Sterneck : Ueber die scheinbare Form des Himmelsgewölbes und die scheinbare Grösse der Gestirne. — Dolezal : Das Problem der sechs Strahlen oder der sieben Punkte in der Photogrammetrie. — T. u. P. Ehrenfest : Bemerkung zur Theorie der Entropie zunahme in der « statistischen Mechanik » von M. Gibbs. — Hasenöhrl : Zur Ableitung des mathem. Ausdruckes des zweiten Hauptsatzes. — Landau : Ueber den Zusammenhang einiger neuerer Sätze der analytischen Zahlentheorie. — Mertens : *a)* Ueber die Gestalt der Wurzeln einer Klasse auflösbarer Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist. *b)* Ueber komplexe Einheiten. *c)* Ueber die Darstellung der Legendre'schen Symbole der biquadratischen, kubischen u. bikubischen Reste durch Thetareihen. — E. Pick : *a)* Natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen. *b)* Ueber nirgends singuläre lineare Differentialgleichungen. — A. Prey : Konvergenzuntersuchungen zum Gesetze der Amplitudenabnahme bei Pendelbeobachtungen. — Th. Schmidt : Ueber kubische Aufgaben u. die Konstruktive Behandlung des Achsen komplexes. — Schrutka v. Rechtenstamm : Ueber die Auflösung linearer Quaternionengleichungen. — Stibitz : Ein zum Normalenproblem der Ellipse gehöriger Satz u. dessen konstrüktive Verwendung. — Tietze : Zur Analysis situs mehr dimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. — 54. Band, 1907, B.-G. Teubner, Leipzig,

Nos 1 et 2. — Wlassoff : Polarograph u. Konikograph. — Mehmke : Bemerkungen zu dem vorstehenden Aufsatz. — Eduard Dolezal : Das Grundproblem der Photogrammetrie, seine rechnerische und graphische Lösung nebst Fehleruntersuchungen. — A. Kalähne : Über die Wurzeln einiger Zylinderfunktionen und gewisser aus ihnen gebildeter Gleichungen. — F. Dingeldey : Konstruktion des Krümmungsradius bei Kurven mit der Gleichung $y = cx^n$ (polytropischen Kurven). — F. Schiffner : Bemerkungen zu der sogenannten Petzval-Bedingung der photographischen Optik. — R. Müller : Über die Momentanbewegung eines starren ebenen Systems. — A. Sommerfeld : Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen. — Anton Grünwald : Darstellung der Mannheim-Darboux'schen Umschwungsbewegung eines starren Körpers.

Nos 3 et 4. — E. Stübler : Der Impuls bei der Bewegung eines starren Körpers. — C. Runge und L. Prandtl : Das Institut für angewandte Mathematik und Mechanik — Friedrich Schilling : Die Bewegung in der Ebene als Berührungstransformation. — A. Sommerfeld : Nachtrag und Berichtigung zu der Abhandlung : Ueber die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen. — W. Laska et Fr. Ulkowski : Sur la Nomographie. — P. Bohl : Ueber ein Dreikörperproblem. — P. Debye : Wirbelströme in Stäben von rechteckigem Querschnitt. — Karl Fuchs : Ein Näherungsverfahren in der Methode der kleinsten Quadrate. — Kleinere Mitteilungen.

Zeitschrift für mathematischen u. naturw. Unterricht, herausgegeben von Dr H. Schotten. — 38. Jahrgang, 1907 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Nos 1 à 5. — Ph. Weinmeister : Unendlichkeitsrechnung in der Schule. — Ernst Kullrich : Bemerkungen über die Figuren des mathematischen Schulunterrichts. — K. Hagge : Zur Theorie der einem Dreieck eingeschrie-

benen Kreise. — Louis Saalschütz : Zur Potenzentwicklung endlicher oder unendlicher Produkte. — Ernst Eckhardt : Neue Sätze vom Kreisviereck und beliebigen Viereck und einfache Bestimmung des Inhalts. — Friedrich Hopfner : Direkte Achsenbestimmung des Schnittes einer Ebene mit Kegel- und Zylinderflächen auf elementarem Wege. — K. Hagge : Der Fuhrmannsche Kreis und der Brocardsche Kreis als Sonderfälle eines allgemeineren Kreises. — Milan Zdelar : Bestimmung der Permutationsform von gegebener Rangzahl Q für den Fall : $r = O$. — K. Hagge : Die Berührungsaufgabe des Apollonius. — Kleinere Mitteilungen. — Literarische Berichte.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser. — XXXII Jahrg. 1907 ; Alfr. Hölder, Wien.

N° 5. — R. Suppantschitsch : Die Aequipollenzen des Bellavitis u. komplexe Grössen.

N° 6. — Adr. Achitsch : Eine Bemerkung zum Sinusintegral.

N° 7. — J. Frischauf : Zum Rechnen mit unvollständigen Zahlen.

N° 8. — J. Liska : Inhalt eines Pyramidenstuzes. — Adr. Achitsch : Zur Auflösuug der Gleichung $m \cos \alpha + n \sin \alpha = p$.

N° 9. — J. Pollak : Zur Proportionalität am Kreise. — P. Ernst : Synthetischer Beweis einiger Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreises.

2. Livres nouveaux :

Klein, Wendland, Brandl u. Harnack. — **Universität und Schule.** Vorträge gehalten auf der Versammlung Deutscher Philologen u. Schulmänner am 25 September 1907 zu Basel. Mit einem Anhange : Vorschläge der Unterrichts-Kommission der Ges. Deutscher Naturf. u. Aerzte betreffend die wissenschaftl. Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik u. Naturwissenschaften. — 1 broch. 88 p. in-8° ; M. 50 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

G. Bertrand. — **Sur une fonction déduite de la fonction O de M. Appell.** Ses rapports avec la fonction σ *(Thèse)*. — 1 broch. p. in-8°, 36 p. ; Imprimerie Kündig et Fils, Genève.

G. Matisse. — **Le principe de la conservation de l'assise et ses applications.** — 1 vol. in-8°, 65 p. ; 2 fr. 50 ; Librairie Hermann, Paris.

A. Morgenstern. — **Beiträge zur numerischen Lösung der Gleichungen fünfters Grades** *(Thèse)*. — 1 broch. p. in-8°, 44 p. ; Halle a. S.

E. Mougin. — **Nouvelles tables de logarithmes** à l'usage des écoles. — 1 broch. in-4° : 1 fr. 50 ; chez l'auteur, professeur au Lycée de Roanne (Loire).

J. H. Peek. — **La formule $\rho = ne^{i(\varphi + i\psi)}$ interprètée géométriquement dans l'espace** de manière à prendre la forme d'un quaternion. — 1 fasc. in-8°, 24 p. ; H. Eisendrath, Amsterdam.

M. Stuyvaert. — **Cinq études de Géométrie analytique.** — Applications diverses de la théorie des matrices et de l'éliminatiòn. — 1 vol. in-8°, 230 p. ; 6 fr. ; van Goethem, Gand.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française publiée sous la direction de J. Molk. — Tome I ; deuxième volume ; premier fascicule : Les fonctions rationnelles ; exposé, d'après l'article allemand de E. Netto (Giessen) par R. Le Vavasseur (Lyon). — 1 fasc. de 232 p. in-8° ; Teubner, Leipzig ; Gauthier-Villars, Paris.

LA SPHÉRIQUE NON-EUCLIDIENNE

Chacun sait aujourd'hui, comme faisant partie des connaissances générales issues de la création de la Géométrie non-euclidienne, que la Trigonométrie sphérique est entièrement indépendante du postulat des parallèles. Nous nous étonnons qu'on se soit attardé à donner une preuve de ce qui nous est maintenant si évident.

Néanmoins, le paragraphe le plus difficile dans toutes les *Recherches géométriques sur la Théorie des Parallèles*, de Lobatchefski, est-il peut-être le n° 35 qui conclut ainsi : Donc la Trigonométrie sphérique est indépendante de ce que, dans un triangle rectiligne, la somme des trois angles est ou n'est pas égale à deux angles droits. »

C'est ainsi que se termine de même le chapitre XI de ses *Nouveaux Eléments* : « Par conséquent, les équations des triangles sphériques demeurent les mêmes, que l'angle de parallélisme soit supposé constant ou variable. » Dans le paragraphe 26 de la *Science absolue de l'Espace* de Bolyai, la Trigonométrie sphérique est établie indépendamment du postulat des parallèles.

Dans son espace non-euclidien, Bolyai a trouvé une surface uniforme F dont la Géométrie propre est euclidienne ; sa droite, (ou géodésique) est le cercle limite L. Lobatchefski a trouvé la même surface, et donné à F le nom d'horisphère, à L celui d'horicycle.

Mais, pour si profond que fût leur génie, ils n'ont jamais mis en doute cette assertion, que trois points collinéaires étant donnés, un et un seul est toujours compris entre les deux autres. Comme conséquence, la droite était pour eux d'essence non fermée, et de longueur infinie. Ainsi, ils ne placèrent pas la Géométrie caractéristique de la sphère au

même rang que celle de l'horisphère, et la Géométrie non-euclidienne de l'espace fini demeura insoupçonnée d'eux.

Ni l'un ni l'autre n'eut la conception que l'espace entier pouvait être fini; le cercle limite, de longueur infinie, était bien considéré par eux comme la droite de l'horisphère, mais le grand cercle fini ne leur apparaissait pas comme la droite de la sphère.

Il était réservé à Riemann d'émettre cette idée que la ligne droite, quoique illimitée, pouvait bien n'être pas nécessairement infinie, et il en est résulté une nouvelle Géométrie non-euclidienne, à laquelle nous donnons aujourd'hui son nom.

Beltrami a montré que dans l'espace euclidien il peut exister une surface dont une partie est capable de représenter une partie du plan de Bolyai : c'est la surface à courbure négative constante, la *pseudosphère*. A la vérité, il est impossible de représenter le plan entier de Bolyai au moyen d'une surface de Beltrami privée de points singuliers; néanmoins, en désignant sous le nom de pseudosphères les surfaces de révolution qui ont pour méridienne une tractrice, ou courbe des tangentes égales, nous pouvons dire que leur Géométrie caractéristique est bolyaienne.

Récemment, cette manière de voir a été confirmée et complétée par le beau *Théorème de Barbarin : Chacun des trois espaces euclidien, bolyaien, riemannien renferme des surfaces à courbure constante dont les lignes géodésiques ont les propriétés métriques des droites des trois espaces.* Ces surfaces sont :

1° Les canaux ou surfaces équidistantes d'une droite; quand l'équidistance devient infinie, ils se transforment en horisphères : (Géométrie caractéristique, euclidienne).

2° les pseudosphères, (Géométrie caractéristique, bolyaienne.)

3° les sphères (Géométrie caractéristique, riemannienne).

En 1879, Killing a rendu claire la distinction entre l'espace riemannien et ce qu'il a appelé alors sa forme polaire, aussi désignée pas Klein sous le nom d'*espace simplement elliptique*. Cette forme, pense Killing, a entièrement échappé

à Riemann, comme elle avait aussi échappé à Helmholtz, on le sait, lorsque, aux environs de 1876, il reproduisait encore ce vieux mais inexact théorème que, dans un espace à courbure positive constante, deux lignes géodésiques qui se rencontrent généralement doivent nécessairement avoir deux points communs. Klein appelle *sphérique* un espace à courbure positive qui jouit de cette propriété pour le distinguer, par opposition, de l'espace simplement elliptique, dans lequel le postulat de détermination de la droite par deux points ne souffre aucune exception.

Killing est aussi le premier qui a montré que, en outre des espaces euclidien, bolyaien et simplement elliptique, l'espace sphérique ou anciennement riemannien est le seul qui puisse dans son entier se mouvoir librement sur lui-même. Il y a en abondance des exemples où la libre mobilité des figures n'a lieu qu'autant que les dimensions de ces figures ne dépassent pas un certain degré ; il y a des séries d'espaces topologiquement discernables et qui en des parties limitées ou simplement connexes sont euclidiens, bolyaiens, simplement elliptiques. D'ailleurs il est prouvé aujourd'hui, en ce qui concerne les surfaces à courbure positive constante, auxquelles la Géométrie riemannienne s'applique, qu'à part la sphère, il n'existe pas d'autre surface fermée de cette sorte. La sphère est la seule surface fermée, à courbure positive constante, et exempte de singularités[1].

Tout cela accuse avec une grande intensité l'importance de l'étude de la surface sphérique : Sphérique à deux dimensions, Sphérique pure, Sphérique intrinsèque, Sphérique riemannienne, Sphérique doublement elliptique, Sphérique non-euclidienne. Heureusement, même dans l'éducation générale, une place a été réservée à ce nouveau personnage. Tous les théorèmes de ce qu'on nomme la « Géométrie solide » des Ecoles ayant trait seulement à la surface de la sphère, tous ceux que l'on obtient par l'usage du postulat des parallèles en tirant des lignes à travers le globe qui.

---

[1] Voir par exemple Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, p. 172-175 ; Liebmann, *Eine neue Eigenschaft der Kugel*, (Gött. Nachrichten) 1899, p. 44-54 ; Lütkemeyer, *Ueber den analytischen Charakter der Integrale*, Gött., 1902 ; Holmgren, *Sur les surfaces à courbure constante*. Comptes rendus, 1902, p. 840-843.

dans la Géométrie euclidienne, est à l'intérieur de la sphère. considérée en fait comme la couverture de ce globe, et par conséquent comme entité géométrique à trois dimensions, étendue d'une infinité de manières dans trois directions, tous ces théorèmes, dis-je, ne sont en réalité que des propositions se rapportant à cet être plus simple et diversement fini qu'est la sphère, n'ayant aucune relation de dépendance avec la droite, le plan, l'espace euclidiens. Il est donc parfaitement évident que ces théorèmes doivent être entièrement développés au moyen des seuls axiomes qui caractérisent la sphère.

D'ailleurs, il n'est pas tout à fait inutile d'avoir recours à cette conception ordinaire qui consiste à faire de la sphère une enveloppe; en effet, pour employer la terminologie de notre intuition euclidienne, si nous détachons d'un globe la surface qui le recouvre, tout autre surface sur laquelle nous pouvons appliquer la première par flexion simple sans extension est une surface doublement elliptique, une surface à courbure positive constante, avec la même Géométrie propre, et la notion vulgaire du libre mouvement des figures peut y subsister; toutefois, cette surface n'est plus exempte de singularités, car il lui en est née une quelque part.

Pour éclaircir en langage plus ordinaire le sens des propriétés intrinsèques de la sphère, prenons le cercle, c'est-à-dire la courbe fermée qui peut glisser et se mouvoir entièrement le long d'elle-même. Elle apparaît sur le plan euclidien, bolyaien ou riemannien avec des propriétés intrinsèques identiques; mais, à considérer son rayon, elle se différencie sur chacun des trois plans. La circonférence du cercle est égale, sur le plan euclidien, au produit du rayon par 2π, ou $2\pi R$; sur la sphère elle est moindre que ce produit, et sur la pseudosphère elle est plus grande. Or, ce sont précisément les propriétés intrinsèques de la sphère que nous avons besoin d'étudier. Puisqu'elles sont entièrement indépendantes du postulat des parallèles, la Sphérique la plus simple doit être non-euclidienne.

La notion familière que les étudiants ont de la sphère comme enveloppe d'un globe, sous son vieil aspect eucli-

dien, est aussi un avantage qui, d'accord avec tous les besoins que nous avons d'introduire dans l'étude de la Géométrie de nouvelles voies, décide en faveur de la Sphérique intrinsèque à l'encontre d'une planimétrie simplement elliptique, avec son plan unilatère sur lequel nous pouvons si étrangement passer d'une face sur l'autre sans le traverser. Dans la Sphérique, nous avons des matériaux familiers à présenter sous un nouveau jour, avec de nouvelles méthodes grâce auxquelles il sera acquis qu'on peut les obtenir aussi comme conquêtes analogues faites dans des domaines moins connus.

Quand, au lieu d'établir les théorèmes sur les angles polyèdres et de les transporter par section dans la Géométrie sphérique, nous cherchons à réaliser les théorèmes des angloïdes, en les considérant comme découlant déjà des propriétés les plus simples de la sphère, nous mettons cette théorie en pratique. Combien est-il important, combien est-il instructif de mettre en lumière les axiomes fondamentaux qui donnent par la logique pure toutes les relations des figures sphériques, et d'en voir surgir dans son entier développement le système familier des théorèmes qui constituent depuis si longtemps la Géométrie sphérique !

La vieille ligne droite, l'ancien grand cercle se dissipent, s'évanouissent, et à leur place nous trouvons la *recte* [1], à laquelle s'applique maintenant l'ancienne définition de la ligne droite, « une ligne traversant l'espace entier de sorte qu'une partie quelconque de cet espace située le long d'une portion de cette ligne puisse venir coïncider avec chacun des côtés d'une autre partie quelconque. » En termes vulgaires, la recte ne dévie ni à droite ni à gauche tant que l'on ne quitte pas la sphère.

Mais le mouvement ne peut jamais être regardé comme notion fondamentale, et ce sont en réalité les axiomes qui

---

[1] *Note du traducteur*. M. Bruce Halsted a employé ici le terme de *Straightest* qui est le superlatif grammatical de l'adjectif anglais *Straight* signifiant *droit* ou *droite*. Dans l'impossibilité de trouver en français un mot équivalent à ce néologisme, nous avons pris la liberté de le créer, ce dont nous nous excusons, en francisant le mot latin qui a la même signification.

Voir l'ouvrage de M. E. HALSTED, RATIONAL GEOMETRY, chap. XV, *Pure Spheries*, p. 212 et suiv.

créent l'espace. Il y a une entité gométrique au-dessus même de la recte, le point; c'est la relation entre la recte et le point qui différencie la Sphérique de la Géométrie simplement elliptique. « La droite, » dit Mansion, « est la ligne déterminée par deux quelconques de ses points suffisamment rapprochés. » Mais que signifient ces mots : « suffisamment rapprochés ? »

Ce n'est que vers 1877 que j'ai pu résoudre ces difficultés en établissant le système de la Géométrie sphérique sur la base d'axiomes qui n'expriment que les relations fondamentales entre points et rectes. L'emploi du terme recte pour désigner la droite sphérique est une garantie de clarté. Le mot ligne a toujours été employé pour désigner le genre dans lequel la courbe représente l'espèce, et depuis quelque temps nous avons vu apparaître des courbes si déconcertantes et des lignes si étonnamment compliquées que la notion générale de ligne ne pourrait plus désormais trouver sa place dans les Eléments. Points et rectes sont sciemment acceptés comme éléments auxquels des postulats spécifiques donnent la précision requise. Pour éviter d'avance toute controverse, on ne doit réserver le mot définition que pour exprimer une possibilité de substituer un terme ou un symbole simple à des termes ou à des symboles plus compliqués.

Au lieu de la définition de Mansion, nous aurons alors ce que je préfère appeler un *axiome d'association :*

I_1 *A chaque point de la sphère en correspond toujours un et un seul qui avec le premier ne détermine pas une recte.*

Nous appellerons ce second point *l'opposé* du premier.

Après trois nouveaux axiomes ajoutés au précédent[1], nous arrivons à une question vraiment fondamentale et très complexe, c'est-à-dire à l'arrangement d'une sorte d'éléments avec l'autre.

Le mot « ordre » est si commun que nous n'avons pas cons-

---

[1] Ces trois axiomes sont développés dans l'ouvrage de M. HALSTED, *Rational Geometry* p. 212-213 sous les énoncés suivants :

I_2 *Toute recte qui passe par un point passe par son opposé.*

I_3 *Deux points non opposés d'une recte la déterminent complètement, et sur toute recte il y a au moins deux points non opposés.*

I_4 *Il y a au moins trois points non situés sur une même recte*

cience de sa complexité. Quelle différence y a-t-il entre AB et BA ? Cette notion ne renferme-t-elle pas un troisième, peut-être même un quatrième sens? De deux instants dans la durée, l'un peut-il venir d'abord et l'autre ensuite sans que nous concevions également l'idée d'un passé ? Peut-il y avoir un présent et un futur sans la conception d'un passé ? Pour atteindre le futur, ne faut-il pas traiter le présent comme un passé ? En mettant de côté leur relation avec un segment ou un vecteur, qui n'est en vérité que le temps même, existe-t-il quelque différence entre le couple de points A, B et le couple de points B, A ? Etant donnés non des éléments, mais des points, et trois points seulement, peut-il y avoir entre ces trois points une relation nommée « ordre » ?

Lorsque les trois points A, B et C appartiennent seuls à un certain parcours, on peut dire qu'ils ont un ordre ou n'en ont pas selon que le parcours est ouvert ou fermé. Quand ils ont un ordre, on peut avoir

ABC avec CBA ,

ou

ACB avec BCA ,

ou

BAC avec CAB ,

suivant la nature du parcours.

Or, il existe une Géométrie particulière, purement qualitative, qui ne fait usage ni de la notion de droite ni de celle de plan, mais seulement des notions de ligne et surface. On l'a appelée *Analysis situs*. L'ordre y subsiste pourtant.

N'est-il donc pas possible que, sans rien perdre de sa généralité, l'ordre soit subjectif à l'idée de droite ? En ce cas, il sera plus simple et plus certain, plus exact et plus commode de nous dégager de l'idée générale d'ordre pour arriver à une idée plus spécifique que nous entendons appliquer uniquement aux points d'une droite ou d'une recte. Nous exprimons avantageusement cette idée par le terme nouveau de *situation entre* (betweenness).

En 1899, Hilbert a mis en lumière l'importance du mot *entre* pour désigner l'arrangement des points d'une même

droite[1]. Son argumentation a été extrêmement simplifiée par mon élève R.-L. Moore qui a prouvé d'une façon élégante que le dernier de ses axiomes était inutile et surabondant[2]. Mais le problème des points d'une recte est beaucoup plus difficile. Trois termes ne peuvent pas avoir un ordre circulaire, et dire que de trois points d'un cercle chacun est entre les deux autres, c'est dénaturer le sens du mot « entre. »

De là cette remarque inusitée, qu'un point quoique ne partageant pas une recte en deux segments, en fait pourtant un seul morceau sur lequel les points sont rangés dans un ordre naturel, c'est-à-dire que les mots « suit, » « précède, » « se trouve entre » leur sont applicables.

La grande valeur pratique de la « situation entre » est que, dès qu'on sait qu'un point est entre deux points, il est par cela même situé sur une recte particulière donnée. Mais si nous acceptons le terme « entre » dans le sens dénaturé dont il a été question plus haut, dire que B est entre A et C ne signifiera absolument rien, puisque quand A et C sont opposés, tout autre point de la sphère est avec eux sur une même recte, et, dans le sens dénaturé, entre eux.

Il en résulte donc que les tout premiers de nos axiomes de situation sur la sphère, pour spécifier comment on doit appliquer le terme « entre » aux points d'une recte tracée sur cette surface, doivent être les suivants :

II_1 *Aucun point n'est entre deux opposés.*

Ceci est complété par :

II_2 *Aucun point n'est entre son opposé et un troisième point quelconque.*

II_3 *Entre deux points quelconques non opposés il y a toujours un troisième point.*

En poussant ce système jusqu'au bout, nous avons une « situation entre » dont on peut faire emploi, par exemple, dans la définition suivante :

Deux points A et B non opposés sur une recte *a* forment ce que nous appelerons un *segment*, désigné par AB ou BA. Les points situés entre A et B sont dits points du segment

---

[1] *Fondements de la Geometrie*, axiomes de l'ordre.
[2] Voir : *Rational Geometry*, appendix I, p. 253-256.

AB ou situés à *l'intérieur* du segment AB. Les autres points de la recte *a* sont dits situés *hors* du segment. Les points A et B sont les extrémités du segment.

Les axiomes du groupe suivant concernent la congruence.

Les géomètres inexpérimentés croient que l'on peut épuiser brièvement ce sujet de la manière que voici :

Définition : Les figures géométriques qui peuvent être transportées l'une sur l'autre par mouvement sans déformation sont dites congruentes (≡).

Théorème. *Un segment est congruent à lui-même retourné.*

Démonstration. Le point A peut-être appliqué sur le point B, et la direction AB appliquée sur la direction BA ; alors le point B tombe sur le point A, car s'il en était autrement, la partie serait congruente au tout.

Mais ce raisonnement est entièrement inadmissible. Définir la congruence par le mouvement rigide est faux et trompeur, car la notion de mouvement rigide enveloppe, renferme et emploie l'idée de congruence. Nous devons, au contraire baser le concept de mouvement sur l'idée de congruence, asseoir la notion du mouvement sur les axiomes de congruence.

Un homme dont on a dit : « Ce fut de beaucoup le plus éminent Américain de la période coloniale, soit que nous considérions l'influence de ses travaux et de ses opinions sur ses contemporains dans son propre pays, et leur lointaine diffusion dans les autres, soit que nous ayons égard à la survivance de prestige et d'autorité qui perpétue encore son nom et sa mémoire. » Jonathan Edwards, qui mourut président de Princeton, s'exprime ainsi :

« Le mouvement est l'ensemble des positions successives d'un corps dans toutes les parties immédiatement contigues d'une distance quelconque, sans que ce corps continue à demeurer pendant un temps quelconque dans aucune d'entre elles. »

Le substratum géométrique du mouvement est ainsi la préexistence d'une série de figures congruentes. Donc, le mouvement d'un corps rigide suppose préalablement la congruence.

De plus nous ne devons pas employer l'idée importune de « direction. » Sur le plan, cette idée même suppose la théorie entière des parallèles. Sur la sphère, deux rectes n'ont jamais la même direction puisqu'elles ne sont point parallèles, et pourtant elles ont toutes deux la même direction puisqu'elles joignent un même point à un même point. On ne gagne rien en convenant d'appeler direction un rayon. De telle sorte que la congruence, dont l'idée va être précisée par des axiomes, doit précéder le mouvement. Mais justement ici l'on peut faire une simplification inattendue et encore insoupçonnée.

Dans son premier axiome de congruence, (III_1), Hilbert énonce explicitement ceci : *Tout segment est congruent à lui-même, c'est-à-dire que l'on a* AB $\equiv$ AB. Cet axiome est aujourd'hui superflu, ainsi que l'était l'axiome III_4 de Hilbert. C'est une proposition démontrable. La démonstration suivante est due à R.-L. Moore.

Axiomes de congruence.

III 1. *Si A diffère de B et A' diffère de C', il y a sur le rayon A' C' un point et un seul B' tel que* $AB \equiv A'B'$.

III 2. *Si* $AB \equiv A'B'$ *et* $A'B' \equiv A''B''$, *on a* $AB \equiv A''B''$.

III 3. *Si B est entre A et C, et B' entre A' et C', et que* $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, *on a* $AC \equiv A'C'$.

Lemme. — *Si B et C sont sur le rayon AD, B' et C' sur le rayon A' D', et que* $AB \equiv A'B'$ *et* $AC \equiv A'C'$, *B étant différent de C, B' est différent de C'*.

Démonstration. D'après l'axiome de situation, l'un des points B ou C doit être entre A et l'autre point ; admettons que ce soit B. Alors il y a en vertu de III 1 un point C″ tel que B′ se trouve entre A′ et C″, et que l'on a $BC \equiv B'C''$. Mais, de III 3 on tire également $AC \equiv A'C''$, et comme par hypothèse $AC \equiv A'C'$ il en résulte d'après III 1 que C′ est confondu avec C″. Puisque B′ est entre A′ et C″, C″ diffère de B′ ; donc C′ diffère de B′.

Théorème. — *AB est congruent à AB*.

Démonstration. Si AB est un segment quelconque, il y a d'après III 1 un point B′ du rayon AB tel que $AB \equiv AB'$, et un point B″ du même rayon tel que $AB' \equiv AB''$. De

AB ≡ AB′ et de AB′ ≡ AB″ nous déduisons donc, en vertu de III 2, AB ≡ AB″. Il en résulte, d'après III 1, que B″ est confondu avec B′.

Puisque AB′ ≡ AB″, nous avons alors AB′ ≡ AB′, en même temps que AB ≡ AB′, et comme d'après le lemme, si B′ différait de B, B′ différerait de B′ ce qui est impossible, B′ coïncide avec B. Donc enfin AB est congruent à AB.

Cette démonstration est extrêmement instructive; elle fait voir jusqu'à quel point est justifié le bannissement du mot *axiome* de la Géométrie rationnelle. Ce n'est qu'en raisonnant de la sorte que l'on parvient à établir entièrement ce qu'est en réalité une preuve géométrique, et que l'on arrive à une compréhension parfaitement précise de ce que les axiomes contiennent actuellement. Il vaudrait toutefois mieux, dans un Traité didactique élémentaire, écarter quelques-unes de ces très délicates et laborieuses démonstrations, et en exprimer les résultats sous forme de postulats non nécessaires, mais commodes.

Nous définissons maintenant l'angle comme l'ensemble de deux rayons issus d'un point commun; nous posons alors l'axiome :

III_4 *D'un côté donné d'un rayon donné il y a un et un seul angle congruent à un angle donné.*

Ensuite, au lieu de formuler comme axiomes de congruence les deux propositions que voici,

III_a. *Deux angles congruents à un même angle le sont l'un à l'autre*, et,

III_b. (Euclide I, 4),

Nous prouvons ces axiomes comme des théorèmes en définissant la congruence des angles dans les mêmes termes que celle des segments et admettant :

III_5. (Euclide, I, 8) *Si A, B et C ne sont pas sur une même droite, ainsi que A', B' et C', si C est entre B et D, et C' entre B' et D', et que l'on ait $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$ et $BD \equiv B'D'$, on a aussi $AD \equiv A'D'$.*

En lui-même, un couple de points est non seulement dénué d'ordre, mais même ne possède aucun sens. Au contraire, un couple de points pris sur une recte, c'est-à-dire un seg-

ment de cette recte a un sens, et la congruence AB ≡ BA doit être démontrée ou admise comme axiome. On peut l'admettre sans introduire aucune divergence entre le vieux concept de superposition et le concept plus fondamental de congruence. AB se superpose à BA par une demi-rotation autour de leur point milieu commun.

Sur la sphère, un angle ou la figure formée par deux rayons issus du même point initial, a un sens; mais au moins maintenant devons-nous faire une distinction entre les mots congruent et superposable.

Le mouvement analogue de la demi-révolution d'un segment autour de son milieu est la demi-révolution d'un angle autour de son rayon bissecteur. Quand deux figures du plan sont symétriques vis-à-vis d'un centre, chacune peut être amenée en coïncidence avec l'autre par une rotation de 180 degrés effectuée dans le plan autour de ce centre. Ceci subsiste lorsqu'au lieu de « plan » on dit « sphère ; » un segment de recte AB et son inverse BA sont de telles figures, elles sont symétriques par rapport à leur commun milieu.

Quand deux figures sont symétriques par rapport à un axe dans le plan, on peut les faire coïncider en pliant le plan suivant l'axe, mais non plus par un glissement quelconque le long de ce plan. Pour les amener en superposition, il faut faire tourner l'une autour de l'axe de symétrie en effectuant une demi-révolution du plan. C'est dire que pour cette opération, il faut employer la troisième dimension de l'espace; la congruence de ces figures est donc basée sur la propriété qui fait que les deux côtés du plan sont également indiscernables, et qu'un plan est entièrement superposable à lui-même après retournement. Cette opération, qui consiste à plier le long d'une ligne, ne peut trouver de place dans une Géométrie strictement a deux dimensions; et, puisque nous sommes en Sphérique, c'est-à-dire en Géométrie à trois dimensions, nous devrons dire que la surface externe de la sphère étant convexe, tandis que la face interne est concave, une partie de cette surface, après avoir été retournée, ne viendra pas se superposer à sa symétrique, mais seulement la toucher en un point unique.

Ainsi, deux figures qui sur la sphère sont symétriques par rapport à un axe ne peuvent pas être amenées à coïncider : appelons-les désormais symétriques tout court, et désignons-les par la notation . | .

Un angle sphérique et son inverse $\sphericalangle (h, k)$ et $\sphericalangle (k, h)$ ne sont pas symétriques par rapport à un centre et ne peuvent être superposés.

Nous adopterons cette définition : Un angle est dit symétrique d'un autre quand il est congruent à l'inverse de ce dernier ; soit $\sphericalangle (h, k)$. | . $\sphericalangle (v, w)$ quand $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (w, v)$. Alors, de $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h, k)$ il résulte $\sphericalangle (h, k)$. | . $\sphericalangle (k, h)$. Mais ces deux derniers angles ne sont pas superposables et ne peuvent coïncider.

Pour ceux qui ont fait de la superposition idéale la base et le critérium de la congruence, le fait qu'un angle sphérique ne peut d'aucune manière être superposé à son inverse crée une différence radicale entre leur conception de la Géométrie sphérique et la conception familière de la Géométrie plane.

Un axiome de continuité pourrait nous aider à prouver la proposition suivante : *A l'intérieur de l'angle* $\sphericalangle (h, k)$ *il y a un rayon* l *et un seul tel que* $\sphericalangle (h, l) \equiv \sphericalangle (l, k)$; mais il resterait à identifier ce rayon avec le rayon l' tel que $\sphericalangle (k, l') \equiv \sphericalangle (l', h)$. On pourrait décomposer quelques théorèmes, par exemple celui-ci :

Théorème. *Deux angles droits sont à la fois congruents et symétriques.*

Mais, puisque la congruence ne dépend en aucune façon du concept subséquent de mouvement, rien de plus simple que d'admettre $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (k, h)$.

Les trois points qui déterminent un triangle n'ont ni ordre ni situation entre, dans le sens spécifique, car il pourrait se faire que deux d'entre eux eûssent un caractère propre et le troisième un caractère différent ; mais, en tant que triade de segments, un triangle possède un *Umlaufssinn*, ou un sens de permutation individuel.

Si la congruence des segments est liée à celle des angles par un axiome des triangles, c'est-à-dire si elle est restreinte aux triangles qui ont le même sens de permutation, cela ne

nous donne pas la congruence des angles à la base dans le triangle isocèle; pour y parvenir, il est nécessaire, en ce cas, d'y ajoindre un ou deux axiomes de continuité.

Nous voyons ainsi qu'en outre de la symétrie d'espace à une dimension impliquée par la congruence des segments et des angles avec leurs inverses, il y a une symétrie totalement différente d'espace à deux dimensions. Ceci n'est pas généralement admis dans l'étude ordinaire de la Géométrie plane, puisqu'un triangle peut avoir son tour de permutation changé quand on le retourne sur lui-même dans l'espace à trois dimensions. En Sphérique, ce retournement est impossible, si bien que, quoique cette symétrie d'espace à deux dimensions soit implicitement renfermée dans la non-indication d'un sens de circulation pour les triangles, il est pourtant d'usage de la signaler expressément en distiguant entre les triangles congruents et les triangles symétriques.

Si cette distinction avait été faite plus haut nommément pour les angles, nous aurions pu l'employer dans la définition que voici : *Deux triangles sont appelés symétriques quand leurs côtés correspondants sont congruents et leurs angles correspondants sont symétriques*. Mais on obtient une définition peut-être plus désirable en faisant prévaloir la différence entre le côté droit et le côté gauche d'un angle.

Après les axiomes de congruence, nous n'avons plus besoin des axiomes métriques, et, en fait de définition ou d'axiome, nous voici bien débarrassés de cette phrase ambiguë : « *La ligne droite est le plus court chemin entre deux points* ». A ce sujet, voyez George Hamel : *Ueber die Geometrieen in deren die Geraden die kürzesten sind*. (Math. Annalen, Bd. 57, 1903).

Maintenant, pour ce qui est de la continuité, il semble plus nécessaire de faire appel à cet axiome en Sphérique qu'en Planimétrie; en effet, par exemple, on peut facilement dans le plan partager un segment en un nombre quelconque demandé de parties; sur la sphère, au contraire, nous ne pouvons nous passer d'un axiome de continuité même pour démontrer qu'un segment donné admet un tiers, c'est-à-dire que le tiers d'un segment donné existe.

La question de la continuité demeure néanmoins épineuse, et Hilbert lui-même n'a pas réussi à la traiter simplement. Son *Axiom der Vollständigkeit* et son *Axiom der Nachbarschaft* sont des morceaux grossiers dans sa belle et fine mosaïque. Russell dit, (Principles of mathematics, p. 440) : « Que l'axiome de continuité soit vrai au point de vue de notre espace actuel, c'est une question que je ne vois aucun moyen de résoudre. Car un tel problème doit être empirique, et il serait tout à fait impossible de distinguer empiriquement ce qui peut être appelé espace rationnel d'un espace continu. »

Dans ma *Rational Geometry* j'ai traité la Sphérique non-euclidienne sans l'aide d'aucun axiome quelconque de continuité.

George-Bruce HALSTED, Ecole Normale
de Greeley, Colorado.

Traduction de M. P. BARBARIN, (Bordeaux).

CONSTRUCTIONS SYNTHÉTIQUES RELATIVES A CERTAINES COURBES DU 3e DEGRÉ ET DE LA 3e CLASSE

Dans divers articles antérieurs[1] nous avons établi la génération des courbes provenant des formations synthétiques que nous avions désignées sur le nom de :

Groupes du (n + 1)e *et du* (n + p)e *degré, et*
Groupes de la (n + 1)e *et de la* (n + p)e *classe.*

Nous nous proposons actuellement de développer la construction des tangentes, des points de tangence et des points de coupe relatifs à ces courbes. Ces constructions dépendent

[1] Ls. CRELIER : *C. R.*, 11 juin et 2 juillet 1906. — *L'Enseign. mathém.*, p. 455-462, 1906 et p. 107-119, 1907.

de groupes analogues aux précédents, mais formés de faisceaux concentriques ou de ponctuelles situées sur une même base. En conséquence, nous étudierons d'abord ces cas spéciaux des groupes sus-mentionnés de la même manière que les ouvrages classiques[1] développent la théorie des faisceaux homographiques concentriques simples et des ponctuelles homographiques simples et de même base.

I

GÉNÉRALITÉS

Faisceaux homographiques concentriques du (2 + 1)e degré.

Nous appellerons faisceaux homographiques concentriques du (2 + 1)e degré deux faisceaux formant un groupe du (2 + 1)e degré et issus du même sommet.

Comme dans le cas général, deux de ces faisceaux seront évidemment déterminés dès que nous connaîtrons cinq paires de rayons homologues quelconques.

Divisions homographiques de même base de la (2 + 1)e classe.

Nous appellerons divisions ou ponctuelles homographiques de même base, de la (2 + 1)e classe deux ponctuelles formant un groupe de la (2 + 1)e classe et situées sur la même base.

Deux ponctuelles de cette nature seront déterminées également dès que nous aurons cinq paires de points homologues quelconques.

D'après les définitions que nous avons adoptées pour les groupes, il en résulte que toute transversale détermine, sur deux faisceaux concentriques ou non du (2 + 1)e degré, deux ponctuelles de la (2 + 1)e classe *de même base*. En sachant donc construire deux faisceaux concentriques de cette nature, nous pourrons en déduire, à priori, deux divisions analogues de même base et inversement. Dans ces conditions nous n'aurons qu'à développer les constructions relatives aux faisceaux sans avoir besoin d'une partie dualistique pour les divisions.

---

[1] W. Fiedler : *Die darstellende Geometrie*. — T. Reye : *Die Geometrie der Lage*. — R. Böger : *Ebene Geometrie der Lage*.

A. Construction de deux faisceaux concentriques du $(2+1)^e$ degré.

Les faisceaux sont donnés par les paires, Sa; Sa_1 — Sb; Sb_1 — Sc; Sc_1 — Sd; Sd_1 — Se; Se_1. Il reste bien entendu que chaque rayon a, b, c ... du faisceau simple correspond à 2 rayons a_1 et a_2 — b_1 et b_2 ... du faisceau multiple; par contre chaque rayon de celui-ci ne correspond qu'à un du premier. (Fig. 1.)

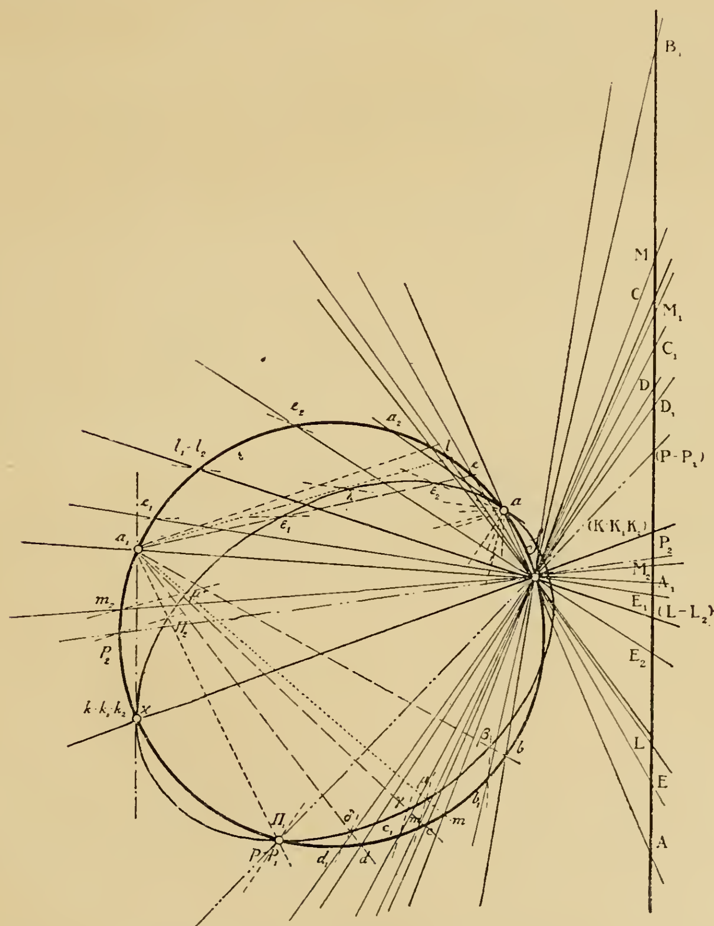


Fig. 1.

Nous coupons ensuite le groupe par une circonférence arbitraire mais passant par le sommet S. Les points de coupe des rayons avec la circonférence forment deux divisions circulaires homographiques du (2 + 1)^e ordre. Celles-ci sont déterminées par les points : aa_1 — bb_1 — cc_1 — dd_1 et ee_1. Les points de la division simple sont : $abcde$ et ceux de l'autre sont : $a_1b_1c_1d_1e_1$. Nous joignons maintenant tous les points de la division multiple avec a et tous ceux de la division simple avec a_1. De cette manière, et dans le sens où nous avons défini les groupes du (2 + 1)^e degré, nous obtenons deux faisceaux homographiques de sommet a et a_1 formant un groupe du (2 + 1)^e degré, et possédant un rayon homologue commun aa_1. D'après notre théorème, le lieu de points de coupe des rayons homologues est une conique passant par les points :

1.	a sommet du faisceau multiple.				
2.	β point de coupe de		a_1b	avec	ab_1.
3.	γ »	»	a_1c	»	ac_1.
4.	δ »	»	a_1d	»	ad_1.
5.	ε_1 »	»	a_1e	»	ae_1.

Cette conique peut être entièrement construite au moyen de ces cinq points et elle nous permettra de déterminer tous les autres rayons du groupe de sommet S. Si nous voulons obtenir deux rayons conjugués quelconques Sm et Sm_1 ou Sm et Sm_2 nous menons par a_1 une transversale qui coupe la conique en μ' et μ''. Nous joignons $a\mu'$ et $a\mu''$ qui sont les homologues de la transversale dans les faisceaux auxiliaires de sommets a et a_1. Ces trois droites $a_1\mu'\mu''$ — $a\mu'$ — $a\mu''$ déterminent respectivement sur le cercle les points m, m_1 et m_2 constituant deux paires de points conjugués des divisions circulaires. Les rayons cherchés sont ainsi Sm, Sm_1 et Sm_2.

En faisant tourner la transversale autour de a_1 et en joignant les points de coupe sur la conique avec a nous obtenons ainsi tous les rayons des faisceaux de sommets a et a_1. Ceux-ci déterminent à leur tour tous les points des divisions circulaires et partant tous les rayons du groupe concentrique en S du (2 + 1)^e degré.

Si nous considérons en particulier une des paires de rayons

donnés, soit Se; Se_1 nous voyons qu'il existe un deuxième rayon Se_2 du faisceau multiple également conjugué de Se. Pour l'obtenir menons la droite $a_1 \varepsilon_1$ qui donne encore ε_2, sur la courbe; $a\varepsilon_2$, donne e_2 sur le cercle et de celui-ci on déduit aisément Se_2. (Fig. 1.)

Si nous avions eu des divisions à déterminer au lieu de

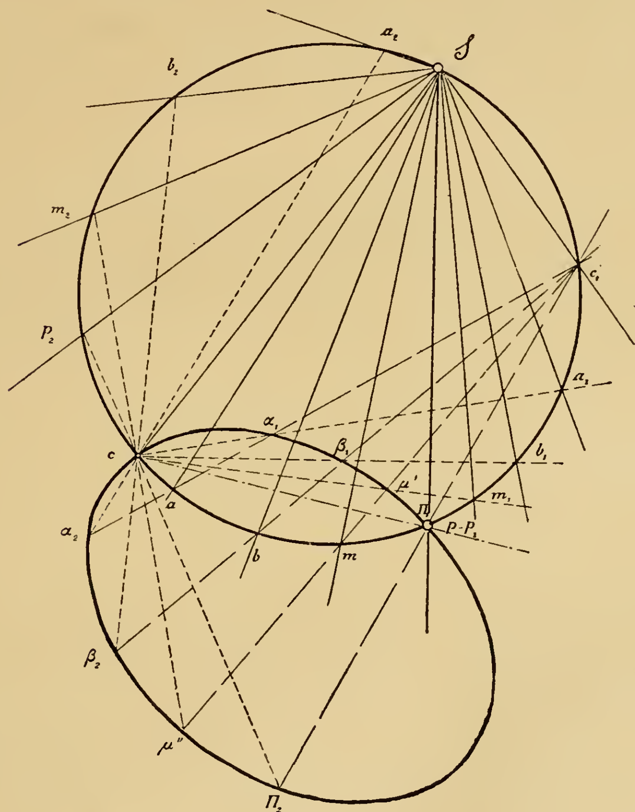


Fig. 2.

faisceaux, nous aurions joint les cinq paires de points homologues donnés AA_1 — BB_1 — CC_1 — DD_1 — EE_1 avec un point arbitraire S de manière à former un groupe de deux faisceaux comme les précédents. Nous aurions ensuite achevé la construction des rayons de ces faisceaux, comme il vient d'être dit, et chaque paire nouvelle de rayons homologues

aurait donné la paire correspondante de points homologues sur la base commune. (Fig. 1.)

Cas spécial. Quand les rayons donnés des faisceaux du (2 + 1)^e degré sont tels que deux paires du faisceau multiple sont complètes avec chacune leur rayon conjugué du faisceau simple, on peut également appliquer la construction précédente, ou utiliser une autre conique.

Si nous considérons la fig. 2, les paires de rayons homologues donnés sont :

$$Sa\ ;\ Sa_1 - Sa\ ;\ Sa_2 - Sb\ ;\ Sb_1 - Sb\ ;\ Sb_2 - Sc\ ;\ Sc_1\ .$$

Les paires Sa_1 et Sa_2 conjuguées à Sa, puis Sb_1 et Sb_2 conjuguées à Sb sont complètes. On peut utiliser les points c et c_1 pris sur la circonférence comme sommets des faisceaux auxiliaires et former un groupe du (2 + 1)^e degré. Ce groupe donne naissance à une conique dont nous avons également cinq points. Ce sont :

1. c sommet du faisceau multiple.
2. α_1 sur ca_1 et c_1a .
3. α_2 » ca_2 » c_1a .
4. β_1 » cb_1 » c_1b .
5. β_2 » cb_2 » c_1b .

Les paires de rayons conjugués $Sm\,Sm_1$ et $Sm\,Sm_2$ sont ensuite déterminées comme précédemment. (Fig. 2.)

Autre construction. Nous savons également que les rayons du faisceau multiple sont liés deux à deux et qu'ils forment une involution. Nous pouvons considérer le groupe du (2 + 1)^e degré comme formé d'un faisceau simple, homographique avec une involution du 2e degré et de même sommet. En coupant le groupe par un cercle passant par S, nous pouvons rappeler que les sécantes joignant les points correspondants de l'involution circulaire ainsi obtenue, forment un faisceau concentrique de sommet P. (Fig. 3.) Chaque rayon de ce faisceau correspond à un rayon du faisceau simple en S. Nous avons ainsi deux nouveaux faisceaux homographiques simples de sommets S et P qui engendrent une conique.

Les éléments donnés sont : Sa ; $Sa_1 - Sa$; $Sa_2 - Sb$; Sb_1

— Sb; Sb_2 — Se; Se_1. Les transversales a_1a_2 et b_1b_2 donnent le point P.

Le rayon	Pa_1a_2	est conjugué de	Sa	et donne	α	de la	conique	auxiliaire.
»	Pb_1b_2	»	Sb	»	β	»	»	
»	Pc_1	»	Sc	»	γ	»	»	

Les points P et S sont encore deux points de cette conique, laquelle est ainsi complètement déterminée.

En laissant une sécante mobile tourner autour de P, elle donnera sur la conique un point ν et sur la circonférence les

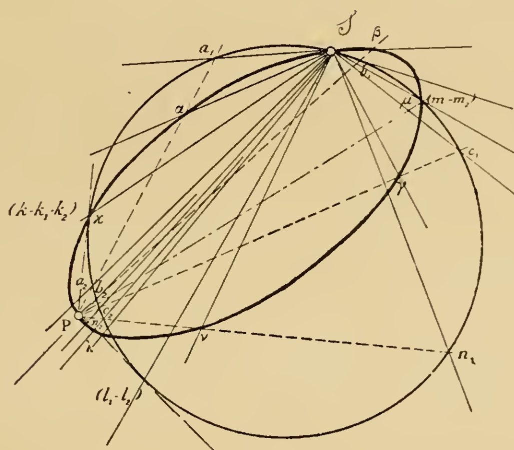


Fig. 3.

points n_1 et n_2. Au premier correspond le rayon Sn ou $S\nu$ et aux autres les rayons Sn_1 et Sn_2 tous deux conjugués du premier. Les diverses positions de cette sécante donneront ainsi toutes les paires de rayons homologues des deux faisceaux concentriques du $(2 + 1)^e$ degré. Cette construction relative à des données spéciales est également applicable aux divisions du $(2 + 1)^e$ degré situées sur une même base.

Remarque. Les points correspondants de la division multiple circulaire comme m_1 et m_2 ou e_1 et e_2 que nous avons déjà trouvés dans la première construction forment évidemment la même involution que dans la deuxième construction

et comme pour ce dernier cas ils sont situés sur des transversales concourantes en un point P.

B. Points et rayons particuliers.

1. *Rayons doubles du 2e degré.*

Nous désignerons sous ce nom les rayons Sl_1 et Sl_2 du faisceau multiple qui tombent ensemble mais qui restent différents de leur conjugué l du faisceau simple.

1. *Points doubles du 2e degré.*

Nous entendons par points doubles du 2e degré deux points comme L_1 et L_2 de la division multiple, qui sont confondus mais qui restent différents de leur homologue L de la division simple.

Dans la fig. 1 ces rayons sont donnés par les tangentes de la conique auxiliaire issues de a_1. On joint le point de tangence λ avec a pour obtenir les points doubles correspondants de la division circulaire. Il reste à mener les rayons Sl_1 et Sl_2 issus de S par ce nouveau point. On a évidemment deux rayons de ce genre réels, imaginaires ou confondus. (Fig. 1.)

Dans la deuxième construction (fig. 3), ce sont les tangentes au cercle issues de P qui donnent les points doubles de la division circulaire. On joint ceux-ci à S et on a les rayons cherchés.

Quand il s'agit de points doubles du 2e degré pris sur deux divisions de même base, on prolonge les rayons doubles des faisceaux concentriques correspondants menés par S jusqu'à cette base.

2. *Rayons doubles du 3e degré.*

Nous appellerons rayons doubles du 3e degré deux rayons homologues confondus tels de Sp et Sp_1.

2. *Points doubles du 3e degré.*

Les points doubles du 3e degré sont les points formés par deux homologues P et P′ confondus.

Pour obtenir ces rayons, considérons dans la fig. 1, un des points de coupe de la conique avec le cercle et désignons le par π_1. La transversale $a_1\pi_1$ donne également deux rayons

par a soit $a\pi_1$ et $a\pi_2$. Sur le cercle $a_1\pi_1$ donne p, $a\pi_1$ donne p_1 et $a\pi_2$ donne p_2. Comme π_1 est déjà sur le cercle p et p_1 seront donc confondus avec π_1. Les rayons passant par S seront Sp, Sp_1 et Sp_2, les deux derniers étant les homologues du premier. Les rayons homologues Sp et Sp_1 seront donc confondus tandis que Sp_2 ne donne rien de particulier.

Le nombre des rayons doubles du 3e degré dépend ainsi du nombre des points de coupe des deux courbes en dehors du point a qui est le sommet du faisceau multiple auxiliaire.

Nous avons donc trois points de coupe possibles différents de a dont deux peuvent être imaginaires. Il en résulte ainsi : *Les faisceaux concentriques formant un groupe du* $(2+1)^e$ *degré ont trois rayons doubles du 3e degré dont deux peuvent être réels, imaginaires ou confondus.*

La conique auxiliaire utilisée dans la première figure dépend de deux faisceaux de sommets a et a_1. Il est aisé de voir qu'elle est tangente au rayon aa_2 en a. Si l'on avait pris les sommets des faisceaux auxiliaires en a et a_2, la nouvelle conique eût été tangente au rayon aa_1 en a. D'un autre côté les points doubles du 3e degré sur le cercle sont des points fixes de celui-ci. *Ils appartiendront ainsi à toutes les coniques auxiliaires.* Les deux coniques correspondant aux faisceaux de sommets a et a_1 ou a et a_2 passeront par ces trois points et par le point a.

Les sommets des faisceaux auxiliaires peuvent être deux points homologues quelconques x et x_1. D'après ce qui précède la conique correspondante passera par les trois points doubles et par le point x.

On passe des rayons doubles du 3e degré, aux points doubles de même nature des divisions situées sur une même base, en prolongeant les rayons en question jusqu'à cette base.

Dans la figure 3, toute transversale Pμ passant par un point de coupe de la conique et du cercle donne sur le cercle les points m_1 et m_2 tels que m_2 est confondu avec μ. D'autre part Sμ donne également m sur le cercle confondu avec μ ou m_2. Donc les rayons homologues Sm et Sm_2 sont confondus et constituent une paire de rayons doubles du 3e degré. En dehors du point S, les deux courbes ont encore trois points

communs. Donc cette construction nous montre également que les faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ degré ont trois rayons doubles du $(2+1)^e$ degré, dont deux peuvent être imaginaires.

Dans la fig. 3 nous avons considéré la conique auxiliaire comme provenant de deux faisceaux simples, un de sommet P et l'autre de sommet S. Nous aurions pu prendre ce deuxième sommet en un point quelconque du cercle a_1 a_2, etc. appartenant à la division circulaire multiple. La conique auxiliaire eût passé par les trois points doubles du 3e degré des divisions circulaires par P et par a_1. Toutes les coniques ainsi formées auraient constitué un faisceau de coniques dont les quatre points fixes auraient été les trois points doubles en question et le point P.

3. *Rayons triples.*

Les rayons triples de deux faisceaux homographiques concentriques, du $(2+1)^e$ degré sont formés par un rayon du faisceau simple confondus avec ses deux homologues du faisceau multiple.

Exemple : Sk confondu avec Sk_1 et Sk_2.

3. *Points triples.*

Les points triples de deux divisions homographiques de même base de la $(2+1)^e$ classe sont formés par un point de la division simple confondu avec ses deux homologues de la division multiple.

Exemple : K confondu avec K_1 et K_2.

Ce cas sera réalisé dans la première construction (fig. 1) quand la transversale issue de a_1 et passant par un des points de coupe de la conique avec le cercle sera en même temps une tangente de la conique. Les points conjugués kk_1 et kk_2 des divisions circulaires seront tous confondus au point de coupe z des deux courbes. La droite Sz donnera ainsi le rayon triple. On peut avoir 0, 1 ou 2 rayons triples suivant que les tangentes de la conique issues du point a_1, ne passent pas, passent par un point de coupe des deux courbes ou passent par deux points de coupe de ces courbes.

Dans la fig. 3. le rayon triple sera donné par une transversale issue de P passant par un des points de coupe des deux courbes et en même temps tangente au cercle.

4. *Rayons rectangulaires conjugués.*

Etant donné deux faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ degré, nous appellerons rayons rectangulaires conjugués des rayons tels que Sm et Sm_1 qui sont homologues tout en étant perpendiculaires l'un à l'autre. Le deuxième rayon conjugué de Sm soit Sm_2 dépend des deux autres sans présenter de propriétés spéciales.

Pour obtenir ces rayons par la première méthode de construction nous observons que les solutions cherchées Sm et Sm_1 dépendent de rayons $a_1 m$ et am_1 passant par les extrémités d'un diamètre mm_1. Leur recherche dépend maintenant du problème suivant :

Problème : Etant donné deux points fixes d'un cercle a et a_1 et un diamètre mobile de celui-ci, déterminer le lieu géométrique des points de coupe des rayons joignant les extrémités du diamètre aux points fixes donnés.

Solution : Dans la fig. 4 considérons le diamètre xy ; il donne les droites xa_1 et ya ; après une demi-révolution y vient en x et vice-versa ; le rayon ya donne xa et xa_1 donne ya_1. Dans ce cas les rayons ya_1 et ax ne sont pas à considérer sur le diamètre xy mais bien sur un nouveau diamètre obtenu après une demi-révolution.

Dans ces conditions à tout diamètre xy ne correspondent que deux droites conjuguées xa_1 et ya. Si xy tourne autour du *centre de* manière à ce que x décrive toute la circonférence xa_1 et ya engendreront deux faisceaux homographiques simples de sommet aa_1 et les points de coupe de ces rayons se trouveront sur une conique passant par a et a_1. Nous déterminons la nature de cette conique en observant que deux rayons du faisceau a comme ax et am_1 correspondent dans le faisceau a_1 à $a_1 y$ et $a_1 m$ et donnent :

$$\sphericalangle\, xa\, m_1 = \frac{1}{2} \text{ arc } xm_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle\, xom_1$$

$$\sphericalangle\, ya_1\, m = \frac{1}{2} \text{ arc } ym = \frac{1}{2} \sphericalangle\, yom$$

Ces angles sont égaux; donc les angles compris entre les rayons homologues correspondants des deux faisceaux sont égaux. Nous avons des faisceaux homographiques égaux; donc la conique qu'ils engendrent est un cercle passant par a et a_1. D'un autre côté il est aisé de voir que ce cercle est tangent aux rayons oa_1 et oa. Il en résulte maintenant que, ce cercle est complètement déterminé.

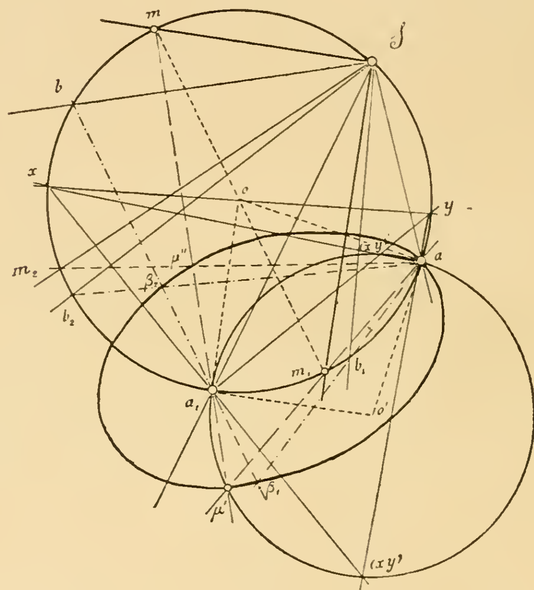


Fig. 4.

Si nous considérons de nouveau les faisceaux du (2 + 1)^e degré en a et a_1 ils donneront des rayons homologues passant par les extrémités d'un même diamètre quand les points de coupe de ceux-ci seront à la fois sur le cercle nouveau et sur la conique auxiliaire.

Les rayons $a_1 m$ et am_1 correspondant aux rayons cherchés Sm et Sm_1, sont à la fois des rayons homologues des faisceaux homolographiques égaux qui engendrent le deuxième cercle, et des rayons homologues des faisceaux du (2 + 1)^e degré engendrant la conique. Il faut donc que leur point

d'intersection soit un point de coupe de ces deux courbes. En dehors de a ces courbes ont trois points de coupe dont deux peuvent être imaginaires. A ces trois points correspondent donc trois paires de points conjugués des divisions circulaires tels que les deux points d'une même paire sont sur un même diamètre. Ces points donnent à leur tour avec S les paires de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en S.

Les faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ *degré ont donc trois paires de rayons rectangulaires conjugués dont deux peuvent être imaginaires.*

Constructivement on joint le point de coupe μ_1 des courbes avec a et a_1. On a $a_1\mu_1$ et $a\mu_1$. La première droite donne μ'' sur la conique et m sur le premier cercle. La seconde droite donne m_1 sur le même cercle ; m et m_1 sont conjugués dans les divisions circulaires et appartiennent à un même diamètre. Ils donnent évidemment Sm perpendiculaire à Sm_1. Le deuxième rayon conjugué de Sm soit de Sm_2 se déduit de μ'' avec $a\mu''$ (fig. 4).

Avec la deuxième méthode de construction, les paires de rayons rectangulaires conjugués étant liées à un diamètre du cercle primitif, nous pouvons voir que les extrémités d'un diamètre, jointes à S et P engendrent deux faisceaux homographiques de sommets S et P et forment un groupe du $(2+1)^e$ degré. Le faisceau multiple a comme sommet S et le faisceau simple P. La courbe correspondante est une courbe du 3e degré avec S comme point double et P comme point simple. Cette courbe aura encore trois points de coupe différents de S et de P avec la conique. De chacun de ces points on pourra donc en déduire une paire de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en S. On arrive donc à la même conclusion qu'avec la méthode précédente.

5. *Points limites.*

Nous appellerons points limites de deux divisions homographiques de même base et de la $(2+1)^e$ classe les points conjugués du point à l'infini de la division simple ou le

point conjugué et le point lié du point de la division multiple situé à l'∞.

Pour obtenir ces points, considérons les divisions déterminées suivant la méthode de la figure 1. (Voir fig. 5).

Nous prenons Sl parallèle à la base. Le rayon $a_1 l$ donne λ' et λ'', sur la conique, auxquels correspondent $a_1 l_1$ et $a_1 l_2$.

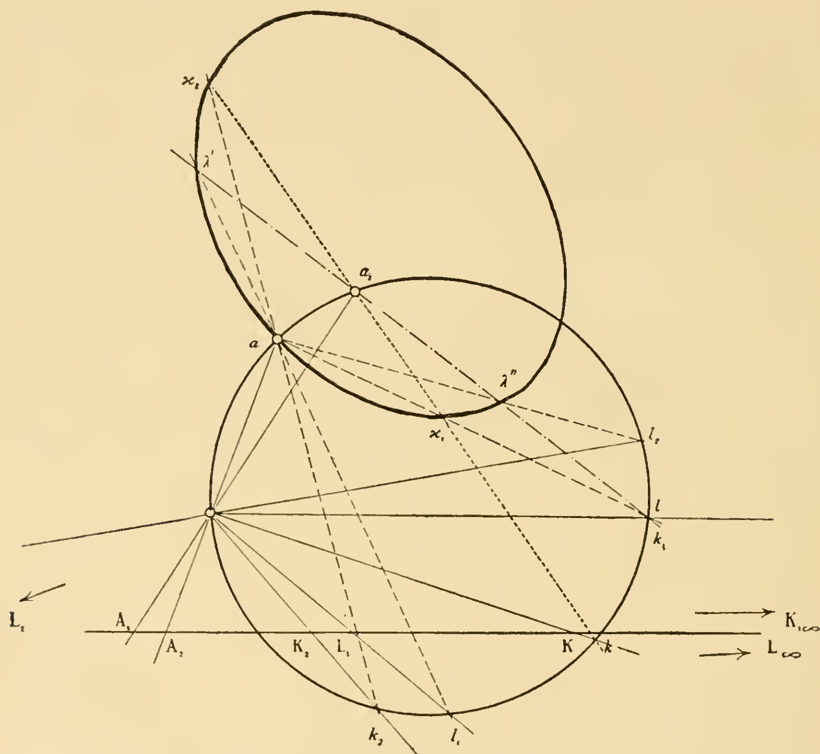


Fig. 5.

Les rayons Sl_1 et Sl_2 donnent L_1 et L_2 sur la base comme points conjugués de L_∞.

L_1 et L_2 forment un premier groupe de points limites. La parallèle précédente peut s'appeler Sk_1 ; le rayon ak_1 donne x_1 sur la conique, puis $a_1 x_1$ donne x_2, sur la conique également et k sur le cercle ; la droite ax_2, donne k_2 sur le cercle.

Les rayon Sk et Sk_1 puis Sk et k_2 sont conjugués. Ils donnent sur la base :

K conjugué de $K_{1\infty}$

K_2 » de K et lié à $K_{1\infty}$

K et K_2 forment le 2e groupe de points limites.

C. Remarque sur les divisions du $(2 + 1)^e$ degré, de même base.

On peut cependant développer les divisions homographiques du $(2 + 1)^e$ degré situées sur une même base, sans avoir besoin des faisceaux de même nature. Ce développement constitue la dualité du précédent et nous le résumons ici pour éviter d'allonger ce travail tout en voulant être aussi complet que possible. Chaque construction suppose évidemment une dualité.

Première construction. Nous donnerons les divisions au moyen des cinq paires d'éléments conjugués, aa_1 ; aa_2 ; bb_1 ; cc_1 et dd_1 . Nous construirons ensuite un cercle quelconque tangent à la base xy , et par chaque point donné nous tracerons les tangentes de cercle. Toutes ces tangentes couperont d'abord la tangente b suivant une division double, puis la tangente conjuguée b_1 suivant une division simple, homographique avec la première. Les tangentes issues de $a_1 a_2 b_1 c_1$ ... coupent b et celles issues de $abcd$ ... coupent b_1 . Ces deux nouvelles divisions ; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... et $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1$ ... forment un groupe de $(2 + 1)^e$ classe avec un point homologue commun $\beta\beta_1$. Elles engendrent donc une conique que nous pouvons construire et qui est déterminée par cinq tangentes. Par tout point μ de b_1 on a deux tangentes de la conique donnant les points homologues μ_1 et μ_2 sur b. Par ces trois points, les tangentes du cercle donneront les trois points homologues des deux divisions sur xy , soient m, m_1 et m_2.

Les points doubles du deuxième degré seront évidemment donnés par les points de coupe de la base simple b_1 avec la conique auxiliaire. Ils peuvent être imaginaires.

Les points doubles du troisième degré proviendront des tangentes communes des deux courbes. Il y en a trois en en dehors de b. Deux peuvent être imaginaires. *Toutes les coniques auxiliaires admettent ces trois tangentes du premier cercle comme tangentes communes.*

On obtiendra un point triple quand une tangente commune des courbes sera tangente à la conique par son point de coupe avec la base b_1.

Les points limites conjugués du point de l'infini de la division simple proviendront de la tangente du cercle parallèle

Fig. 6.

à xy et de son point de coupe avec b_1. Le point de coupe de cette même tangente avec b entraînera les points conjugués du point de l'infini sur la base double. (Voir fig. 6).

Deuxième construction. Celle-ci correspond au cas spécial où les éléments donnés peuvent se représenter par aa_1; aa_2; bb_1; bb_2; cc_1. On prend un cercle tangent à la base xy. Les tangentes issues par les paires a_1a_2; b_1b_2 se coupent en α et β sur une droite qui contiendra les points de coupe des paires de tangentes analogues. La ponctuelle $\alpha\beta\gamma$ sur cette droite est homographique avec abc et elle détermine une conique également tangente à xy. On peut

déduire les points des divisions sur xy au moyen des tangentes de cette conique. (Voir fig. 7).

Les points doubles du deuxième degré proviennent ici des points de coupe de $\alpha\beta$ avec le cercle. Ceux du troisième degré sont donnés par les tangentes communes en dehors de

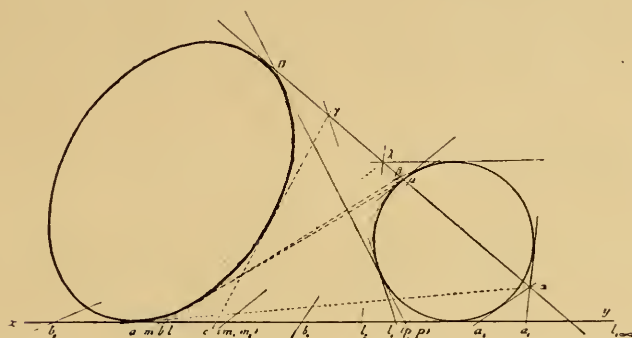


Fig. 7.

xy. *Toutes les coniques auxiliaires admettent quatre tangentes communes.* Ce sont les trois sus-indiquées et la ligne $\alpha\beta$.

Les points triples et les points limites se trouvent d'une manière analogue à celle de la construction précédente.

II

TANGENTES ET SÉCANTES

Nous considérons une courbe du 3e degré donnée par un faisceau multiple S_2 et un faisceau simple S_1 constituant un groupe du $(2 + 1)^e$ degré.

Pour construire la courbe nous nous reportons à ce que nous avons écrit précédemment (*Ens. math.*, 15 nov. 06). Les faisceaux sont donnés par cinq

Nous prenons également une courbe de la 3e classe formée par une division double et une division simple constituant ensemble un groupe de la $(2 + 1)^e$ classe.

Pour construire cette courbe suivant la méthode que nous avons déjà exposée, nous considérerons les cinq paires de

paires de rayons homologues quelconques aa_1 ; aa_2 ; bb_1 cc_1 ; dd_1 ; ceux-ci déterminent sur les rayons homologues d et d_1 les ponctuelles :

$$d : \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$$

$$d_1 ; \quad \alpha \; \beta \; \gamma \; \delta$$

les points d_1 et d sont confondus avec le point de coupe des bases d et d_1. Ces ponctuelles engendrent une conique donnée par cinq tangentes. Celles-ci sont :

$$d . \alpha_1 \alpha ; \alpha_2 \alpha ; \beta_1 \beta ; \gamma_1 \gamma .$$

Toute tangente de la conique donne une paire de points homologues sur les bases. D'un autre côté, par tout point de d_1 nous pouvons mener deux tangentes et par chaque point de d une tangente à cette courbe ; donc points homologues quelconques :

AA_1 ; AA_2 ; BB_1 ; CC_1 ; DD_1 qui déterminent la courbe et nous joindrons les points de la division simple ABCD avec le point D_1 de l'autre division, puis ceux de cette division $A_1 A_2 B_1 C_1$ et D_1 avec D l'homologue de D_1. Nous formerons ainsi deux faisceaux homologues déterminant un groupe du $(2 + 1)^e$ degré. Le rayon DD_1 ou $D_1 D$ sera un rayon homologue commun des deux faisceaux. Ils engendreront une conique déterminée par cinq points : D ; α_1 ; α_2 ; β_1 ; γ_1. Ces derniers sont les points de coupe des rayons comme D_1A et DA_1 ou D_1A et DA_2, etc.

Toute transversale de cette courbe menée par D_1 donne deux rayons homologues passant par

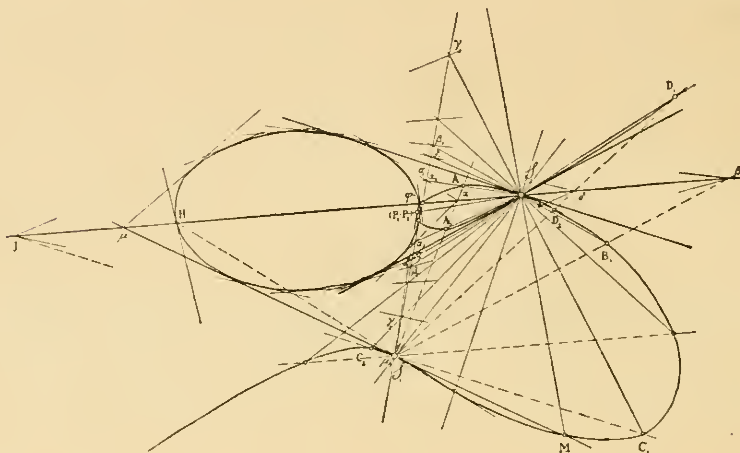


Fig 8.

tout point de d_1 correspond à deux points de d. En joignant ces points respectivement à S_1 et S_2 on obtient trois rayons appartenant au même groupement et formant deux paires de rayons homologues des divisions. Ils donnent deux points de la courbe du 3e degré. (Voir fig. 8).

Tangentes par le point double.

Considérons S_2 sur d_1 et menons les deux tangentes de la conique auxiliaire par ce point; elles donnent $\sigma_1 \sigma_2$ sur d, comme conjuguées de S_2 sur d_1. Ces tangentes sont les rayons conjugués du faisceau double correspondant au rayon $S_1 S_2$ du faisceau simple. Le point de coupe de chaque rayon du faisceau double avec son homologue $S_1 S_2$ est en S_2; donc chaque rayon est une tangente

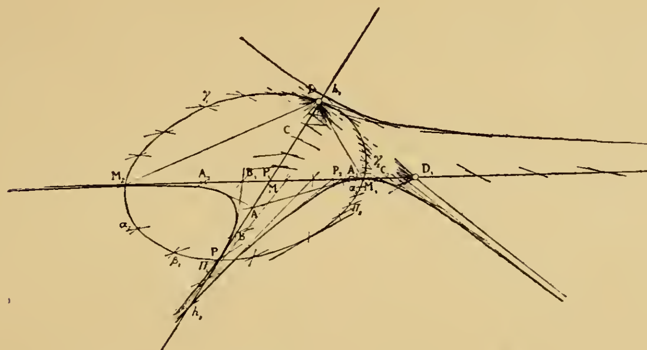


Fig. 9.

D et par les points de coupe. Ces rayons déterminent, les derniers deux points sur la base double et le premier un point sur la base simple. Ces trois points forment deux paires de points homologues et donnent ainsi deux tangentes de la courbe de 3e classe (Voir fig. 9).

Points de tangence sur la tangente double.

Pour obtenir les points de tangence de la tangente double considérons-là, comme une transversale de la conique auxiliaire; issue de D_1 elle donne M sur la tangente base de la division simple; les rayons homologues par D sont DM_1 et DM_2 menée par les points de coupe et donnant ces points de coupe comme conjugués de M. Nous aurons les tangentes MM_1 et MM_2 infiniment voisines de la base double, cou-

à la courbe en S_2. On en conclut :

Les tangentes de la conique auxiliaire menées par le sommet du faisceau double sont donc les tangentes de la courbe du 3e degré menée par le point double (fig. 8).

pant celles-ci en M_1 et M_2 donc ces points sont les points de tangence de la base double. On en conclut :

Les points de tangence de la tangente double d'une courbe de 3e classe sont les points de coupe de cette tangente avec la conique auxiliaire (voir fig. 9).

Tangentes par le sommet du faisceau simple.

La tangente à la conique auxiliaire menée par S_1 en dehors de d, soit $S_1 \mu$ donne μ sur d_1. Par μ on mène encore une tangente $\mu\mu_2$. Le point correspondant de $S_1\mu$ sur d est μ_1 confondu avec S_1.

Les rayons S_2S_1 et $S_2\mu_2$ sont donc comme homologues $S_1\mu$. Ils donnent les points S_1 et M de la courbe. Dans ces conditions S_1M a deux points confondus avec la courbe S_1 et un point de coupe en M.

D'autre part les points de coupe J et H de d_1 avec la conique ne donnent plus qu'une tangente par chacun de ces points. Ces tangentes donnent les points doubles de la division sur d; en menant ainsi les rayons doubles du faisceau S_2 on voit de suite que leurs points de coupe avec S_1J et S_1H donnent deux points confondus de la courbe du 3e degré sur ces droites. D'où il en résulte que S_1J et S_1H sont encore deux tangentes de la courbe du 3e degré passant par S_1 mais dont les points de

Point de tangence et points de coupe de la base de la division simple.

Le point de coupe P de la base de la division simple avec la conique auxiliaire donne la transversale $\pi_1\pi_2D_1$. Il en résulte les points P_1 et P_2 sur la base double comme conjugués de P. Le point P_1 est l'intersection des deux bases et le point π_1 est confondu avec P. La tangente P_1P infiniment voisine de la base simple, coupe celle-ci en P donc ce point P est le point de tangence de la base de la division simple avec la courbe du 3e degré. La tangente PP_2 est l'autre tangente de cette courbe que l'on peut mener par P.

Par le point D_1 on peut mener également deux tangentes à la conique auxiliaire. Celles-ci déterminent avec D les points doubles de la division multiple. En joignant ces points doubles avec le point de coupe de la tangente respective de la conique issue de D_1 on trouve une nouvelle tangente de la courbe de 3e classe représentant deux tangen-

tangence sont en dehors de S_1.

De ce qui précède, il en résulte donc :

La tangente de la conique auxiliaire menée par S_1 *est en même temps tangente de la courbe du 3e degré. Son dernier point de coupe avec cette courbe est différent de* S_1.

Les rayons du faisceau simple conjugués respectivement aux rayons doubles du faisceau multiple S_2 *sont encore deux tangentes de la courbe du 3e degré passant par* S_1 *et dont les points de tangence sont leurs points de coupe avec les rayons doubles correspondants.* (Voir fig. 8).

D'après ce qui précède, si nous connaissons dans une courbe du 3e degré à point double, six points de cette courbe et le point double, cette courbe est complètement déterminée, car nous pouvons prendre un des points simples comme sommet d'un faisceau simple et le point double comme sommet d'un faisceau double et former avec ces deux faisceaux un groupe du (2 + 1)e degré avec lequel nous pouvons construire toute la courbe. Ces observations jointes aux lois importantes des tangentes peuvent se résumer comme suit :

tes confondues dont le point de coupe est en h_1 ou h_2 ou les tangentes de la conique par D_1 coupent la base simple ; h_1 et h_2 sont donc les autres points de coupe de la base simple avec la courbe de 3e classe et les tangentes à la courbe menée par ces points sont ces tangentes confondues.

On en conclut donc :

Le point de coupe de la base de la division simple avec la conique auxiliaire est le point de tangence de cette base avec la courbe de 3e classe. Ses deux autres points de coupe avec elle sont les points conjugués des points doubles de la base multiple.

Les tangentes par ces points de coupe sont les droites qui joignent les points doubles avec leurs homologues respectifs. (Voir fig. 9).

Dualistiquement nous pouvons dire qu'une courbe de la 3e classe à tangente double est complètement déterminée avec la tangente double et six tangentes simples, car nous pouvons prendre une des tangentes simples comme base d'une division simple et la tangente multiple comme base d'une division double, puis former un groupe de la (2 + 1)e classe avec ces deux ponctuelles. Le groupe permet de déterminer toutes les autres tangentes de la courbe. De ceci, et des lois importantes des points de tangence nous pouvons dire :

Tangentes par un point quelconque d'une courbe du 3e degré à point double :

Par un point quelconque d'une courbe du 3e degré à point double on peut mener trois tangentes à cette courbe.

1° La tangente dont le point de tangence est le point donné. On l'obtient en considérant le point donné comme sommet d'un faisceau simple homographique avec le faisceau double du point double et en menant de ce point la tangente encore possible à la conique auxiliaire. Cette tangente est toujours réelle et son dernier point de coupe avec la courbe facilement déterminable.

2° Les deux tangentes passant par le point considéré mais dont les points de tangence sont différents de lui. On les obtient en joignant ce point aux points de coupe de la conique auxiliaire avec la seconde base qui a servi à l'établir. Le point de tangence de ces droites est sur les rayons doubles du deuxième faisceau. Il est à remarquer que ces deux tangentes peuvent être réelles ou imaginaires ou confondues.

Nous pouvons donc ajouter, puisque par chaque point de la courbe on peut lui mener trois tangentes :

Points de coupe d'une tangente quelconque d'une courbe de 3e classe à tangente double avec cette courbe :

Une tangente simple quelconque d'une courbe de 3e classe à tangente double possède trois points de coupe avec celle-ci. Ce sont :

1° Son point de tangence avec la courbe. On l'obtient en considérant la tangente donnée comme base d'une ponctuelle simple homographique avec celle de la tangente double et qui est une ponctuelle double. Le point de coupe de cette droite avec la conique auxiliaire, différent du point de départ donne ce point de tangence.

Ce point est toujours réel, et par ce même point il existe une seconde tangente que l'on sait déterminer.

2° Les autres points communs à la courbe de 3e classe et à la tangente considérée sont les points de coupe de cette tangente avec les deux tangentes de la conique auxiliaire menée par le sommet du faisceau double relatif à celle-ci.

Les tangentes en ces points sont les droites qui les joignent aux points doubles de la ponctuelle sur la tangente double. Il est à remarquer que ces deux derniers points de coupe de la tangente simple avec la courbe peuvent être réels ou imaginaires et dans un cas limite confondus.

Nous pouvons donc dire que

chaque tangente simple a quatre points communs déterminés avec la courbe :

La courbe du troisième degré à point double est une courbe de la quatrième classe.

Une courbe de la troisième classe à tangente double est une courbe du quatrième degré.

Coniques auxiliaires.

La conique auxiliaire dépend comme on l'a vu des deux rayons homologues sur lesquels on prend les bases.

Toutes les coniques auxiliaires ont donc trois tangentes communes avec la courbe du troisième degré. Ce sont les deux tangentes par le point double et la tangente avec son point de tangence au sommet du faisceau simple.

Le rayon du faisceau simple sur lequel on prend la division double auxiliaire est également une tangente de cette conique. Son point de tangence est aussi son point de coupe avec son second rayon conjugué. C'est donc un point de la courbe du troisième degré. La conique auxiliaire correspondant à ce même rayon et à son autre rayon conjugué aura comme point de tangence sur le rayon dont nous causons, le point de coupe avec le premier rayon conjugué. Il est à remarquer que cette conique et la précédente auraient alors quatre tangentes communes.

Coniques auxiliaires.

La conique auxiliaire relative aux courbes de classe dépend des faisceaux construits par les points homologues D_1 et D.

Toutes les coniques auxiliaires auront donc trois points communs avec la courbe de la troisième classe. Ce sont les deux points de tangence de la tangente double et le point de tangence de la tangente utilisée comme base simple.

Le sommet D du faisceau double auxiliaire est également sur la conique. La tangente menée par ce point donne son deuxième conjugué D_2 sur la base double. C'est donc une tangente de la courbe de troisième classe.

La conique auxiliaire correspondant aux faisceaux de sommets D et D_2 passera également par D, mais cette conique aurait comme tangente en D la droite DD_2 tangente de la courbe de troisième classe. Comme précédemment nous pouvons dire que ces deux coniques auxiliaires ont alors quatre points communs.

Intersection d'une droite quelconque avec une courbe du 3e degré à point double.

Toute droite coupant les deux faisceaux d'un groupe du (2 + 1)e degré dont dépend la courbe considérée du troisième degré à point double, rencontre ces faisceaux suivant deux divisions du (2 + 1)e degré situées sur la même base et homographiques l'une à l'autre.

Les points de coupe avec les cinq paires de rayons homologues donne cinq paires de points, également homologues et suffisants pour déterminer les ponctuelles.

Chaque point de coupe de la transversale avec la courbe correspond évidemment à deux points homologues confondus des divisions de même base. Ces points homologues sont les points doubles du troisième degré des ponctuelles à base commune. Comme elles ont trois de ces points possibles, nous en concluons que toute droite à trois points de coupe avec la courbe du troisième degré à point double, et ceux-ci peuvent être déduits des cinq paires de points homologues fondamentaux d'après les méthodes que nous avons indiquées.

Tangentes d'une courbe de 3e classe à tangente double menées par un point quelconque.

En joignant tous les points des deux ponctuelles formant un groupe de la (2 + 1)e classe dont dépend la courbe considérée, de la 3e classe à tangente double, avec un point quelconque, on forme évidemment deux faisceaux concentriques du (2 + 1)e degré, homographiques l'un à l'autre.

Les cinq paires de points homologues donnés entraînent cinq paires de rayons homologues des faisceaux, au moyen desquelles on peut complètement déterminer ceux-ci.

Toute tangente de la courbe passant par le point considéré correspond évidemment à deux rayons homologues confondus des faisceaux concentriques. Ces rayons sont les rayons doubles du troisième degré des faisceaux. Ceux-ci ont trois de ces rayons possibles, d'où nous en concluons que par un point quelconque on peut mener trois tangentes à une courbe de la 3e classe à tangente double et ces tangentes peuvent être déduites des cinq paires de rayons fondamentaux des faisceaux concentriques. Il est bon de remarquer que deux tangentes peuvent être imaginaires et dualistiquement deux points de coupe dans l'autre courbe aussi.

Autres constructions.

La courbe du troisième degré

Autres constructions.

Les ponctuelles qui engen-

et les tangentes dont nous causons peuvent être construites encore d'une autre manière.

Si les éléments donnés sont : S_1a — S_2a_1 ; S_1a — S_2a_2 ; S_1b — S_2b_1 ; S_1b — S_2b_2 ; et S_1c — S_2c_1 le faisceau double en S_2 contient deux paires de rayons et comme il forme une involution, on peut le couper par une circonférence arbitraire passant par S_2. Les drent la courbe de 3e classe que nous considérons, peuvent être données par les points :

$$aA_1aA_2\ ;\quad bB_1bB_2\quad \text{et}\quad cC_1\ .$$

La ponctuelle $A_1A_2B_1B_2$ dont chaque paire est homologue des points *abc* ..... forme comme nous le savons une involution. Cette involution peut être construite avec un cercle auxiliaire

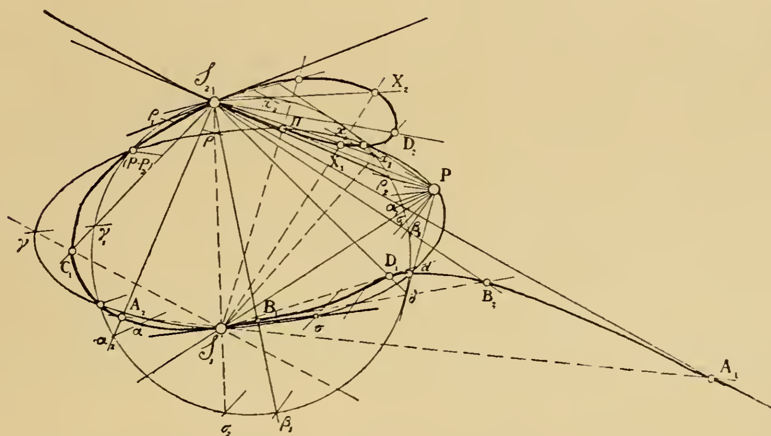


Fig. 10.

points de coupe des rayons, soient a_1a_2 ; b_1b_2 ; ... donnent un faisceau de sommet P, dont chaque rayon correspond à une paire de l'involution en S_2. Le faisceau simple de sommet S_1 devient ainsi homographique avec le faisceau simple de sommet P et ils engendrent une conique. Cette courbe est donnée par cinq points.

On peut construire toutes les autres paires d'éléments homologues des faisceaux primitifs tangent de la base double. Les tangentes de ce cercle par les points correspondants de l'involution donnent d'autres points de coupe $\alpha\beta\gamma$ ... situés sur une même droite et forment une ponctuelle sur celle-ci. Cette ponctuelle est homographique avec la ponctuelle simple *abc* ... Elles engendrent donc ensemble une conique dont elles donnent les cinq tangentes fondamentales.

Toute tangente à la conique

au moyen de transversales menées par P. Chaque transversale donne trois points dont deux x_1 et x_2 sur le cercle et un sur la conique x. Les premiers joints à S_2 et le dernier à S_1 forment les rayons S_2x_1 et S_2x_2 homologues de S_1x. (Voir fig. 10.)

auxiliaire menée par un point ξ de $\alpha\beta$ donne x sur la base simple. Les tangentes au cercle menées par ξ donnent X_1 et X_2 sur la base double comme points conjugués de x. Les droites xX_1 et xX_2 sont ainsi de nouvelles tangentes de notre courbe de la troisième classe à tangente double. (Voir fig. 11.)

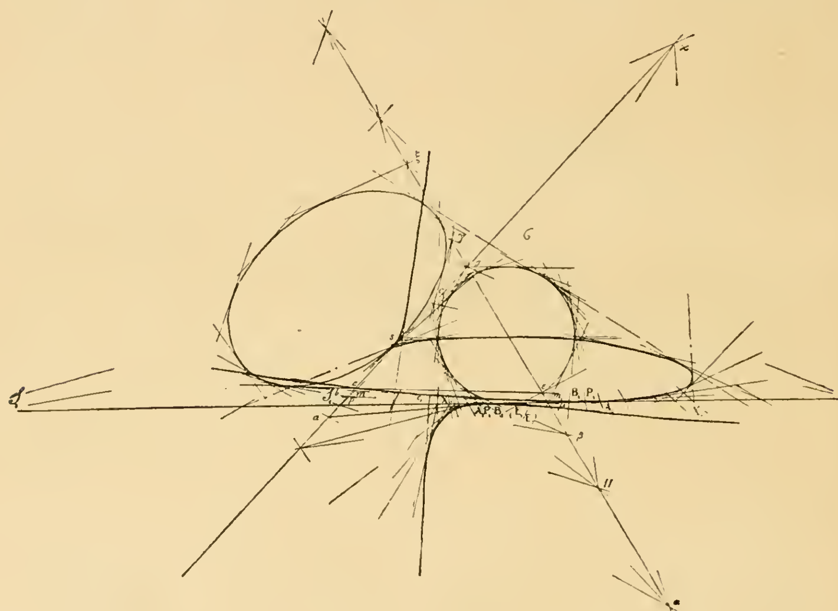


Fig. 11.

Pour obtenir les tangentes par le point double, considérons S_1S_2 du faisceau simple donnant ϱ sur la conique, $P\varrho$ sera l'homologue dans le faisceau P. Celui-ci donnera ϱ_1 et ϱ_2 sur le cercle; donc $S_2\varrho_1$ et $S_2\varrho_2$ seront les rayons homologues de S_1S_2 dans le faisceau S_2.

Ce seront les tangentes de la

Les points de tangence de la tangente double seront ses points de coupe avec les tangentes infiniment voisines ou autrement dit les points conjugués sur la base double du point de coupe p des deux bases. Ce seront P_1 et P_2. C'est la tangente $p\pi$ de la conique qui donne π sur $\alpha\beta$, duquel on mène deux

courbe du troisième degré par le point double.

On obtient la tangente en S_1 au moyen du rayon S_2S_1 donnant σ_2 sur le cercle ; $P\sigma_2$ donne encore σ_1 et σ. Le rayon $S_1\sigma$ est ainsi l'homologue des rayons S_2S_1 et $S_2\sigma_1$. C'est la tangente de la courbe en S_1.

Les rayons doubles de l'involution en S_2 résultent des tangentes du cercle par P ; — $P\delta$ est une de ces tangentes. Elle donne d sur la conique ; S_1d est son rayon conjugué en S_1 ou le rayon homologue des rayons doubles du faisceau S_2. Le point de coupe de ces rayons, soit D_1 montre que S_1d ou S_1D_1 a deux points de coupe avec la courbe confondus en D_1. C'est donc une tangente de cette courbe en D_1 et passant par S_1. L'autre tangente par S_1 correspond au point de tangence D_2.

Le cercle et la conique auxiliaire ont quatre points de coupe pouvant être imaginaires deux à deux. Ces points sont aussi les points de coupe de deux rayons homologues comme S_1p et S_2p_2. Ils sont donc des points de la courbe du troisième degré. Cette courbe peut avoir six points communs avec la conique. Le cinquième est S_1 puis le sixième qui doit toujours être réel est donné par le point de coupe du rayon S_2P avec son homologue $S_1\pi$. Le rayon $S_1\pi$ a encore un point sur la courbe, c'est son intersection avec la tangentes au cercle : πP_1 et πP_2.

Le point de tangence de la base simple est un point s conjugué des points S_1 et S_2 de la base double. S_1 étant le point de coupe des deux bases. La tangente du cercle par S_1 soit $S_1\sigma$ donne σ sur $\alpha\beta$. De ce point on mène une tangente au cercle pour avoir S_2 et une à la conique pour obtenir s.

Les points doubles de l'involution $A_1A_2B_1B_2$ ... proviennent des points de coupe de $\alpha\beta$ avec le cercle. Leurs homologues sur la base simple sont les points de coupe de celle-ci avec la courbe de la troisième classe. En outre la tangente menée par un point double et son homologue représente deux tangentes confondues se coupant dans le point de la base simple. Il en résulte donc que ce point de la base simple est le point de contact de cette tangente.

Le cercle et la conique auxiliaire ont quatre tangentes communes pouvant être imaginaires deux à deux. Ces tangentes sont également des tangentes de la courbe de 3e classe. Celle-ci peut en avoir six qui lui sont communes avec la conique auxiliaire. La base simple abc ... est une cinquième tangente commune. La sixième sera donc toujours réelle. Si nous considérons la droite $\alpha\beta$, elle coupe la base double en m_1 ou μ le conjugué sur cette base est m_2 le point de tangence du cercle auxiliaire et le conjugué sur la

gente du cercle en S_2. (Voir fig. 10).

La conique auxiliaire dépend du cercle primitivement tracé. Si on laisse le sommet S_1 du faisceau simple se déplacer sur la courbe du 3e degré la conique auxiliaire change, mais passe toujours par les quatre points de coupe du cercle avec la courbe, autres que S_2.

base simple est m. La tangente mm_1 de la conique est en même temps tangente de la courbe de 3e classe. C'est la sixième tangente considérée. (Voir fig. 11.)

La conique auxiliaire dépend du cercle. Si on choisit une autre tangente simple que celle qu'on a prise la conique change aussi mais conserve toujours les quatre mêmes tangentes communes avec le cercle et la courbe de 3e classe.

III

ASYMPTOTES ET TANGENTES PARALLÈLES

Asymptotes des courbes du 3e degré à point double.

Le problème des asymptotes de ces courbes comprendra deux parties. D'abord on établira la direction des points à l'infini, et en second lieu on déterminera les tangentes par ces points.

Les points à l'infini proviendront de rayons homologues parallèles. Pour avoir leur direction, menons en S_2 des rayons parallèles à ceux de S_1. Nous formerons ainsi deux faisceaux concentriques homographiques du $(2 + 1)^e$ degré. Les rayons doubles du 3e degré de ces faisceaux correspondront aux rayons homologues parallèles.

Tangentes et points de tangence des courbes de 3e classe parallèlement à une direction donnée.

Ce problème se compose également de deux parties. Il faut en premier lieu trouver les tangentes en direction puis en second lieu déterminer les points de tangence.

La courbe sera donnée dans la fig. 12, par les cinq paires de tangentes A_1a — B_1b — C_1c — D_1d — E_1e.

La direction de la ou des tangentes parallèles est donnée par xx'. Nous en sommes ramenés à chercher les tangentes de la courbe pour le point à l'infini sur cette direction. On joint les points des deux ponctuelles avec ce point. On forme ainsi des

Dans la fig. 12 la courbe est donnée par les faisceaux en S_2 et S_1 correspondant aux cinq points ABCDE.

Les parallèles en S_2 aux rayons de S_1 sont désignées par 1, 2, 3, 4 et 5. Les faisceaux concentriques en S_2 ont donné un rayon double du 3e degré *kk*. Celui-ci donne donc une direction asymptotique de la courbe.

Nous obtiendrons maintenant l'asymptote correspondante en formant un nouveau faisceau simple dont le sommet est à l'infini sur la direction *kk* et dont les rayons passent par les points de la courbe ABCDE.

Le rayon V par E de ce faisceau coupera les rayons du faisceau S_2 en cinq points. Le rayon e_1 du faisceau S_2 coupera les parallèles en cinq autres points homologues des premiers. La ponctuelle sur V. E sera une ponctuelle double; celle sur e_1 une ponctuelle simple homographique avec la première. Ensemble elles engendrent une conique qui peut servir de conique auxiliaire pour la courbe du 3e degré.

La tangente de cette conique menée par le sommet M_∞ *du faisceau simple sera comme nous l'avons vu antérieurement la tangente de la courbe du 3e degré par* M_∞. *Ce sera donc une*

faisceaux homographiques concentriques du $(2 + 1)^e$ degré ou sur la base double, des divisions homographiques formant un groupe de la $(2 + 1)^e$ classe. Les points doubles du 3e degré de ces divisions correspondent aux rayons de même nature des faisceaux de rayons parallèles et donnent ainsi les tangentes parallèles à la direction considérée.

Par M dans la fig. 12, nous avons une de ces tangentes. Sa construction étant développée par des méthodes connues.

Nous considérons ensuite la division simple déterminée sur la nouvelle tangente par les tangentes de la courbe de 3e classe issues des points de la ponctuelle double. Ce sont I, II, III, IV et V. En prenant deux points homologues C_1 et III comme sommets de deux faisceaux auxiliaires

$$\text{III}(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1; \ldots)$$

et

$$C_1(\text{I}, \text{II}, \text{III}, \text{IV}, \text{V} \ldots)$$

formés avec les ponctuelles, nous obtenons une conique donnée par cinq points 1, 2, 3, 4 et 5. Cette conique auxiliaire peut servir à la construction de la courbe de 3e classe.

Le point de cette conique avec la tangente simple (Tg) *menée parallèlement à la direction* xx' *sera comme nous le savons le point de tangence de la droite avec la courbe de 3e classe.*

asymptote. Elle est marquée (As).

Comme on connaît cinq tangentes de la conique auxiliaire considérée et la direction de la sixième, on peut construire celle-ci par le théorème de

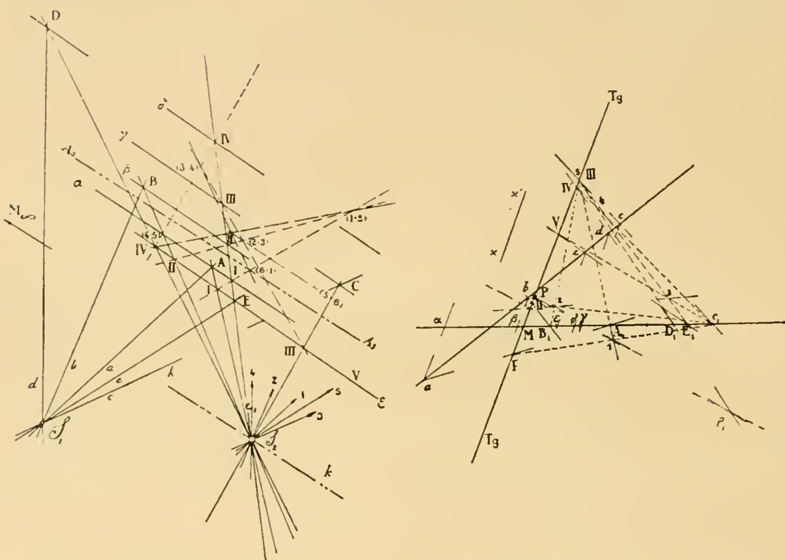


Fig. 12.

Brianchon sans tracer la conique.

Il ressort de ce qui précède que *la courbe du 3e degré à point double a trois asymptotes dont deux peuvent être imaginaires.*

Ce point est marqué P. Nous avions donc cinq points de la conique et la direction passant par le sixième. Nous avons cherché celui-ci par le théorème de Pascal sans construire la conique.

Il est donc évident d'après ces observations qu'*il y a trois tangentes de la courbe de la troisième classe parallèles à la direction donnée. Deux d'entre elles peuvent être imaginaires.*

L. Crelier (Bienne).

SUR LES PROJECTIONS DES DROITES PERPENDICULAIRES

Il y a des questions de Géométrie descriptive qui peuvent se résoudre d'une seule manière et par un procédé simple, lorsque on emploie une certaine méthode de représentation, tandis que, si on se sert d'autres méthodes, on n'en vient à bout qu'en ayant recours à des artifices très variés. C'est dans cette condition particulière que se trouve la question traitée récemment dans cette *Revue* par MM. Lehr (T. IX, 1907, p. 119) et Majcen (Id., p. 460); elle se résoud en deux mots, si on se sert de la méthode de la projection centrale. tandis que, dans la méthode de Monge, elle n'a aucune de ces solutions qu'on dirait *nécessaires*. Qu'il me soit donc permis d'ajouter une troisième solution aux deux solutions découvertes par les géomètres cités. Elle est basée sur un raisonnement analogue à celui qui m'a fourni (*Periodico di matematica per l'insegnamento secondario*, III Série, T. 2, 1904-1905, p. 41; *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, I. Band, Leipzig 1907, p. 54) la détermination des droites bissectrices des angles formés par deux droites données ou des plans bissecteurs des angles dièdres formés par deux plans donnés.

Comme cela est permis, je suppose que les droites r, r_1 dont on cherche la condition de perpendicularité se coupent en un point O et je m'appuierai sur les deux propositions suivantes, que tout le monde connaît :

a) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit est que le plan de projection soit parallèle à un des côtés de l'angle.

b) Deux droites concourantes r, r_1 sont perpendiculaires entre elles lorsque elles se correspondent dans l'involution circulaire (ou orthogonale) Ω existant dans le faisceau de

rayons situé dans le plan $\omega \equiv r\, r_1$ et dont le centre est le point $O \equiv r r_1$.

Cela posé, soit (voyez la figure) $r\,(r' , r'')$ et $r_1\,(r'' , r''')$ les deux droites données; si on joint par une droite les points

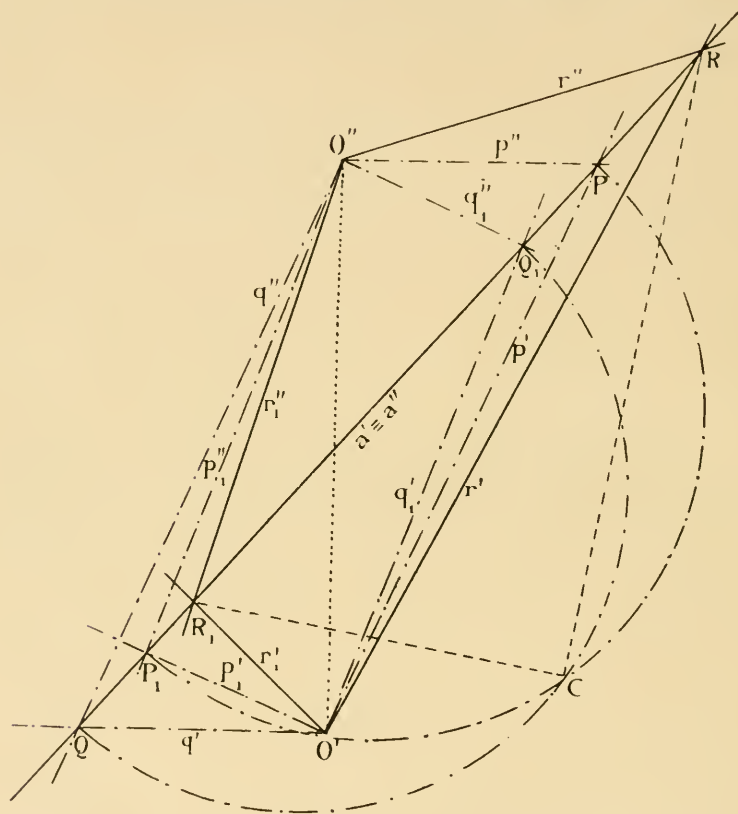


Fig. 1.

$r'\, r'' \equiv$ R et $r_1{}'\, r_1{}'' \equiv$ R$_1$, on obtient l' « axe d'affinité » du plan ω, c'est-à-dire le lieu des points où se coupent les couples de projections des droites de ce plan.

Dans le faisceau (O , ω) considérons les deux droites p, p_1 qui sont perpendiculaires entre elles et dont la première est parallèle au plan horizontal ; on sait que p'' est parallèle à la ligne de terre, ou bien (pour éviter le tracé de cette droite)

perpendiculaire à la droite O′ O″, tandis que p' est la droite qui joint O′ au point P ou p'' coupe l'axe d'affinité du plan donné. À cause du théorème *a*) p'_1 sera la normale menée par O′ à p' et on obtiendra p''_1 en joignant O″ au point P_1 ou p'_1 coupe l'axe d'affinité du plan ω.

D'une manière tout à fait analogue, on trouve les projections horizontales et verticales des deux droites q, q_1 menées par le point O dans le plan ω, qui sont perpendiculaires entre elles et dont la première est parallèle au plan vertical de projection.

Les deux couples de droites p' p'_1, q' q'_1 déterminent une involution (elliptique) qui est la projection Ω′ de l'involution circulaire Ω; et les deux couples p'' p'', q'' q''_1 en déterminent une autre Ω″ qui est la projection verticale de la même involution Ω. Or, si on applique le théorème *b)*, on voit de suite que r et r_1 seront perpendiculaires entre elles lorque r″ et r'_1 seront des rayons correspondants dans l'involution Ω′ (ou bien si r'' et r''_1 se correspondent en Ω″) et alors seulement.

Cette condition peut s'énoncer d'une autre façon. En effet, si on appelle Q et Q_1 les points $q'q''$ et $q'_1q''_1$, il est évident que pour la perpendicularité des droites r et r_1 il est nécessaire et suffisant que les points R, R_1 se correspondent dans l'involution (elliptique) déterminée par les couples PP_1, QQ_1; si, donc, le couple RR_1 ne sépare pas le couple PP_1 (ou le couple QQ_1) on peut tout de suite affirmer que les droites rr_1 ne sont pas perpendiculaires entre elles. Mais si cela n'a pas lieu, comme les segments PP_1, QQ_1 se séparent, les cercles dont ils sont les diamètres se coupent en deux points réels; soit C un de ces points; les angles $\widehat{PCP_1}$ et $\widehat{QCQ_1}$ étant droits, il s'ensuit que *les droites r et r_1 seront perpendiculaires entre elles lorsque l'angle* $\widehat{RCR_1}$ *est lui-même droit, et seulement alors.*

Cette condition et les constructions nécessaires pour s'en servir ne me semblent pas plus compliquées que celles proposées par MM. Lehr et Majcen et les principes que j'ai appliqués ne me paraissent pas plus difficiles et moins connus que ceux sur lesquels ils se sont appuyés; c'est ce qui me

décide à publier cette courte note. Pour terminer je crois utile de faire remarquer qu'elle semble confirmer l'opinion que *les solutions les plus naturelles dans la base et les plus simples dans l'exécution de questions de Géométrie descriptive (élémentaire) s'obtiennent par l'emploi des théories de la Géométrie de position.*

Gino LORIA (Gênes).

SUR LE CHANGEMENT DE VARIABLE DANS LES DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

La détermination directe de la $m^{\text{ième}}$ dérivée, si importante dans les applications de la série de Taylor, spécialement pour la discussion du reste, se heurte à des difficultés sérieuses qui ne peuvent guère être vaincues que dans quelques cas particuliers. On me permettra de citer ici, comme pouvant quelquefois rendre de bons services dans ce genre de question, une formule aussi simple que peu connue.

Soient une fonction $y = f(x)$ de la variable x, $\mathrm{F}(y)$ une *fonction de fonction*, suivant la terminologie en usage dans les éléments du Calcul différentiel. On demande d'exprimer la $m^{\text{ième}}$ dérivée par rapport à x, $\dfrac{d^m}{dx^m}\mathrm{F}(y)$, par des dérivées relatives à la variable y. La réponse à ce problème est contenue dans la formule

$$\frac{d^m}{dx^m}\mathrm{F}(y) = \frac{\partial^m}{\partial y^m}\mathrm{F}(y)\,\varphi'(y)\left(\frac{y-f}{\varphi-x}\right)^{m+1}, \qquad (1)$$

dont voici la signification. La fonction inverse de f est désignée par φ, de sorte que l'équation $y = f(x)$ se résout ainsi $x = \varphi(y)$; en outre, il faut au second membre de (1), calculer d'abord les dérivées en y, sans toucher à x, puis remplacer dans le résultat y par $f(x)$, ou x par $\varphi(y)$.

Commençons par donner quelques exemples de la formule dont il s'agit ; nous représentons constamment par β le quotient

$$\beta = \frac{y - f}{\varphi - x} .$$

1° Exemple. — y étant liée à x par la relation

$$y - x\psi(y) = a ,$$

on demande de déterminer le terme général de la série de Lagrange par laquelle $F(y)$ est développée suivant les puissances de x ; autrement dit on cherche l'expression $\frac{d^m}{dx^m} F(y)$ pour la valeur particulière $x = 0$.

Ici $\varphi(y) = \frac{y - a}{\psi(y)}$, $\varphi'(y) = \frac{\psi - (y - a)\psi'}{\psi^2}$; $f(x)$ ne saurait être obtenu explicitement, mais comme il suffit d'avoir β quand $x = 0$, $f(x)$ se remplacera par a, et β par $\psi(y)$. On a alors en vertu de (1), pour $x = 0$,

$$\frac{d^m}{dx^m} F(y) = \frac{\partial^m}{\partial y^m} F(y)\psi^{m-1}(y)[\psi - (y - a)\psi'] ,$$

étant bien entendu que la lettre y sera remplacée, après dérivation, par sa valeur a. Le second membre s'écrit évidemment

$$\frac{d^m}{da^m} F(a)\psi^m(a) - m \frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} F(a)\psi^{m-1}(a)\psi'(a) .$$

puis

$$\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} [F'(a)\psi^m(a) + mF(a)\psi^{m-1}(a)\psi'(a) - mF(a)\psi^{m-1}(a)\psi'(a)] ,$$

et enfin

$$\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} F'(a)\psi^m(a) ;$$

c'est le résultat connu.

2° Exemple.

$$y = \frac{1}{x} , \quad x = \frac{1}{y} , \quad \beta = -\frac{y}{x} .$$

On a immédiatement

$$\frac{d^m}{dx^m} F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^m}{x^{m+1}} \frac{d^m}{dy^m} F(y) y^{m-1} =$$

$$\frac{(-1)^m}{x^{m+1}} \sum \binom{m}{p} (m-1) \dots (m-q) y^{m-1-q} F^{(p)}(y),$$

et dans la somme, il faut prendre pour p et q toutes les solutions entières et positives de l'équation $p + q = m$. Le résultat définitif se lira plutôt

$$\frac{d^m}{dx^m} F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^m}{x^{2m}} \sum \binom{m}{p} (m-1)(m-2) \dots (m-q) x^q F^{(p)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

3° *Exemple.*

$$y = \frac{x}{x-1}, \quad x = \frac{y}{y-1}, \quad \beta = \frac{y-1}{1-x}.$$

On a de même

$$\frac{d^m}{dx^m} F\left(\frac{x}{x-1}\right) =$$

$$\frac{(-1)^m}{(x-1)^m} \sum \binom{m}{p} (m-1)(m-2) \dots (m-q)(y-1)^{m-1-q} F^{(p)}(y) =$$

$$\frac{(-1)^m}{(x-1)^{2m}} \sum \binom{m}{p} (m-1)(m-2) \dots (m-q) \frac{F^{(p)}(y)}{(x-1)^q}.$$

4° *Exemple.*

$$y = \sqrt{x}, \quad x = y^2, \quad \beta = \frac{y - \sqrt{x}}{y^2 - x} = \frac{1}{y + \sqrt{x}}.$$

Ainsi, par un calcul des plus simples,

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{F(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} =$$

$$2(-1)^m \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{(m-p+1)(m-p+2) \dots (2m-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \frac{F^{(p)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{2m-p+1}},$$

et l'on aurait de même pour le cas $y = \sqrt[3]{x}$

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{F(\sqrt[3]{x})}{x^{2/3}} = 3 \frac{d^m}{dy^m} \frac{F(y)}{(y^2 + ay + a^2)^{m+1}} \quad \text{avec} \quad \sqrt[3]{x} = a.$$

5° *Exemple.* — Prenons $\varphi(y) = \frac{h_2}{h_1}$, égal au quotient de deux polynomes quadratiques $h_1 = a_1y^2 + b_1y + c_1$, et $h_2 = a_2y^2 + b_2y + c_2$. Dans le faisceau $h_2 - xh_1$ existent, on le sait, deux carrés parfaits correspondant aux racines de l'équation

$$g(x) = (b_2 - b_1x)^2 - 4(a_2 - a_1x)(c_2 - c_1x) = 0 .$$

En même temps les points doubles de l'involution, autrement dit les valeurs de y correspondant à ces racines sont données directement par l'équation $H = h_1h'_2 - h_2h'_1 = 0$; on sait que $\sqrt{g(x)} = \frac{H}{h_1}$, et, de plus, $\varphi'(y) = \frac{H}{h_1^2}$. Si f_2, f_1 sont les deux solutions tirées pour y de la relation $h_2 - xh_1 = 0$, on a évidemment

$$f_1 - f_2 = \frac{\sqrt{g(x)}}{a_2 - a_1x}$$

$$\beta = h_1 \frac{y - f_1}{h_2 - h_1x} = \frac{h_1}{(a_2 - a_1x)(y - f_2)} .$$

Ainsi

$$\frac{d^m}{dx^m} F(y) = \frac{1}{(a_2 - a_1x)^{m+1}} \frac{\partial^m}{\partial y^m} \frac{F(y)Hh_1^{m-1}}{(y - f_2)^{m+1}} ;$$

par suite, si l'on pose pour abréger $F(y)Hh_1^{m-1} = \psi(y)$, on aura en exécutant les dérivations et remplaçant y par $f_1(x)$,

$$(a_2 - a_1x)^{m+1} \frac{d^m}{dx^m} F(y) =$$

$$\sum_0^m (-1)^{m-p} \frac{(m-p+1)(m-p+2)\dots(2m-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \psi^{(p)}(y) \left(\frac{a_2 - a_1x}{\sqrt{g(x)}}\right)^{2m+1-p} .$$

Si, par exemple, on prend $\psi(y) = 1$, on obtient la formule remarquable

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{h_1^m \sqrt{g(x)}} = (-1)^m \frac{(m+1)(m+2)\dots 2m}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} (a_2 - a_1x)^m .$$

Démonstration. — Venons maintenant à la démonstration de la formule (1); elle s'obtient d'abord comme une consé-

quence immédiate de l'intégrale de Cauchy envisagée dans la théorie des fonctions. La démonstration que voici, plus générale et pour le moins aussi simple, ne réclame que les éléments du calcul différentiel.

Soit, comme plus haut, β le rapport $\dfrac{y-f}{\varphi - x}$ dont la limite est $\alpha = f'(x)$, quand y s'approche de x. On a

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{y - f - \alpha(\varphi - x)}{(\varphi - x)^2} = \frac{\beta - \alpha}{y - f}\,\beta,$$

identité qui peut s'écrire aussi

$$\beta^m(\beta - \alpha) = (y - f)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta^m}{m}\right);$$

multiplions-en les deux membres par le produit $\varphi' F$, puis différentions m fois par rapport à y, il vient

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}(F\varphi'\beta^{m+1}) = \alpha\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\,F\varphi'\beta^m + (y - f)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(F\varphi'\,\frac{\beta^m}{m}\right) + m\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\left(F\varphi'\,\frac{\beta^m}{m}\right).$$

Si l'on fait maintenant $y = f$, ce qui donne

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha\,\frac{\partial}{\partial y},$$

le second terme disparaît et il vient

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}(F\varphi'\beta^{m+1}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\,\frac{\partial}{\partial y}\right)F\varphi'\beta^m = \frac{d}{dx}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\,(F\varphi'\beta^m).$$

Donc, si l'équation (1) est satisfaite pour $m = 0$, elle demeure exacte pour toute valeur de m ; il en est bien ainsi, puisque $F\varphi'\beta$ tend vers $F\varphi'\alpha = F$.

Comme on le voit, la démonstration repose en définitive sur l'hypothèse que les différentes quantités telles que $\dfrac{\partial^n}{\partial y^n}\beta^m$ ou $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial^n}{\partial y^n}\beta^m$ admettent des limites finies quand y tend vers $f(x)$; voici sur ce point quelques remarques presque évidentes.

Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont toutes les deux finies, avec

leurs dérivées d'ordre quelconque, dans un intervalle comprenant les points a et b, et que de plus $\varphi'(a)$ soit différent de zéro, les expressions

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial b^m \partial a^n}\left(\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\right)^s \tag{2}$$

où s est un entier positif, atteignent chacune une limite finie quand b tend vers a. Cela résulte simplement du fait que le rapport

$$\left(\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\right)^s$$

étant ordonné suivant les puissances de $b-a$, commence par le terme fini $\left(\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}\right)^s$; les coefficients seront d'ailleurs évidemment des fonctions entières de $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ ... ; $\varphi''(a)$, $\varphi'''(a)$ ... et contiendront en diviseur la seule quantité $\varphi'(a)$.

Pour calculer les diverses quantités telles que (2), on emploiera le moyen suivant. Soient $B_{m,n}$ l'expression (2) et $A_{m,n}$ sa limite ; puisqu'on doit faire finalement $b=a$, on a $\frac{d}{da}=\frac{\partial}{\partial b}+\frac{\partial}{\partial a}$, donc

$$\frac{dA_{m,n}}{da}=A_{m,n+1}+A_{m+1,n} \quad \text{ou} \quad A_{m,n+1}=\frac{d}{da}A_{m,n}-A_{m+1,n}$$

formule récurrente par laquelle la détermination de $A_{m,n}$ est ramenée à celle de $A_{m,0}$ ou A_m.

Quant à cette dernière, remarquons que, quelle que soit la fonction $f(x)$,

$$\frac{\partial^m}{\partial b^m}\left(f(b)-f(a)\right)^s$$

a pour limite la quantité, où D désigne le symbole de dérivation,

$$\Delta^m f = D^m f^s(a) - \frac{s}{1} f(a) D^m f^{s-1}(a) + \frac{s(s-1)}{1.2} f^2(a) D^m f^{s-2}(a) - \dots,$$

et il est clair que, le développement de $(f(b)-f(a))^s$ commençant par le terme $f'^s(b-a)^s$, on aura en particulier $\Delta^m f = 0$ quand m est inférieur à s, et $\Delta^s f = s!(f'(a))^s$ pour $m=s$.

Or en écrivant $B_{m,0}$, ou B_m, sous la forme

$$B_m = \frac{\partial^m}{\partial b^m} \left(\varphi(b) - \varphi(a)\right)^s \left(\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\right)^s,$$

et dérivant par la règle des facteurs, on a, après avoir fait $b = a$,

$$\sum_{(p)} \binom{m}{p} A_p \Delta^q \varphi = \Delta^m f, \quad p + q = m.$$

Cette formule se réduit à l'identité $0 = 0$ pour tout $m < s$; en donnant à m les valeurs successives s, $s+1$, $s+2$, ... et supprimant les termes $\Delta^q \varphi$ nuls parce que $q < s$, on obtient le tableau

$$\left.\begin{aligned} A_0 \Delta^s \varphi &= \Delta^s f \\ (s+1) A_1 \Delta^s \varphi + A_0 \Delta^{s+1} \varphi &= \Delta^{s+1} f \\ \frac{(s+1)(s+2)}{2} A_2 \Delta^s \varphi + \frac{s+2}{1} A_1 \Delta^{s+1} \varphi + A_0 \Delta^{s+2} \varphi &= \Delta^{s+2} f. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

qui donnera A_0, A_1, A_2, ... par des formules où apparaît comme seul diviseur la quantité $\Delta^s \varphi = s!\,(\varphi'(a))^s$, ou l'une de ses puissances. Si, par exemple, $\varphi(x) = x$, et qu'il s'agisse de trouver

$$A_m = \lim \frac{\partial^m}{\partial b^m} \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)^s,$$

tous les $\Delta^m \varphi$ sont nuls à l'exception de $\Delta^s \varphi = s!$, et par suite

$$\lim \frac{\partial^m}{\partial b^m} \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)^s = \frac{s!}{(s+m)!} \Delta^{s+m} f,$$

résultat facile à obtenir directement.

Dans le cas de la formule (1) qu'on mettra également sous la forme

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{F(y)}{\varphi'(y)} = \sum \binom{m}{p} A_p^{m+1} F^{(m-p)}, \qquad (4)$$

on a

$$s = m + 1, \quad A_p^{m+1} = \lim \frac{\partial^p}{\partial y^p} \beta^{m+1}, \quad \Delta^{m+1} f = (m+1)!$$

et pour toute autre valeur de n, $\Delta^n f = 0$; comme on a d'autre part $\Delta^p \varphi = \lim_{y=f} \frac{\partial^p}{\partial y^p} (\varphi - x)^{m+1}$, le tableau (3) devient

$$A_0^{m+1} \Delta^{m+1} \varphi = (m+1)!$$

$$(m+2) A_1^{m+1} \Delta^{m+1} \varphi + A_0^{m+1} \Delta^{m+2} \varphi = 0$$

$$\frac{(m+3)(m+2)}{2} A_2^{m+1} \Delta^{m+1} \varphi + \frac{m+3}{1} A_1^{m+1} \Delta^{m+2} \varphi + A_0^{m+1} \Delta^{m+3} \varphi = 0.$$

. . . .

En différentiant d'ailleurs la formule (4) par rapport à x, on obtient pour déterminer les coefficients A_p^m une nouvelle loi de récurrence

$$m\varphi' A_p^{m+1} = (m-p-1) A_p^m + p \frac{d}{dy} A_{p-1}^m ,$$

ou, si l'on veut,

$$m A_p^{m+1} = (m-p-1) f' A_p^m + p \frac{d}{dx} A_{p-1}^m .$$

J'ajoute que la formule (1) s'étend aisément au cas du changement de plusieurs variables indépendantes. S'il y en a deux

$$x_1 = f_1(y_1, y_2) \quad \text{et} \quad x_2 = f_2(y_1, y_2) ,$$

donnant inversement

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) ,$$

on aura par exemple

$$\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} F(y_1, y_2) = \frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial y_1^{m_1} \partial y_2^{m_2}} F J \beta_1^{m_1+1} \beta_2^{m_2+1} ,$$

avec

$$\beta_1 = \frac{y_1 - f_1}{\varphi_1 - x_1} , \quad \beta_2 = \frac{y_2 - f_2}{\varphi_2 - x_2} \quad \text{et} \quad J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}$$

C. Cailler (Genève).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS[1] — XI

(Fin.)

Questions relatives au mode de vie du mathématicien[2].

Question 24.

Le travail du mathématicien dans une journée doit-il être coupé, selon vous, par d'autres occupations, ou par des exercices physiques proportionnés à l'âge et aux forces de chacun.

On ne saurait être trop explicite dans la rédaction des questions d'une « enquête. » Mais ce n'est malheureusement, le plus souvent, qu'une fois les réponses reçues, que l'on se rend compte de la façon dont il eût fallu rédiger certaines questions, pour bannir toute équivoque.

« Le travail du mathématicien *doit-il* être coupé... ? ». Ce que l'on désirait savoir, c'est si et comment les mathématiciens, *de fait*, coupent leur travail. Ces deux questions, bien entendu, se confondraient, dans un monde idéal où serait fait tout ce qui devrait être fait. Mais, hélas, il n'en est guère ainsi, à notre époque surchargée où le Possible, plus que le Bien et le Beau, est le seul maître que, le plus souvent, il nous soit donné de suivre. Les semaines, les journées sont hâchées par les circonstances contingentes, les nécessités de l'enseignement... notre travail est trop souvent coupé

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, nº 5, p. 387-395 ; nº 6, p. 473-478, 1905. — 8e année, nº 1, p. 43-48 ; nº 3, p. 217-225 ; nº 4, p. 293-310 ; nº 5, p. 383-385 ; nº 6, p. 463-475, 1906. — 9e année, nº 2, p. 123-135, nº 3, p. 204-217 ; nº 4, p. 306-312, 1907 ; nº 6, p. 473-479.

[2] L'étude de cette dernière partie a été faite par M. le Dr Ed. CLAPARÈDE, Directeur du Laboratoire de Psychologie de l'Université de Genève.

quand il ne le faudrait pas, pour que nous soyons disposés, de gaîté de cœur, à le couper volontairement, quand, d'aventure, il nous arrive d'avoir devant nous un long chapelet d'heures à égrener.

Il eût donc fallu poser ainsi la question 24 : « Coupez-vous votre travail... ; si les circonstances ne vous permettent pas de le faire, le regrettez-vous, et pourquoi ? »

Sur cinquante-huit correspondants qui ont envisagé la question 24, deux seulement ont clairement séparé, dans leur réponse, les deux points de vue de l'idéal et du réel :

Rép. XVIII (Italie). — Je crois qu'il doit être utile d'interrompre le travail quotidien par quelque exercice physique. Mais je l'ai rarement fait. (...)

Rép. LII (France). — Ce serait désirable, mais je n'ai jamais pu m'y astreindre. HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Parmi les autres, quarante-six ont répondu affirmativement, la plupart par un *oui*, ou *certainement oui*, ou *il le faudrait tout au moins* (rép. XLII, LXII). Quelques-uns seulement ont été un peu moins brefs :

Rép. XI (Russie). — Pour moi, les exercices physiques donnent de la force à l'esprit N. DELAUNAY.

Rép. XII (Allemagne). — Le développement physique doit être recommandé sans aucun doute. (...)

Rép. XX (France). — Je suis d'avis que le travail doit être morcelé. H. BROCARD.

Rép. XXI (Allemagne). — Pour la moyenne des écoliers, même pour les mieux doués, l'exécution de travaux expérimentaux entre les travaux purement mathématiques est à recommander vivement. Pour le génie, il n'y a pas de règle. L. BOTZMANN.

Rép. XXIX (Hollande). — Travailler au plus trois heures de suite, et puis changer. J. de VRIES.

Rép. XLIII (France). — S'arrêter dans son travail dès que l'on est fatigué. E. MAILLET.

Rép. LXVII (Allemagne). — Je considère comme très avantageux si le travail peut être coupé par d'autres occupations ou par des exercices physiques. (...)

Rép. LXXXIV (Suisse). On ne peut pas toujours travailler ; l'exercice est très nécessaire. G. OLTRAMARE.

Un correspondant (XXXII) répond « douteux » à la ques-

tion 24. Trois (XXXVI, XLV et XLVII) déclarent que « c'est individuel. ».

Rép. XLV (France). — Rien de général. Cela dépend de la tournure d'esprit. R. de MONTESSUS.

Deux mathématiciens établissent un judicieux *distinguo*, auquel souscriront certainement la plupart des travailleurs :

Rép. XXIII (France). — Couper le travail vaut mieux en principe. Toutefois, lorsqu'on est bien entraîné par son sujet, une journée entière de travail continu peut être profitable. Mais de tels efforts doivent rester des exceptions. C.-A. LAISANT.

Rép. XXIV (France). — Quand on se sent bien disposé sur une question, il ne faut pas s'arrêter ; quand on n'est pas en train, il faut s'arrêter. A. BOUTIN.

Quant à la nature de l'occupation qui doit couper le travail, c'est à l'*exercice physique* que les quelques rares personnes qui ont répondu à cette partie de la question 24, donnent la préférence. Boltzmann, on l'a vu, propose d'entrecouper d'expériences de physique, le travail théorique.

Rép. L (Etats-Unis). — Continu si possible pendant les heures de la matinée. En tout cas, une continuité de plusieurs heures, quel que soit le moment de la journée. E.-W. DAVIS.

Rép. LI (Etats-Unis). — Il doit être continu. ...

Rép. LX (Suisse). — Pas nécessaire. A. EMCH.

Rép. LXVIII (Etats Unis). — Le travail mathématique doit être concentré, non interrompu. L.-L. CONANT.

Rép. LXXXI (Hollande). — Je n'aime pas à couper une journée, mais à étudier de jour en jour, jusqu'au moment où je vois que je n'avance plus. Alors je cherche une autre occupation.
F.-J. VAES.

Il ressort de toutes ces réponses que la fatigue produite par le travail mathématique varie fort d'un individu à l'autre. Comparez ces deux réponses, dues à deux jeunes correspondants, presque du même âge :

Rép. XXXIV (France). — Oui, le travail de mathématique continu étant d'une grande fatigue pour l'esprit et pour le corps.
J. AZAÏS.

Rép. LIII (Belgique). — Il me semble que les mathématiques ne fatiguent point. M. LECAT.

Question 25.

Les réponses aux diverses questions comprises sous ce chiffre ne font que mettre en relief les fortes différences individuelles existant parmi les travailleurs.

25 (a). — *Avez-vous la tendance ou l'habitude de travailler pendant des semaines ou des mois d'une façon irrégulière, continue, égale, ou au contraire par bourrées, et comme par à-coups ?*

Sur une soixantaine de réponses, cinquante, tout au plus, sont utilisables. Plusieurs personnes ont en effet répondu simplement *oui* ou *non* à la question 25*a* ; cette question contenant une alternative, on ne sait comment interpréter des réponses de ce genre. Les partisans du travail continu et du travail par à-coups sont en force égale : vingt-trois contre ving-trois. Quatre personnes manifestent l'un ou l'autre type de travail suivant la nature de l'occupation.

Citons quelques réponses de la première catégorie (travail continu) :

Rép. IX (France). — Il faut de la continuité et de la discipline dans le travail pour m'amorcer à un sujet ; une fois que j'ai mordu, je travaille malgré moi et il faut m'arracher par mesure d'hygiène, c'est la période de production qui amène ensuite une certaine inertie intellectuelle. Les circonstances extérieures agissent, mais d'une façon secondaire en comparaison de l'évolution que je viens de dire. ...

Rép. LXXIV (Italie). — Quand il m'est possible, j'aime travailler pendant des semaines et aussi des mois régulièrement.

P. Geminiano.

Rép. XVII (Allemagne). — Jadis je travaillais par à-coups. — Maintenant, ayant un but bien déterminé, je travaille tout à fait régulièrement, mais je dois continuellement changer de travail. ...

Rép. LXXXIII (France). — Je travaille de façon régulière, mais quand j'ai commencé un sujet je n'aime pas à passer immédiatement à un autre avant d'en avoir tiré tout ce qu'il m'est possible. Alors je passe à un autre, puis en revenant assez longtemps après au premier (peut-être un mois après), il m'arrive, si je puis dire, de trouver un nouveau filon. ...

Réponses de la seconde catégorie (travail par à-coups) :

Rép. II (France). — Je recherche, le plus possible, le travail régulier, ce qui n'empêche pas que ma courbe de l'intensité du travail en fonction du temps ne présente un aspect vaguement sinussoïdal ! En général je travaille d'autant mieux que je suis plus libre et comme méthode et comme échéance à laquelle donner le résultat. A. Audebrand.

Rép. VI (Allemagne). — Ma faculté de travail varie selon une loi à moi inconnue. F. Schur.

Rép. VII (Allemagne). — Le travail régulier m'est impossible. M. Cantor.

Rép. XXII (Etats-Unis). — J'ai l'habitude de travailler quelque peu spasmodiquement, mais je ne pense pas que ce soit une bonne méthode. Edm. Escott.

Rép. XXIII (France). — Le système des à-coups a prévalu chez moi, souvent contre ma volonté, parfois aussi parce que je ne me sentais plus en train. C. A. Laisant.

Rép. XXIV (France). — Je ne travaille que par à-coups, sans périodicité régulière. A. Boutin.

Rép. XXXII (Autriche). — Une fois en bonne force, je travaille plusieurs journées, douze heures par jour, où j'aime un repas fort, mais vite. Le travail achevé, je me donne un repos de plus d'une semaine. M. Lerch.

Rép. LXX (Etats-Unis). — Personnellement, je travaille par à-coups, fortement pendant quelques semaines, et très faiblement entre temps. Je ne suis pas sûr, cependant, que ce soit la meilleur méthode. J.-W. Young.

Rép. LXXVII (Etats-Unis). — Mon bon travail est tout à fait irrégulier. Pendant quelques semaines, je travaille très fortement, puis moins pendant un certain temps. Les intervalles sont très irréguliers, et ne paraissent pas dépendre des conditions météorologiques et physiques. F.-R. Moulton.

Rép. LXXXII (Suisse). — Par à-coups. H. Fehr.

Rép. LXXXIV (Suisse). — Par bourrées. G. Oltramare.

Quelques personnes, avons-nous dit, changent de type suivant la nature du travail : le travail de recherche serait plus continu dans deux cas ; dans deux autres cas, ce serait l'inverse, le travail de recherche étant celui qui est effectué par à-coups :

Rép. I (France). — Quand je rédige, c'est avec une assiduité continue ; quand je cherche c'est par à-coups. Ch. Méray.

Rép. L (Etats-Unis). — Je travaille par à-coups lorsque je suis

occupé à un travail de production. Pour le travail d'assimilation, je suis plus régulier. E.-W. Davis.

Rép. XVIII (Italie). — Je travaille pendant des semaines d'une manière régulière et continue si j'ai quelque recherche qui m'intéresse; autrement par bourrées. ...

Rép. XXXVII (France). — Cela dépend des résultats que j'entrevois. Quand une question me paraît devoir donner des résultats je travaille sans interruption. Lorsque je cherche un sujet d'étude, le travail est plus lent et plus difficile. E. Fabry.

25 (b). — *Avez-vous des phases marquées de dépression ou d'entrain, puis de dépression et d'incapacité de travail?*

(c). — *Avez-vous remarqué si ces alternances présentent une périodicité régulière, et, dans ce cas, quel est approximativement le nombre de jours de la phase d'activité et de la phase d'inertie?*

On a peu répondu à ces questions. Ceci semble indiquer que ces phases de dépression et d'excitation sont en général assez peu marquées pour attirer l'attention.

Sur trente-neuf personnes qui ont répondu à la question 25*b*, vingt-sept accusent des phases plus ou moins prononcées, douze déclarent n'en pas avoir constaté.

Rép. XLII (Italie). — A une période de forte excitation et d'étude succède toujours une période de dépression et d'incapacité plus ou moins courte. F. Amodeo.

Rép. XLVI (Espagne). — Quand j'ai écrit quelques travaux, j'ai une période d'excitation suivie de dépression.
G. de Galdeano.

Rép. LVII (Etats-Unis). — J'ai quelques bonnes périodes de travail, et quelques périodes improductives.
E.-P. Thompson.

Rép. LXVI (Etats-Unis). — Oui, variations très prononcées.
V. Snyder.

Rép. LXXX (Norvège). — Après un travail achevé j'ai une période de dépression. Alf. Guldberg.

Exemples de réponses négatives :

Rép. XLIII (France). — Inconnu. E. Maillet.

Rép. LIX (Allemagne). — Je suis toute la journée en état d'entrain, sauf après le repas. A. Tafelmacher.

Rép. LXVIII (Etats-Unis). — Aucune phase, sauf celles provoquées par les conditions physiques. L. Conant.

Rép. LXXII (États-Unis). — Jamais je n'ai rien observé de ces choses. ...

Pour ce qui est de la *périodicité* de ces phases, deux correspondants seulement sur trente ont noté une certaine régularité :

Rép. XXXIV (France). — Par « bourrées », par boutades et aussi selon les saisons : l'été plutôt que l'hiver, le printemps plutôt que l'automne et que l'été, la plus grande phase d'activité étant environ du 15 février à la fin de mai ou au commencement de juin, la moindre, de novembre au commencement de janvier.
J. Azaïs.

Rép. XLV (France). — Phase d'activité : 15 jours ; phase d'inertie : variable. R. de Montessus.

D'autres n'ont pas observé de périodicité régulière : M. Marletta explique ainsi ces phases de dépression et d'entrain :

Rép. XLIV (Italie). — Je crois que [cette périodicité] doit être produite par une sorte d'autosuggestion. Dès que j'ai terminé une recherche, il m'est impossible de m'appliquer à quelque autre chose.

25 (d). — *Les circonstances ambiantes, physiques et météorologiques (température, lumière ou obscurité, saisons, etc.) ont-elles une influence appréciable sur nos facultés de travail ?*

46 réponses, dont 11 négatives. Le nombre de ces dernières eût augmenté de quelques unités si l'on avait compté comme négatifs les cas dans lesquels la forte chaleur est la seule circonstance notée comme ayant une influence sur le travail.

Les diverses *saisons* n'ont rallié chacune que 2 suffrages. Le temps et la température ont plus d'importance pour l'aptitude au travail. On remarque cependant que le beau ou le mauvais temps ont parfois une action différente selon qu'ils surviennent en été ou en hiver.

Rép. LXIX (Italie). — Je ne puis absolument pas travailler en été lorsque le temps est orageux ; au contraire, en hiver je travaille sans entrain lorsque le temps est beau. (...)

La *température* paraît avoir une influence très marquée sur certaines personnes : une seule fois il est expressément noté qu'elle est sans influence. Le *froid*, ou tout au moins « le temps froid » est préféré 6 fois, la *chaleur* 2 fois seulement. A noter cependant que l'un des amis du froid (Rép. IV) n'aime celui-ci que s'il se trouve lui-même dans une chambre chaude (*kühles Wetter, aber nicht kühles Zimmer*). Cette remarque nous fait supposer que, dans le temps froid, ce n'est pas tant l'abaissement de température, en lui-même, qui favorise le travail intellectuel, que *l'élévation barométrique* à laquelle il correspond le plus souvent. Le même correspondant ajoute que le vent du midi abaisse sa puissance de travail ; cela confirme notre interprétation.

Le *beau temps* n'est cependant pas toujours préféré, au point de vue du travail, s'entend. Il est accusé cinp fois de « distraire du travail. »

Rép. XVI (Belgique). — Le beau temps m'engage à la promenade et me distrait du travail. M. Stuyvaert.

Rép. XXXI (Allemagne). — Oui ; — en été, ça me dégoûte de travailler, lorsqu'il fait beau temps. A. von Oettingen.

Le *temps pluvieux*, *couvert ou lourd*, détesté par les uns, est signalé trois fois (rép. XXXIV, LVII, LX), comme favorable au travail.

Rép. XVII (Allemagne). — Je suis mal entrain et incapable de travailler lorsque règne un temps couvert sans pluie. (...)

Rép. XXXII (Autriche). — Les jours obscurs ou de pluie me sont pénibles et me prennent le goût au travail. M. Lerch.

Bép. XXXIV (France). — Le temps pluvieux ou lourd me fatigue mais prédispose au travail. Un temps chaud et beau est assez favorable. Un temps froid et beau est complètement défavorable.
J. Azaïs.

Rép. XXXV (France). — Le temps gris et l'humidité sont défavorables à mon travail. (...)

Rép. LVII (Etats-Unis). — J'aime le beau temps ; mais le temps sombre et nuageux est délicieux pour travailler.
E.-P. Thompson.

Rép. LX (Suisse). — Je puis mieux travailler lorsque le temps est mauvais. A. Emch.

L'influence excitante favorable de la *lumière*, soit du soleil soit de la lampe, est notée par plusieurs correspondants.

Rép. X (Irlande). — Oui, surtout la lumière. R. Genese.

Rép. XVII (Allemagne). — La lumière du soleil ou de la lampe est ce qui me stimule le plus. ...

Rép. XXII (États-Unis). — Je puis beaucoup mieux travailler par le temps froid. Je suis facilement dérangé par les bruits légers. J'aime l'abondance de lumière. E.-B. Escott.

Rép. XLIII (France). — Il faut que mes papiers soient bien éclairés et que la lumière des lampes ne me frappe pas les yeux. Je ne travaille guère dans l'obscurité, sauf quelquefois au point de vue de l'imagination mathématique. E. Maillet.

Rép. LXXXIV (Suisse). — Beaucoup de lumière m'a toujours été absolument nécessaire. G. Oltramare.

Question 26.

Quels exercices physiques pratiquez-vous ou avez-vous pratiqués, comme diversion aux travaux intellectuels? Auxquels donnez-vous la préférence?

Presque tout le monde a répondu à cette question. Deux correspondants seulement (le n° 41, Écossais de 44 ans, et le n° 81, Hollandais de 38 ans) déclarent ne se livrer à aucun exercice physique.

Impossible de classifier ici les exercices et les sports indiqués : chacun en cite plusieurs, parfois même beaucoup. Et le pourrait-on, serait-il sage de le faire? Il va sans dire que le choix du sport auquel se livre un individu est dicté bien plus par les circonstances, par les habitudes de son milieu, que par ses aptitudes intellectuelles particulières : pour être mathématicien, on n'en est pas moins homme! Aussi verra-t-on les septentrionaux s'adonner au patinage plus souvent que leurs collègues du Midi, les Anglos-Saxons préconiser le tennis ou le football, les Suisses l'alpinisme, les Français la chasse, la pêche ou l'escrime, les riverains d'une mer ou d'un lac, le canotage et la natation...

Il est cependant, au-dessus de toute cette diversité, un exercice qui recueille la quasi-unanimité des suffrages : c'est la marche, la promenade. Faut-il lui attribuer une vertu restauratrice spécifique, ou la fréquence avec laquelle on la re-

commande est-elle due simplement à la facilité et au bon marché de son emploi ? — Certains préfèrent la promenade « en agréable compagnie » ; d'autres seuls « parce qu'on jouit ainsi mieux de la nature. »

Parmi les exercices auxquels les mathématiciens se livrent, citons, pour être complet, la *bicyclette* (très souvent), le *jardinage*, l'*équitation*, la *gymnastique*, l'*escrime*, le *sciage du bois*.

Tantôt on a protesté contre les exercices trop violents.

Rép. XXIII (France). — La marche est le meilleur des exercices ; elle a le défaut de prendre beaucoup de temps ; j'ai beaucoup pratiqué la bicyclette à un âge déjà avancé, et je la recommande particulièrement. Je n'ai guère eu l'occasion de faire de l'escrime, de la natation, de l'équitation, du canotage ; tous ces exercices me paraissent cependant une excellente chose au point de vue de l'hygiène intellectuelle, pourvu que jamais on ne se laisse envahir par l'idée sportive qui gâte tout. C.-A. LAISANT.

Rép. XXXIV (France). — La marche uniquement. Je crois l'escrime et l'équitation aussi très favorable, mais désapprouve tout exercice par trop violent. J. AZAÏS.

Tantôt au contraire on les recommande :

Rép. LXIII (Suisse). — Sports violents en général (skis, escrime, voile, luge, tennis, football, etc.). Jamais je n'ai aimé les jeux de patience. J'aime beaucoup le jeu d'échecs. G. FERRIÈRE.

La conclusion de tout cela, c'est que les mathématiciens — contrairement peut-être à ce que d'aucuns pensent — ne le cèdent en rien, sous le rapport de la vigueur et de l'entraînement physiques, au reste des mortels !

Question 27.

Donnez-vous la préférence au travail du matin ou du soir ?

On a répondu de façon très catégorique à cette question. Sur 64 réponses :

	Matin :	30 suffrages.
Soir	*Après-midi :*	3 »
	Soir :	24 »
	Matin et soir :	4 »
	Matin ou soir (suivant les cas) :	3 suffrages.

Comme on le voit, les types *matinal* et *vespéral* comptent à peu près le même nombre de représentants. 4 personnes présentent le type indifférent. 2 correspondants préfèrent le matin ou le soir selon le genre de travail qu'ils ont à accomplir, mais pour des raisons exactement opposées, l'un se sentant plus *productif* le soir ou plus *réceptif* le matin, l'autre *vice-versa :*

Rép. XV (Allemagne). — Le matin je me sens plus réceptif et le soir plus disposé à la production. (...)

Rép. XXXIX (Grèce). — A celui du matin quant aux recherches ; à celui du soir quant à lire les journaux, etc.

N.-J. Hatzidakis.

Enfin, un correspondant a constaté que sa préférence avait changé avec l'âge :

Rép. LXXV (France). — Autrefois, le soir, maintenant, après 45 ans, le matin. G. de Longchamps.

Plusieurs se lèvent, pour travailler, de très bon matin ; d'autres veillent très tard dans la nuit :

Rép. VII (Allemagne). — Je n'ai *jamais* travaillé le soir. Mes meilleurs travaux ont été exécutés en été, le matin, dès 4 heures.

Moritz Cantor.

Rép. XLVII (Suisse). — Le travail du matin, de 5 heures à 10 heures, est le plus avantageux. E. Gubler.

Rép. LIX (Allemagne). — Je me réserve chaque semaine deux matinées pour le travail personnel et je me lève à 5 heures, été et hiver. — Le soir je ne puis, en général, pas travailler.

A. Tafelmacher.

Rép. XI (Russie). — Je puis travailler dans toutes les circonstances, mais je travaille le mieux entre 10 heures du soir et 2 heures après minuit. N. Delaunay.

Rép. XXXIV (France). — Le travail du matin est une utopie. Le soir, par entraînement, surtout à partir de 4 heures et environ, jusque vers 1 heure ou 2 heures de la nuit. J. Azaïs.

A plusieurs reprises, il est noté que le travail du soir trouble le sommeil ; malgré cela, il est préféré par ceux appartenant au type vespéral :

Rép. IV (Autriche). — Je travaille plus facilement le soir ; mais ça compromet le sommeil. K. ZINDLER.

Rép. IX (France). — Je préfère le travail du matin moins nuisible à ma santé. Le soir les idées sont très nettes, mais l'excitation me prive de sommeil et ma santé s'altère. ...

Rép. LII (France). — Je crois le travail du matin beaucoup plus fructueux. Celui du soir excite et trouble le sommeil. Mais j'ai toujours été obligé de les pratiquer tous les deux pour aboutir.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Rép. LIV (Etats-Unis). — Je puis mieux travailler la nuit, mais après trop de travail nocturne je ne puis pas dormir. Lorsque je travaille dans la journée à un certain problème, j'en prends un autre la nuit. J. COOLIDGE.

Ces réponses nous montrent combien sont tranchées les différences individuelles sous le rapport du type de travail, et l'on voit combien il est naïf de vouloir imposer de force à un travailleur un régime pour lequel il ne se sent pas fait. Cette disposition à réaliser le type vespéral ou le type matinal tient sans doute à des raisons biologiques profondes, à la constitution même de notre système nerveux, en d'autres termes à notre forme d'activité, à notre personnalité. C'est pour cela que nous sommes facilement portés à dogmatiser sur ce point : il nous est désagréable que les autres soient faits d'une façon différente que nous-mêmes, aient d'autres habitudes, un autre genre de vie. C'est une conséquence de la loi biologique de la conservation et de la lutte pour l'existence, que chacun cherche toujours à affirmer son moi, à propager les façons de se comporter qui sont l'expression de sa personnalité. Aussi avons-nous une tendance instinctive à vouloir imposer aux autres notre manière de penser et de sentir, non seulement dans les sphères élevées de l'esthétique, de la philosophie, de la politique ou de la religion, mais souvent aussi dans le domaine plus terre à terre du régime du travail. Celui qui veille tard dans la nuit ou fait grasse matinée a une sorte de sourde antipathie ou de mé-

pris pour celui qui se lève à l'aube ; et au matinal invétéré son collègue le vespéral paraît un malheureux qui s'égare.

Les types matinal et vespéral correspondent-ils à des types ethnologiques ? — Une statistique portant sur ce point n'aurait de valeur que si tous les correspondants avaient à peu près le même âge ; car on sait que le type de travail change avec l'âge (voir rép. 75). Voici cependant, à titre de curiosité, le nombre de représentants de chacun des types rencontrés chez les correspondants latins d'une part et chez les correspondants germaniques d'autre part :

	Matin.	*Soir.*
Latins (Français, Suisses romands, Belges, Italiens, Grecs, Espagnols)	17	8
Germains (Allemands, Suisses allem., Autrichiens, Hollandais, Anglais, Américains)	12	16

Question 28.

Les périodes de vacances, si vous en prenez, sont-elles utilisées par vous à des travaux mathématiques (et dans quelle mesure ?) ou bien consacrées entièrement à la distraction ou au repos ?

55 réponses : Deux collègues ayant répondu, non sans quelque mélancolie, qu'ils n'avaient pas de vacances, il ne nous en reste que 53 à considérer. Sur ces 53, 27 *oui*, 22 *non*, 4 réponses mitigées (« quelquefois non » [Boltzmann] ou « il m'est arrivé de travailler aussi dans les vacances [rép. XII] », ou « oui dans les vacances d'hiver, non dans celle d'été » [rép. VI et XXXI]).

Les 27 répondants affirmatifs comprennent sans doute deux catégories bien distinctes au point de vue psychologique : ceux qui travaillent pendant leurs vacances à regret, parce qu'ils y sont obligés, et ceux qui le font parce qu'ils y trouvent du plaisir.

Voici quelques exemples de la première catégorie :

Rép. III (Angleterre). — Je ne puis malheureusement pas échapper complètement à tout travail pendant les vacances.

G.-H. Bryan.

Rép. IX (France). — Souvent j'ai profité des vacances pour travailler ; mais je ne recommande pas cela. Il faut du repos.

...

Rép. XXIII (France). — J'ai souvent travaillé pendant les vacances. En principe, le contraire me paraît préférable.

C.-A. Laisant.

Et en voici un de la seconde :

Rép. LXXIV (Italie). — Les périodes des vacances sont pour moi les plus fécondes pour les travaux scientifiques.

G. Pirondini.

Parmi les *oui* il en est de très catégoriques :

Rép. VII (Allemagne). — Pendant les vacances je ne me suis jamais reposé que très peu de jours, après lesquels j'ai travaillé d'une façon d'autant plus intense que je n'étais pas dérangé par mes leçons. M. Cantor.

Rép. XXVI (France). — Les vacances sont pour moi le moment où, mes occupations professionnelles ayant cessé, je puis travailler davantage pour moi personnellement. J. Richard.

Rép. XLIV (Italie). — Il n'y a pas de vacances pour la science.

G. Marletta.

Rép. LIII (Belgique). — Vacances consacrées, autant que le permet la santé, aux recherches mathématiques. M. Lecat.

Rép. LXXVII (Etats-Unis). — Je travaille pendant les vacances comme à l'ordinaire. F.-R. Moulton.

Rép. LXXXIV (Suisse). — J'ai toujours travaillé sans distinction de temps ou de lieu. G. Oltramare.

D'autres mathématiciens, que nous avons compté avec les affirmatifs, ne consacrent cependant, pendant les vacances, que peu de temps au travail :

Rép. LX (Suisse). — Pendant les vacances, je ne travaille que dans la matinée, l'après-midi étant consacré à la récréation.

A. Emch.

Rép. LXIV (Etats-Unis). — Je travaille une à deux heures par jour pendant les vacances. H.-L. Rietz.

Rép. LXVI (Etats-Unis). — Je ne travaille qu'une partie de la journée (1 à 2 heures) pendant les vacances. V. Snyder.

Rép. LXX (Etats-Unis). — Pendant les vacances je tâche de ne faire que juste assez de travail mathématique pour conserver leur souplesse à mes facultés. J.-W. Young.

S'il est des mathématiciens qui regrettent d'être obligés

de travailler pendant leurs vacances (v. plus haut la rép. III) il en est d'autres qui regrettent au contraire d'en être empêchés, — même chez les mathématiciens se vérifie le dicton que « nul n'est content de son sort » — :

Rép. I (France). — Je travaillerais volontiers pendant les vacances si mes habitudes familiales ne m'en ôtaient *en fait* la possibilité, ce que je regrette infiniment. C. Méray.

Deux personnes remarquent qu'elles travaillent mieux lorsqu'elles sont préoccupées :

Rép. XI (Russie). — Pendant les vacances, j'écris mes ouvrages pédagogiques, et pendant le reste du temps, je fais mes recherches. Plus je suis préoccupé, mieux vont mes recherches ; c'est étrange, mais c'est un fait bien constaté. N. Delaunay.

Rép. XXIX (Hollande). — Lorsque je travaille pendant les vacances, je me prépare pour mes cours. Le travail personnel me réussit mieux lorsque je suis très occupé. J. de Vries.

Voici encore quelques réponses négatives :

Rép. XLIX (France). — Jamais le moindre travail intellectuel en vacances où je n'emporte aucun livre en fait de géométrie, pas d'autre ligne droite que celle qui sert à « amorcer en badinant le goujon trop avide ». P. Barbarin.

Rép. XLV (France). — Pendant au moins deux mois par an, et de suite, je ne fais *aucun* travail intellectuel.

R. de Montessus.

Rép. LVII (Etats-Unis). — Beaucoup de mes vacances ont été vouées au repos pour la plus grande part. E. Thompson.

Rép. LXVIII (Etats-Unis). — Mes vacances sont vouées presque entièrement au repos. L. Conant.

Rép. LXXII (Etats-Unis). — Repos complet ou récréation.

D. Kellog.

Rép. LXXV (France). — Je n'ai jamais distrait, pour le travail, le temps des vacances ; on ne saurait trop conseiller aux jeunes travailleurs ce repos indispensable à ceux qui ne veulent pas se surmener et tomber avant l'heure ; ou qui ne sont pas, comme quelques-uns que j'ai connus et enviés, spécialement doués à tous les points de vue : santé parfaite, force cérébrale inépuisable ! Je crois que, à ce double point de vue, on peut citer comme exemple mon ancien camarade Tisserand. Je n'ai jamais vu un autre exemple d'une pareille puissance du travail. Il est vrai que, malheureusement pour la science et pour tous ceux qui l'ont connu, Tisserand est mort bien jeune : il n'avait pas 50 ans.

G. de Longchamps.

Rép. LXXVIII (Italie). — Je voue les vacances au divertissement. [...]

Rép. LXXIX (Norvège). — Repos et distraction.

A.-S. GULDBERG.

Rép. LXXX (Norvège). — A la distraction et au repos.

Alf GULDBERG.

Questions 29.

(a) *Travail debout ou assis*; — (b) *à la planche noire ou sur le papier*; — (c) *distraction par les bruits extérieurs*; — (d) *faculté de poursuivre un problème en promenade, en chemin de fer*; — (e) *influence des excitants ou des calmants: tabac, café, alcool, etc., sur la quantité et la qualité du travail.*

a. — La question de l'influence de la position du corps sur l'activité mentale a un certain intérêt théorique et pratique. L'état de la circulation cérébrale, la pression sanguine, le rythme cardiaque varient suivant la position verticale ou horizontale. Divers penseurs ont constaté que l'une de ces positions leur était plus favorable que l'autre, et c'est en général la position couchée ou demi-couchée qui est dans ce cas.

Un psychologue américain, E. Jones, a soumis récemment cette question à l'expérimentation [1]. Il a constaté que, suivant l'activité mentale en jeu (discrimination, mémorisation, addition, travail musculaire) la position horizontale était préférable ou au contraire moins avantageuse. Le travail de mémorisation et celui d'addition bénéficient de la position couchée. Le même auteur rapporte de nombreuses déclarations de savants, de politiciens, de romanciers, racontant que, pour composer leurs œuvres, ils se couchent sur un divan; c'est étendu à plat ventre sur son plancher que l'un d'eux a l'habitude de rédiger ses livres, qu'il dicte à un sténographe.

Il n'était donc pas sans intérêt de questionner les mathé-

---

[1] E. JONES. *The influence of bodily posture on mental activities*. Arch. of Psychol., New-York, oct. 1907.

maticiens sur ce point. Malheureusement, les réponses fournies, peu détaillées et difficiles à classer, sont peu instructives :

La plupart (37) des mathématiciens qui ont répondu sur le point *a* travaillent assis ; 5 travaillent debout exclusivement ou alternativement avec la position assise ; 3 seulement (soit le 8 %) mentionnent la position étendue comme favorisant la réflexion. Pour beaucoup, la position assise est celle qui est préférée pour le travail écrit, tandis que la marche favorise le travail mental et l'inspiration.

Rép. II (France). — Je travaille facilement debout ou assis ; je réfléchis bien couché. Une marche en terrain plat, par temps frais, et à allure soutenue, fait en général affluer les réflexions dans mon esprit. Il en est de même d'un long temps de trot, avec un bon cheval, sûr et bien dressé. A. Audebrand.

Rép. III (Angleterre). — Je remue ordinairement de nouvelles idées lorsque je me promène, rarement en étant assis devant une table. G.-H. Bryan.

Rép. XLIV (Italie). — Les meilleures idées me viennent lorsque je suis couché ou lorsque je me promène, parlant à voix basse et faisant des gestes ; jamais lorsque je suis assis. Je cultive la géométrie pure ; j'écris donc très peu. G. Marletta.

Rép. XLVII (Suisse). — Jadis debout, maintenant assis. Mon maître Schläfli, de Berne, n'a jamais travaillé *que* debout.
E. Gubler.

Rép. LXXV (France) (*a*, *b*). — Debout et en marchant, avec arrêt devant la planche noire. G. de Longchamps.

b. — A une ou deux exceptions près en faveur de la planche noire, tous nos répondants préfèrent le papier pour travailler par écrit.

c. — Par contre, on diffère beaucoup sous le rapport de la distraction par les bruits extérieurs. Sur 42 mathématiciens, 16 seulement, soit 38 %, déclarent que les bruits les dérangent. Quelques-uns assurent même que les bruits du dehors leur sont en aide :

Rép. XXXI (Allemagne). — Les bruits me sont plutôt agréables, sauf les cas où les problèmes sont très difficiles.
A. von Oettingen.

Rép. XXXIV (France). — Les bruits extérieurs sont le plus souvent une aide. J. Azaïs.

Parfois ce sont les bruits inaccoutumés ou variables, parfois les bruits familiers, parfois les bruits monotones, qui sont notés comme les plus dérangeants.

Rép. XXXV (France). — Beaucoup, surtout par les bruits variables (enfants, conversations, musique), ou par les bruits monotones (maçons), *si mon attention s'y porte.* (...)

Rép. LXI (Ecosse). — Les bruits dont j'ignore la source me dérangent passablement ; les bruits familiers, s'ils ne sont pas trop forts, pas du tout. J.-E.-A. Stegall.

Rép. XXVIII (France). — Je ne puis rien faire en entendant un bruit monotone. G. Fontené.

Les bruits de conversation sont spécialement désagréables au travailleur, mais pas toujours, preuve en soit la réponse suivante :

Rép. LXXXIV (Suisse). — Je pouvais travailler au milieu d'une nombreuse assistance, sans être troublé par le bruit des conversations. G. Oltramare.

Les bruits, encore, dérangent moins lorsqu'on est absorbé par son travail :

Rép. LXXV (France). — Le travail, chez moi et chez les autres, je suppose, quand il touche à un point intéressant, est complètement ignorant de l'heure et des bruits extérieurs. J'en sais personnellement quelque chose, ayant été entouré d'un milieu familial très musicien. G. de Longchamps.

Rép. LXXXIII (France). — Les bruits extérieurs sont très gênants pour *se mettre* au travail ; mais une fois absorbé dans ma recherche ils me sont indifférents. ...

Rép. XVIII (Italie). — Quand je suis absorbé, les bruits extérieurs ne me distrayent pas. ...

d. — A peu près tous les répondants à cette question déclarent que *la promenade* est favorable à la pensée, à l'inspiration, à l'organisation mentale des plans de travail. Bien entendu, les travaux réclamant des calculs ou des figures faites avec minutie ne sont pas exécutés dans cette circonstance.

e. — Sur 30 réponses relatives à *l'alcool*, 27 (90 %) le condamnent, sans phrase. Les trois personnes qui se montrent plutôt favorables à ce toxique le font dans les termes suivants :

Rép. II (France). — Je ne fume plus depuis cinq ans. Le café accélère en général ma pensée, de même le bon vin ; mais les liqueurs ne me produisent que rarement cet effet.

A. Audebrand.

Rép. XXI (Allemagne). — Je ne fais aucun usage de tabac ; je n'ai jamais remarqué que le café ait sur moi une action notable ; par contre, l'usage modéré de l'alcool m'excite, et je n'ai jamais trouvé fondé, quant à moi, l'affirmation de Helmoltz qu'il empêche toute pensée valable. L. Boltzmann.

Rép. XXXIV (France). — Le café est excellent pour aider au travail, l'alcool moins, le tabac pas du tout. J. Azaïs.

Le *tabac* et le *thé* ont plus de partisans.

Sur 32 mathématiciens mentionnant le tabac, 12 déclarent fumer, et s'en trouver bien. Sur ce nombre, trois spécifient qu'ils fument en travaillant, un, au contraire, qu'il fume beaucoup, mais jamais en travaillant.

Parmi les 20 adversaires du tabac, la plupart déclarent n'en faire aucun usage, deux ou trois en font un usage très modéré, et l'un, tout en reconnaissant que le tabac à priser « l'anime au travail, » n'en affirme pas moins que c'est une habitude détestable.

Les réponses concernant le café et le thé sont peu nombreuses et n'offrent pas d'intérêt particulier. Nos répondants se montrent en général hostiles aux excitants.

Question 30.

A quelles images internes, de quelle forme de « parole intérieure » vous servez-vous ?

Peu de réponses : seulement 26, et, sur ces 26, 4 négatives. Un mathématicien (LXXVIII) déclare qu'il « ne comprend pas » ce qu'on demande. — M. Maillet répond ceci :

Rép. XLIII (France). — Je crois que ces distinctions sont, pour moi, un peu subtiles. D'après moi, toutes les images concourent au but final chez les mathématiciens qui ont un peu écrit (au moins chez les professionnels), *n'en eussent-ils pas conscience. Je nie la possibilité, chez eux, d'une observation* complète à cet égard. Chez eux plus que chez d'autres, les images doivent être extrêmement complexes et synthétiques (v. Saint Paul, *Le langage intérieur*, 1904, p. 53). E. Maillet.

Citons aussi la

Rép. LXVIII (Amérique). — Pour moi, la mathématique est pensée pure. Ainsi je n'ai aucune visualisation, à part les cas de travail comportant des constructions géométriques. (CONANT)

Sur les 12 positifs restants, nous avons :

12 nettement *visuels*, soit 54 %.
2 *auditifs*, » 9 »
1 *graphique*, » 4,5 »
1 *verbal-moteur*, » 4,5 »
6 *mixtes*, » 27 »

Les mixtes sont « moteurs, auditifs ou visuels selon les cas, » ou « visuels avec parole intérieure, » ou « visuels et auditifs, » etc.

Cette question du langage intérieur ne paraît pas avoir beaucoup captivé nos correspondants, qui n'ont répondu que très laconiquement, ce qui est fort excusable, ils avaient le droit d'être fatigués de ce long questionnaire.

Je n'ai pas trouvé que la nationalité jouât un rôle dans la forme du type d'imagerie mentale. On sait que M. Duhem a fait la remarque très intéressante que les physiciens anglais élaboraient de préférence des théories répondant à un schéma visuel et concret, tandis que les Français étaient plus abstraits, que, pour eux, la visualisation était plutôt un obstacle au raisonnement mathématique. Le trop petit nombre des réponses présentes nous empêche de trouver ici une confirmation de la remarque de M. Duhem.

Sur les 6 Anglais ou Américains qui ont répondu à la question 30, 3 sont visuels, un est mixte, deux ne pratiquent que la « pensée pure. »

NOTE FINALE.

Nous avons étudié les résultats de l'enquête, question par question. Il n'y pas lieu, croyons-nous, de chercher de conclusions générales sur l'ensemble des réponses. La diversité des questions et leur grand nombre ne le permettent guère, pas plus que la variété des réponses. Sans doute on devait s'attendre à ce que les méthodes et les habitudes de travail

varient avec le tempérament et le milieu ; il est évident qu'elles dépendent aussi des circonstances d'ordre professionnel. Notre enquête avait précisément pour but de faire connaître les principaux types de travailleurs, et, sous ce rapport, les résultats que nous avons publiés fournissent des indications d'un grand intérêt. En étudiant ces résultats, et surtout en s'inspirant des réponses que chacun triera selon les préférences de son tempérament, les jeunes mathématiciens trouveront dans cette enquête des renseignements et des conseils qui leur seront d'un grand profit.

Pour les questions d'ordre psychologique, MM. Th. Flournoy et Ed. Claparède nous ont apporté leur précieuse collaboration. Nous nous faisons un devoir de leur exprimer nos plus vifs remerciements.

Février 1908. H. Fehr.

Liste des articles consacrés à l'Enquête sur la méthode de travail du mathématicien.

Lettre de M. E. Maillet ; préparation du questionnaire	t. 3 (1901), p. 58, 128, 219.
1er questionnaire	t. 4 (1902), p. 208-211.
Questionnaire complété	t. 6 (1904), p. 376, 481.
Les résultats :	
Question 1*a*, par H. Fehr.	t. 7 (1905). p. 387-395.
» 1*b*, par Th. Flournoy. . . .	» p. 473-478.
» 2 et 3, par H. Fehr	t. 8 (1906), p. 43-48.
» 4 et 5, par H. Fehr	» p. 217-225.
» 6, 7, 8*a*, 8*b*, 9, par Th. Flournoy.	» p. 293-310.
» 10 à 13, par H. Fehr	» p. 463-495.
» 14 à 17, par H. Fehr	t. 9 (1907). p. 193-128.
» 18 et 20, par Th. Flournoy . .	» p. 128-135.
» 19, par Th. Flournoy	» p. 204-217.
» 21, par H. Fehr.	» p. 306-312.
» 22 et 23, par E. Claparède . .	» p. 473-479.
» 24 à 30, par E. Claparède . .	t. 10 (1908), p. 152-172.
A propos de l'Enquête :	
Lettre de M. Loria à propos des questions 6 à 9 . . .	t. 7, p. 383-385.
Réflexion sur les réponses aux questions 4 et 5, par V. Bobynin.	t. 8, p. 135-141.
» » » 11 à 13, par V. Bobynin.	t. 8, p. 389-396.

CHRONIQUE

IV[e] Congrès international de mathématiciens.
Rome, 6-11 avril 1908.

Le Congrès de Rome s'annonce sous les plus heureux auspices. De nombreuses communications sont inscrites au programme des sections et les séances générales ne compteront pas moins de onze conférences, qui à elles seulement formeront un des grands attraits de la réunion. Si l'on ajoute à cela l'attraction que présentée l'Italie et ses principales villes à ce moment de l'année, on peut prévoir une forte affluence de mathématiciens à Rome pendant la première quinzaine d'avril[1].

Les séances générales, les séances de sections et les réceptions seront réparties conformément au programme ci-après :

Dimanche 5 avril, 9 h. 30 du soir. Réception des Congressistes à l'Aula de l'Université par M. le Recteur.

Lundi 6, 10 h. du matin. Inauguration du Congrès dans la Salle des Horaces et des Curiaces, au Capitole. Discours d'ouverture de M. Volterra. — 3 h. du soir. Séance générale. Election du Bureau. Rapport sur le Concours pour la « Medaglia Guccia ». 1re et 2me Conférences.

Mardi 7, 9 h. du matin. Constitution et séances des Sections. — 3 h. 30 du soir. Séance générale. 3me et 4me Conférences.

Mercredi 8, 9 h. du matin. Séances de Sections. — 3 h. 30 du soir. Séance générale. 5me et 6me Conférences.

Jeudi 9, 9 h. du matin. Séances de Sections. — 3 h. du soir. Visite au Palatin sur invitation de M. le Ministre de l'Instruction publique.

Vendredi 10, 9 h. du matin. Séance de Sections. — 3 h. 30 du soir. Séance générale. 7me et 8me Conférences.

Samedi 11, 9 h. du matin. Séance de Sections. — 3 h. du soir. Séance générale. 9me et 10me Conférences. — Clôture du Congrès

---

[1] Nous avons publié, dans le précédent numéro, les renseignements concernant la carte de membre et les facilités accordees par les compagnies de transport. Les chemins de fer italiens, la Navigazione generale italiana et les chemins de fer français accordent aux congressistes une réduction de 50 %.

et désignation du Siège et de la date du V[me] Congrès International des Mathématiciens.

Dimanche 12. Visite de la Villa d'Adrien, et déjeuner à Tivoli. Une réception, offerte par la Municipalité de la ville de Rome aura lieu un soir, pendant le Congrès, dans les Musées du Capitole.

Conférences générales. — En voici la liste : M. DARBOUX traitera de la Géométrie infinitésimale. — M. W. v. DYCK (en remplacement de M. F. KLEIN empêché). Ueber die mathematische Encyklopädie. — M. FORSYTH. On the present condition of partial differential equations of the second order, as regards formal integration. — M. D. HILBERT. Die Methode der unendlich vielen unabhängigen Variabeln. — M. LORENTZ. Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther. — M. MITTAG-LEFFLER. Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe. — M. NEWCOMB. La théorie du mouvement de la Lune; son progrès et son état actuel. — M. PICARD. L'Analyse dans ses rapports avec la Physique mathématique. — M. POINCARÉ. L'avenir des mathématiques. — M. VERONESE. La Geometria non archimedea. — Dans la séance d'ouverture M. VOLTERRA fera un discours intitulé : Le Matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX.

Sections. — Elles seront au nombre de quatre et pourront d'ailleurs être à leur tour subdivisées ultérieurement, si le nombre des communications l'exige.

I. — *Arithmétique, Algèbre, Analyse.* Introducteurs : MM. ARZELA, CAPELLI, PASCAL, PINCHERLE. — Communications de MM. Bagnera, Bendixson, Boggio, Borel, Boutroux, Burkhardt, Capelli, De Donder, Drach, Fredholm, Frizell, Fubini, Gordan, Hocevar, Kœbe, Lebesgue, Lowey (A.), Moore (E. H.), Nicoletti, Pascal, Pick, Pincherle, Pringsheim, Remoundos, Riesz, Schlesinger, Teixeira, Weber (H.), Young (W.-H.), Zermelo. (Total 29.)

II. — *Géométrie.* Introducteurs : MM. BIANCHI, SEGRE. — Communications de MM. Andrade, Bianchi, Brückner, Dehn, Drach, De Franchis, Finsterbusch, Liebmann, Montesano, Pund, Schœnflies, Schubert, Severi, Simon, Varicak, Zeuthen. (Total 16.)

III — A. *Mécanique, Physique-mathématique, Géodésie.* — B. *Science des Actuaires, Mathématiques appliquées.* Indroducteurs : MM. CIVITA, LUIGGI, PIZZETTI, TOJA. — Communications de MM. Abraham (M.), Andoyer, Andrade, Ball, Blondel, Boccardi, Boggio, Bohlmann, Brillouin, Bryan, Claxton-Fidler, Czuber, Darwin.

Elderton, Forchheimer, Garbasso, Genève, Greenhill, Hadamard, Hardy, King, Korn, Lamb, Levi-Civita, Manville, Marcuse, Michel, Poynting, Quiquet, Somigliana, Sommerfeld, Stäckel, Störmer, Thiele, Toja. (Total 38.) Parmi les Mathématiques appliquées comprises dans la 3me Section se trouve la Science des Actuaires (Introducteur M. Toja), qui, pour la première fois, figure officiellement dans un Congrès de Mathématiciens.

IV. — *Questions philosophiques, historiques, didactiques.* Introducteurs : MM. Enriques, Loria, Vailati. — Communinations de MM. Amodeo, Andrade, Bernstein (F.), Borel, Boutroux (P.), Braunmühl, Broggi, Duhem, Enriques, Favaro, Fehr, Feldhaus, Godfrey, Günther, Gutzmer, Hessenberg, Itelsen, Loria, Nelson, d'Ocagne, Ostwald, Pittarelli, Smith (D. E.), Stäckel, Stephanos, Suppantschitsch, Vailati, Wiedemann, Zeuthen.

Siège du Congrès. — Toutes les Séances, après celle d'inauguration, auront lieu dans les salles de l'Académie des Lincei (Palais Corsini, Via della Lungara, 10). C'est là aussi que se trouvera le Secrétariat du Congrès, du 1er au 15 avril.

L'*Enseignement mathématique* publiera un compte rendu détaillé du Congrès. H. F.

3me Congrès international de Philosophie.

Les philosophes se réuniront cette année en un 3me congrès international qui aura lieu à *Heidelberg* du 31 août au 5 septembre, sous la présidence de M. le prof. Windelband.

Pour tous les renseignements concernant le congrès, s'adresser au secrétaire général du comité d'organisation M. le Dr Elsenhans, Plöck 79, Heidelberg.

Commission allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles.

Le mandat de la Commission d'enseignement nommée par les médecins et naturalistes allemands a pris fin avec un remarquable rapport sur la préparation des candidats à l'enseigenment scientifique. Il s'agit maintenant de développer les réformes proposées et surtout d'obtenir leur réalisation. A cet effet une nouvelle commission a été constituée sous le nom de *Deutscher Ausschuss für den mathematischen u. naturwissènschaftlichen Unterricht;* elle comprend des représentants des principales sociétés qui ont intérêt à voir progresser l'enseignement des sciences dans les éta-

blissements secondaires supérieurs. Nous indiquons ci-après les sociétés qui sont représentées dans cette commission avec les noms des délégués :

Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte (Chun, Schotten, Gutzmer) ; Deutsche Mathematiker-Vereinigung (Klein, Stäckel) ; Deutsche Physikalische Gesellschaft (Hallwachs, Poske) ; Verein Deutscher Ingenieure (Peters, Taaks) ; Verein Deutscher Chemiker (Duisberg, Rassow) ; Deutsche Botanische Gesellschaft (Vertreter noch nicht ernannt) ; Deutsche Zoologische Gesellschaft (Hertwig, Kraepelin) ; Deutsche Geologische Gesellschaft (Fricke, Rauff) ; Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (Pietzker, Schmid) ; Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Mathematik und Physik (v. Böttinger) ; Anatomische Gesellschaft (v. Bardeleben) ; Physiologische Gesellschaft (v. Frey, Verworn); Deutscher Medizinalbeamten-Verein (Cramer).

Cette Commission est présidée par M. le prof. A. Gutzmer (Halle).

Fédération américaine des professeurs de mathématiques et de sciences naturelles.

Un groupement qui peut être rapproché de la Commission ci-dessus vient de se former aux Etats-Unis. Les principales sociétés de professeurs de l'enseignement scientifique viennent de fonder une Fédération destinée à coordonner leurs efforts en vue des progrès à réaliser dans les différentes branches. Cette Fédération, qui porte le nom de *The american Federation of Teachers of the mathematical and the natural sciences*, comprend, à l'heure actuelle, les associations suivantes : The Association of teachers of mathematics of the Middle States and Maryland; The New York State science teachers association ; The Central Association of science and mathematics teachers; The association of teachers of mathematics of New England ; The physics teachers association of Washington City; The Missouri Society of teachers of mathematics and science ; The New Jersey State science teachers association ; The Michigan schoolmasters club; The New England association of chemistry teachers ; The New York physics club; The Indiana association of science and mathematics teachers; The association of Ohio teachers of mathematics and science.

Prix de Géométrie de l'Académie royale de Belgique.

L'Académie royale de Belgique a conféré le prix de Géométrie pour 1907 (700 fr.) à M. E. Bordiga, professeur à l'Université de Padoue ; elle a accordé un prix de 600 fr. à M. U. Perazzo, de l'Académie militaire de Turin.

H. Laurent.

La science française vient de faire une grande perte en la personne de M. Hermann Laurent, répétiteur à l'Ecole polytechnique et professeur à l'Institut agronomique, décédé le 19 février 1908. Fils du célèbre chimiste Laurent, l'un des principaux créateurs de la chimie organique, Hermann Laurent était né le 2 septembre 1841, à Echternach (Luxembourg). Il entra à l'Ecole polytechnique en 1860, et cinq ans plus tard il fut déjà reçu docteur ès sciences à la Sorbonne, avec deux thèses intitulées *De la continuité dans les séries* et *Sur les lignes isothermes*. L'analyse l'attira tout particulièrement, et surtout les théories de Cauchy dont il devint un fervent disciple. Ce fut le point de départ d'une production scientifique considérable sur toutes les parties des mathématiques. On lui doit notamment des travaux importants sur l'élimination, les séries, la théorie des résidus, les imaginaires. H. Laurent a écrit beaucoup d'ouvrages didactiques très remarquables, parmi lesquels nous nous bornerons à rappeler son *Traité d'Algèbre*, sa *Théorie des Séries*, sa *Mécanique rationnelle* et surtout son remarquable *Traité d'Analyse* (en 7 volumes), qui semble être son œuvre capitale.

Il laisse aussi un *Traité des Assurances*. L'intérêt qu'il témoignait à ce domaine des mathématiques appliquées le fit nommer vice-président de l'Institut des Actuaires français.

Marié en 1874, il était le gendre de Moutard. Le célèbre géomètre exerça également sur lui une grande influence.

Henri Laurent était attaché à l'Ecole polytechnique depuis quarante ans en qualité de répétiteur d'analyse, et il fonctionna longtemps comme examinateur d'admission. Il professa également depuis de nombreuses années à l'Institut agronomique.

Portraits de Steiner.

A la dernière réunion de l'Association suisse des professeurs de mathématiques, M. Butzberger avait accompagné sa conférence sur J. Steiner d'une exposition de manuscrits, livres et portraits du savant géomètre. Répondant à un vœu général de l'assemblée, M. Butzberger vient de faire reproduire deux des portraits de Steiner. L'une des reproductions a été faite d'après la lithographie signée Hermann Eichens, Paris 1841; elle est mise en vente au prix de 1 fr. 50; s'adr. à M. le prof. Butzberger, Kantonsschule, Zurich.

D'autre part, il a été fait une reproduction d'un excellent portrait à l'huile du grand géomètre suisse (prix : 3 fr.)

Nous signalons ces deux portraits à l'attention des mathématiciens et des bibliothécaires. H. F.

Nominations et distinctions.

M. Baillaud est nommé membre de l'Académie des sciences, en remplacement de M. Lœwy, décédé.

M. Burgatti, privat-docent à l'Université de Rome, est nommé professeur extraordinaire de mécanique rationnelle à l'Université de Messine.

M. F. v. Dalwigk, privat-docent, est nommé professeur à l'Université de Marbourg.

M. Rod. Fueter, privat-docent à l'Université de Marbourg, est nommé professeur ordinaire de mathématiques à l'Université de Bâle.

M. S. Newcomb, professeur émérite de l'Université John Hopkins (Baltimore), est nommé membre associé de l'Académie des sciences de Gœttingue.

M. H. Poincaré est nommé membre de l'Académie française au fauteuil de Sully-Prudhomme.

M. V. Volterra, professeur à l'Université de Rome, est nommé membre étranger de l'Académie royale de Stockholm (Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien).

NOTES ET DOCUMENTS

Faculté des sciences de Paris.

Cours de Mathématiques du 2e Semestre 1907-1908. (Ouverture : mercredi 4 mars 1908). — *Analyse supérieure et algèbre supérieure.* E. Picard : Quelques types de problèmes posés par la physique mathématique dans la théorie des équations différentielles (2 h.). — *Calcul différentiel et calcul intégral.* Goursat : Des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles (2 h.). — *Application de l'analyse à la Géométrie.* L. Raffy : Théorie des courbes gauches et des propriétés des lignes tracées sur les surfaces (1 h.). — *Mécanique rationnelle.* P. Painlevé : Les lois générales du mouvement des systèmes : La mécanique analytique : l'hydrostatique et l'hydrodynamique (2 h.). — Andoyer : Astronomie physique (programme du certificat d'Études supérieures d'Astronomie). (2 h.) — M. Boussinesq : *Physique mathématique* (2 h). — *Mécanique physique et expérimentale.* Koenigs : Des applications de l'élasticité et de la résistance des matériaux. Étude descriptive des mécanismes (2 h.).

Conférences. — L. Raffy : Conférences sur le calcul intégral et ses applications géométriques (2). — Andoyer : Conférences d'Astronomie (1). — P. Puiseux : Conférences sur la Mécanique (2). — Servant : Conférences de mécanique physique (1).

Cours de vacances de l'Université de Goettingue.

L'Université organise une série de conférences de mathématiques et de physique destinées aux professeurs de l'enseignement secondaire supérieur. Ces cours auront lieu à l'occassion des vacances de Pâques, du 21 avril au 2 mai 1908, conformément au programme ci-après :

Mathematik und Astronomie. — Prof. BEHRENDSEN : Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen. — Prof. KLEIN : Besprechungen über den elementaren Unterricht in der Differential- und Integralrechnung. — Prof. MINKOWSKI : Neuere Ideen über die Grundgesetze der Mechanik. — Prof. SCHWARZSCHILD : Astro-physikalische Fragen.

Physik. Prof. RIECKE : Über die Erscheinungen der Radioaktivität. — Prof. SIMON : Elektrische, magnetische, dielektrische Kreise. Wechselströme, elektrische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. — Prof. PRANDTL : Probleme der Motorluftschiffahrt und der Flugtechnik. — Prof. WIECHERT : Die neueren Ergebnisse über die Beschaffenheit des Erdinnern, mit besonderer Berücksichtigung der Erdbebenforschung. — Dr. GERDIEN : Luftelektrizität und luftelektrische Messungen. — Prof. BEHRENDSEN : Über Resonanzerscheinungen. — Dr. KRÜGER : Demonstrationen aus dem Kursus für physikalische Handfertigkeit. — Dr. BESTELMEYER : Demonstrationen aus dem Praktikum für Radioaktivität.

BIBLIOGRAPHIE

R. D'ADHÉMAR. — **Les Equations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.** — 1 vol. *Collection Scientia* : 2 fr. Gauthier-Villars. Paris.

M. d'Adhémar a réuni, dans ce volume, un très grand nombre de résultats intéressants et tout récents. Au point de vue du *Calcul des Limites* de Cauchy, MM. Goursat et Riquier ont établi des théorèmes fondamentaux pour les équations du second ordre :

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 .$$

Dans *le domaine réel,* la méthode de Riemann et les approximations successives de M. Picard ne laissent rien à désirer pour les équations de la forme :

$$s = f(x, y, z, p, q) .$$

Si nous avons plus de 2 variables indépendantes, M. d'Adhémar esquisse d'abord la théorie des *Caractéristiques*, commencée par Beudon. Puis il nous montre l'intégration par M. Volterra de l'*équation des ondes :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(x, y, z) .$$

Ici, des résultats fondamentaux ont été obtenus par l'auteur lui-même, et M. Hadamard a fait une extension très intéressante de la méthode.

L'on regrette que la trop petite dimension du volume ait empêché l'auteur de traiter, avec plus de détail, le dernier chapitre, relatif aux travaux de MM. Coulon, Hadamard, Delassus, le Roux.....

Tel qu'il est, ce livre permet, en tous cas, de saisir rapidement l'esprit de toute une catégorie de méthodes nouvelles et fécondes.

R. DE MONTESSUS (Lille).

P. Bachmann. — **Grundlehren der neueren Zahlentheorie** (Sammlung Schubert LIII). — 1 vol., 217 p. ; Mk. 6,50 ; Göschen, Leipzig

Le nouvel ouvrage de M. Bachmann, paru il y a quelques mois dans la collection Schubert, n'est ni un cours de théorie des nombres, comme les « *Vorlesungen über Zahlentheorie* » de Dirichlet-Dedekind, ni un exposé systématique des théories modernes des « Zalhkörper, » comme le « Zahlbericht » de Hilbert ou l' « Allgemeine Arithmetik der Zalhenkörper » de M. Bachmann. Il s'adresse à des débutants et se borne aux éléments de la théorie des nombres : propriétés fondamentales des nombres entiers et des formes quadratiques d'une part, éléments de la théorie des corps quadratiques d'autre part. Mais si le fond en est élémentaire, la manière dont sont traités ces principes en fait un livre moderne au même titre que les ouvrages plus complets de l'auteur des « Grundlehren. »

Ce petit volume est, comme nous venons de le dire, divisé en deux parties : dans la première nous ne sortons pas du domaine des nombres rationnels, dans la seconde le domaine de rationalité est élargi par l'adjonction d'une racine carrée d'un nombre ordinaire ; ce n'est plus la théorie des nombres classique d'Euler et de Legendre, mais un chapitre de l'Arithmétique nouvelle des corps algébriques, œuvre de Kummer, de Dedekind, de Kronecker. Un même esprit anime ces deux parties, et des notions nouvelles qui sont a la base de la théorie des corps apparaissent déjà dans la première partie, dès la première page.

Le livre débute par l'algorithme d'Euclide et les éléments de la théorie des congruences. Un long chapitre est consacré aux congruences binômes et à la loi de réciprocité de Legendre-Jacobi. Nous abordons ensuite l'étude des formes, en commençant par les formes linéaires et les équations indéterminées du premier degré (à deux inconnues). Des notions nouvelles, dues aux géomètres contemporains, permettent de donner une forme élégante à quelques-uns des résultats établis dans cette première partie des « Grundlehren. » J'en signalerai deux, que nous retrouverons dans la théorie des corps quadratiques : la notion de module de Dedekind et celle de réseau des nombres ou « Zahlengitter. » L'utilité des réseaux apparaît surtout dans la théorie des formes quadratiques et l'on sait le parti qu'en a tiré M. F. Klein dans ses « Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. » Ces réseaux de Klein peuvent être considérés comme des images géométriques des formes quadratiques, car à toute forme correspond un réseau déterminé et ce qui est bien plus important, un même réseau correspond à toutes les formes d'une classe ; on peut donc dire qu'un réseau représente une classe. Tout cela est très bien expliqué par M. Bachmann dans un chapitre assez long consacré à la théorie des formes quadratiques. Les réseaux permettent à M. Bachmann de donner une forme palpable aux résultats qu'il établit d'une manière directe, à l'aide de méthodes classiques due en grande partie à Gauss. Bien des questions n'ont pu trouver place dans ce chapitre, mais les problèmes fondamentaux de la théorie des formes quadratiques sont traités à fond.

Nous avons pourtant à signaler une lacune, du reste volontaire : M. Bachmann s'est borné à l'étude des formes dont le discriminant D n'est pas divisible par un carré, à l'exception du cas où $D = 4d$, le nombre d étant de la forme $4k + 2$ ou $4k + 3$. De cette manière le passage de la théorie classique à la théorie moderne basée sur les propriétés des corps quadratiques

est rendu plus facile. En effet, comme M. Bachmann l'explique dans la deuxième partie, une correspondance peut être établie entre les idéaux des corps et les formes quadratiques. Mais cette correspondance n'est pas parfaite, on n'obtient ainsi que les formes considérées par M. Bachmann dans la première partie. Pour les avoir toutes, il faudrait, à côté des idéaux du corps, considérer les modules et les idéaux des différents ordres ou « Ring » des corps quadratiques. On comprend que M. Bachmann n'ait pas cru nécessaire de consacrer un chapitre spécial à l'étude des « Ringideale », mais peut être n'aurait-il pas été inutile de donner quelques indications sur la théorie de ces formes et de ces idéaux. Est-il besoin de rappeler le rôle que ces idéaux jouent dans l'étude des problèmes relatifs à la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques ?

A la fin de la deuxième partie nous retrouvons les réseaux de Klein. La considération de ces réseaux conduit ici à la notion importante de nombres idéaux. Une correspondance curieuse a pu être établie entre ces nombres. les idéaux de Dedekind et les formes quadratiques. grâce à laquelle des propriétés abstraites des idéaux et des formes reçoivent une interprétation géométrique élégante qui sera particulièrement appréciée par les intuitifs.

On voit que le livre de M. Bachmann rendra des services réels. Il permettra aux débutants de s'initier, sans trop de peine, aux idées fécondes qui dominent aujourd'hui la théorie des nombres.

D. Mirimanoff (Genève).

G. H. Bryan and R. H. Pinkerton. — **Geometry of Conics**. — 1 vol. in-16, 270 p. (Dent's series of mathematical text books). Dent et C°, Londres.

L'enseignement des coniques suivant la méthode euclidienne est encore en vogue en Angleterre et dans quelques parties de l'Amérique. Considérées comme un complément de géométrie plane, les coniques offrent à l'étudiant le plus grand intérêt ; elles lui permettent en effet de se rendre compte de l'application de propositions de géométrie qui primitivement lui avaient paru arides. Lorsqu'on en a le temps, une étude des coniques à ce point de vue-là a beaucoup de valeur, spécialement si l'on traite ensuite le point de vue analytique.

MM. Bryan and Pinkerton commencent leur traité en donnant pour les coniques la définition de Pappus. Vient ensuite l'étude des tangentes, des normales et des coniques homofocales, ainsi que des diamètres.

Un chapitre important, que l'on néglige généralement dans les traités de ce genre, s'occupe de la projection orthogonale et de ses applications à l'ellipse. Pour montrer la puissance des méthodes projectives dans d'autres problèmes, on aurait pu ajouter l'étude de l'ellipse d'après Steiner ; aux p. 198-200, le principe de l'affinité pourrait être traité d'une façon explicite.

Les deux dernières parties sont consacrées à l'étude des propriétés particulières de l'hyperbole et à la géométrie de certaines courbes que l'on rencontre dans les mathématiques appliquées.

Le traité, faisant partie des « Dent's series » est écrit d'une façon claire ; il est également bien imprimé à l'exception de quelques dessins. Des figures bien exécutées ajoutent de l'élégance à un livre. C'est un fait qui n'est pas toujours reconnu à sa juste valeur par plus d'un auteur.

A. Emch (Soleure).

PAUL CRANTZ. — **Arithmetik und Algebra** zum Selbstunterricht. Erster Teil. — 1 vol. cart. N° 120 de la collection : *Aus Natur und Geisteswelt*. 128 p. ; 1 Mk 25. B. G. Teubner, Leipzig.

Ce petit volume, destiné aux autodidactes, rendra aussi d'utiles services à tous ceux qui enseignent les mathématiques élémentaires ; ils y trouveront un exposé élégant, simple et clair.

L'auteur insiste tout particulièrement sur les extensions successives du domaine des nombres. Les nombres *négatifs* interviennent dès le début, à propos de la soustraction, ce qui permet d'appliquer les opérations fondamentales à la fois aux nombres et aux polynômes ; il en résulte une fusion intéressante des éléments d'Arithmétique et d'Algèbre. La division introduit les *fractions* : dans l'ensemble des nombres rationnels, la résolution des équations du 1er degré, à une ou plusieurs inconnues, est toujours possible ; l'auteur en donne de nombreux exemples.

Le chapitre II est consacré aux puissances, au calcul des radicaux, à l'équation du 2me degré et aux logarithmes.

L'élévation à une puissance ($b^n = a$) ne jouit pas de la propriété commutative ; il y aura donc 2 opérations inverses : 1° on peut se donner n et a, et chercher b ; c'est l'extraction de la racine. 2° on peut chercher n, connaissant a et b ; c'est le logarithme de a dans un système dont la base est b.

Les nombres *incommensurables* apparaissent avec la racine carrée : l'auteur les définit simplement comme fractions décimales indéfinies et non périodiques. Lorsque la quantité sous le radical est négative, l'extraction ne devient possible que si l'on étend une quatrième fois le domaine des nombres en créant les *imaginaires*. Ces nombres se rencontrent dans la résolution des équations du 2me degré, dont la théorie est rattachée à la réprésentation graphique de la fonction : $y = x^2 + ax + b$.

Le petit ouvrage de M. Crantz intéressera tous les pédagogues ; nous souhaitons à cette œuvre de vulgarisation tout le succès qu'elle mérite.

L. KOLLROS (Chaux-de-Fonds).

EUG. NETTO. — **Elementare Algebra**. Akademische Vorlesungen für Studirende. 1 vol. VIII-200 p., 6 Mk. ; B. G. Teubner. Leipzig.

Ce livre se propose de servir d'intermédiaire entre l'enseignement secondaire et les cours d'Algèbre supérieure à l'Université. Mais il se propose également d'être utile à celui qui n'étudie pas les mathématiques d'une façon spéciale en lui permettant une récapitulation générale des problèmes et méthodes de résolution les plus importantes de l'Algèbre élémentaire. Pour ce qui concerne le premier but à atteindre, le livre est parfaitement réussi. L'auteur étend et approfondit d'une façon rigoureusement scientifique le champ d'Algèbre de l'école secondaire et initie ainsi les étudiants des premiers semestres à la méthode de l'enseignement universitaire. Mais ceci constitue précisément un écueil, me semble-t-il, pour celui qui n'est pas spécialiste en mathématiques : plus d'un développement, présentant un grand intérêt au point de vue scientifique, lui paraîtra quelque peu aride. Cependant, les « Vorlesungen » seront d'un grand intérêt et rendront d'excellents services aux maîtres qui se proposent de compléter leur instruction mathématique.

Le livre est divisé en huit chapitres qui comprennent dans l'ordre suivant : 1. Les équations du premier degré. — 2 et 3. Les équations du second degré. — 4. Analyse combinatoire. Binome : Puissance d'un polynome. — 5. Déterminants. Equations linéaires à plusieurs inconnues. — 6. Les équations binomes du n^{me} degré. — 7. Les équations du troisième degré. — 8. Les équations du quatrième degré. Dans ces deux derniers chapitres l'auteur utilise des formes réduites bien appropriées. C'est un point important sur lequel nous attirons l'attention des maîtres de l'enseignement secondaire. Au point de vue pédagogique il est indispensable que la résolution d'une équation soit présentée sous la forme la plus simple possible, ce qui permettra de simplifier également la discussion sur la nature des racines. On atteindra ce but en donnant à l'équation une forme réduite convenable. Ces formes réduites sont, pour les équations du deuxième et troisième degré, respectivement :

$$x^2 - 2\,ax + b = 0\;;\; x^3 - 3\,ax - 2\,b = 0\,.$$

Il faut louer l'auteur d'avoir utilisé ces formes réduites. La résolvante d'une équation du quatrième degré se présente le plus simplement, à l'aide des deux invariants, sous la forme

$$u^3 - Ju + 2\,\Delta = 0\,.$$

L'auteur emploie :

$$4\,a^3\,z^3 - a\,Jz + \Delta = 0\,,$$

qui offre l'avantage d'avoir des coefficients homogènes du même degré.

E. Gubler (Zürich).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques :

American Journal of Mathematics, edited by Fr. Morley, Baltimore.

Vol. XXIX, 1907, nos 3 et 4. — Thomas Mc Kinney : Concerning a Certain Type of Continued Fractions Depending on a Variable Parameter. — Virgil Snyder : Twisted Curves whose Tangents belong to a Linear Complex. — G. A. Miller : Groups in which every Subgroup is either Abelian or Dihedral. — J. E. Wright : Lines of curvature of a Surface. — J. E. Wright : The Ovals of the Plane Sextic Curve. — E. C. Colpitts : On Twisted Quintic Curves. — G. W. Hill : Attraction of the Homogeneous Spherical Segment. — J. Eiesland : On a Certain Class of Algebraic Translation-Surfaces. — Herbert E. Jordan : Group- Characters of Various Types of Linear Groups.

2. Livres nouveaux :

K. Doehlemann. — **Geometrische Transformationen.** II. Teil *(Sammlung Schubert)*. — 1. vol. in-8o, 328 p. ; 10 Mk. ; G. J. Goeschen, Leiqzig.

Siegm. Günther. — **Geschichte der Mathematik.** I. Teil : Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. *(Sammlung Schubert)*. — 1 vol. in-8o, 428 p. ; 9 Mk. 60 ; G. J: Goeschen, Leipzig.

Rich. Heger. — **Analytische Geometrie auf der Kugel.** (*Sammlung Schubert*). 1 vol. in-8°, 152 p.; 4 Mk. 40; G. J. Göschen, Leipzig.

L. Kiepert. — **Grundriss der Differential- u. Integral-Rechnung.** II Teil: *Integral-Rechnung*. Neunte verbesserte u. vermehrte Auflage der gleichnamigen Leitfadens von M. Stegemann. — 1 vol. gr. in-8°, 737. p. 153 fig.: Helwingsche Verlag, Hannover.

J. Kosak. — **Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung** nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zweiter Band, erster Teil. Theorie des Schiesswesens auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Fehler-Theorie. — 1 vol. gr. in-8°; 400 + XVI p.; C. Fromme, Vienne.

C. A. Laisant. — **Einführung in die Mathematik.** Allen Kinderfreunden gewidmet. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr F. J. Schicht, mit 106 Fig. — 1 vol. 8°. 199 p.; Franz Deutike, Leipzig u. Wien.

Ern. Lebon. — **Géométrie descriptive et cotée.** (Classe de mathématiques A et B). — 1 vol., 180 p.: 4 fr.; Delalain frères, Paris.

L. Lecornu. — **Dynamique appliquée** (Encyclopédie scientifique, Bibliothèque de mécanique appliquée et Génie, dirigée par M. d'Ocagne). — 1 vol. cart. 550 p., 113 fig.; 5 fr.; Doin, Paris.

O. Manville. — **Les découvertes modernes en Physique.** Leur théorie et leur rôle dans l'hypothèse de la constitution électrique de la matière. — 1 vol. in-8°, 186 p.; 5 fr.: Hermann, Paris.

F. Rudio. — **Der Bericht des Simplicius ueber die Quadraturen des Antiphon u. des Hippokrates.** — 1 vol. in-16. 184 p.; 4 mk. 80; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Sarette. — **Précis d'arithmétique des Calculs d'emprunts à long terme et de valeurs mobilières.** — 1 vol. in-8°, 288 p.: 10 fr. Gauthier-Villars, Paris.

H. Skhubert. — **Niedere Analysis.** I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche u diophantische Gleichungen. (Sammlung Schubert). — 1 vol. in-8°, 181 p.; 3 Mk. 60; G. J. Goeschen, Leipzig.

P. Simon. — **Traité de Géométrie élémentaire,** à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire (premier et second cycles) suivi du complément à l'usage des candidats aux écoles du Gouvernement: *Géométrie plane*, *Géométrie de l'espace*; 2 vol, in;8°, ensemble 714 p., 1070 fig. prix 4 fr. et 2 fr. 50; Eug. Belin, Paris.

W. F White. — **O Scrap-Book of Elementary Mathematics.** — 1 vol. cart. 248 p; The open court Publishing Company, Chicago.

Weber u. Wellstein. — **Encyklopedie der Elementar-Mathematik.** Zweiter Band: *Elementare Geometrie*. Zweite Auflage. — 1 vol. cart.; 12 mk: B. G. Teubner, Leipzig.

Gomes Teixeira. — **Obras sobre Mathematica,** publicadas por ordem do Governo portugês. Vol. IV. — 1 vol. in-4°, 401 p.: Jmprensa da Universidade, Coimbra.

Worms de Romilly. — **Sur les premiers principes des sciences mathématiques.** — 1 vol. in-8°. 51 p.: 2 fr. 50: Hermann, Paris.

LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE

INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR

INTRODUCTION

Dans ses « Lettres à Françoise », Marcel Prévost, avec infiniment de bon sens, observe que les choses essentielles dont on impose la connaissance à nos bacheliers peuvent être dites avec beaucoup moins de grosses pages que les « Manuels » le laissent croire.

A quel point ce charmant conteur s'est ici montré bien informé des choses de l'éducation, j'ai eu l'occasion de le reconnaître lorsque je me suis trouvé moi-même en présence d'un problème nouveau de l'enseignement public.

Chargé de l'enseignement de la Chronométrie a l'Université de Besançon et ayant à soutenir notre école pratique de Réglage par cette éducation mathématique simple, rapide et solide qui convient à l'enseignement technique, j'ai organisé pour nos étudiants horlogers un cours complémentaire des Mathématiques de l'ingénieur qui, par son objet même, devait être à la fois un enseignement d'initiation et un instrument propre à éclairer les délicates théories du réglage.

Marcel Prévost avait raison ; dix leçons de géométrie suffisent pour des esprits déjà mûris par un travail vécu pour comprendre à fond la géométrie exigée par ces jeunes artistes appelés à suivre non seulement les lois des mouvements pendulaires mais encore le sens de leurs principales perturbations.

Les cinq conférences ici reproduites résument la première partie de cet enseignement géométrique d'initiation, celle qui forme la géométrie de l'enfant, celle qui est véritablement le premier livre de la géométrie naturelle.

D'ailleurs, je n'innove plus aujourd'hui ; quelques-unes des méthodes d'exposition que j'ai ici employées ont été préconisées aussi par d'autres auteurs, particulièrement en Italie.

Pour n'en citer qu'une, la nécessité de placer de suite le débutant dans l'espace réel à trois dimensions, en présence de la notion expérimentale du déplacement d'un solide, cette nécessité pédagogique est de première importance ; elle me fut révélée jadis, de la manière la plus naïve, par un enfant, dans l'une des petites classes de l'Ecole alsacienne, à Paris.

— Je porte le triangle A′B′C′ *vers le triangle* ABC, *disais-je un jour, avec Legendre.*

L'enfant objecta :

— Et, si le triangle A′B′C′ *cassait en route ?*

Cet enfant avait raison, ses sens lui révélaient une chose essentielle et que le bon Legendre n'avait pas assez remarquée.

Il me plait de reporter ici, sur ce souvenir de ma première leçon, ce que j'ai appris de mon petit élève et l'origine de mes premiers travaux sur la géométrie nouvelle, domaine où je me suis d'ailleurs rencontré avec bien d'autres.

Le premier livre de la géométrie réaliste est depuis longtemps mûr pour l'enseignement élémentaire ; le voici.

JULES ANDRADE.

CHAPITRE PREMIER

Les bases expérimentales de la géométrie ; cas d'égalité de deux triangles ; Droites perpendiculaires ; Droite perpendiculaire à un plan.

I

La géométrie est l'ensemble des propriétés que nous attribuons à l'espace pour nous rendre compte du *mouvement des corps* ; la notion même du mouvement n'acquiert pour notre esprit une signification précise que si le mouvement est rapporté à un corps *solide, incassable* choisi comme repère.

Les *faits primitifs* de la géométrie sont des faits de *déplacement* d'une espèce toujours comparable à elle même ; ces faits affirmés par les expériences vécues par nos ancêtres et revécues par nous, nous apparaissent comme les faits les plus simples du monde physique.

Nous allons d'abord examiner quels ils sont.

Si nous palpons ou regardons un corps *rigide* comme un ensemble de *points*, nous concevons d'abord qu'un pareil ensemble peut être complété par d'autres points invariablement liés aux premiers, en sorte qu'un ensemble solide n'a pas de *forme* assignée à l'avance.

II

Si nous *clouons* un solide sur un autre solide fixe nous constatons *qu'un seul clou* ne suffit pas pour empêcher tout mouvement du premier solide par rapport au second, ni même pour préciser complètement le déplacement possible du premier solide ; si nous venons à clouer le corps mobile

par deux clous différents, sa position n'est pas encore complètement déterminée, mais il ne peut plus prendre qu'une sorte de déplacement dans lequel une infinité d'autres points demeurent communs au solide mobile et au solide fixe, en sorte qu'on peut dire que si un corps est cloué par deux points A et B, (sans figure), tout se passe comme si on clouait une paire de deux autres points C et D choisis quelconques sur une certaine *ligne* LL appartenant au solide fixe et au solide mobile. Cette ligne ne bouge pas pendant ce mouvement défini nommé *rotation*.

Cette ligne LL ou *axe de rotation* est ce que nous appellerons une *ligne droite* ou simplement une *droite*.

Tout point M du solide qui n'appartient pas à la droite se déplace si le solide lui même se déplace.

Nous supposons que la droite est une ligne d'une espèce unique et que toute portion AB, (sans figure), d'une droite *peut être déplacée*, dans un déplacement convenable de solide, de manière à recouvrir une portion convenable de toute autre droite OX, par exemple la portion OM ; *et nous admettons même qu'il existe deux manières de superposer ces deux portions:* une manière dans laquelle, A coïncidant avec O, B coïncide avec M; l'autre manière, dans laquelle A coïncidant avec M, B coïncide avec O.

Enfin, nous admettons qu'une droite ou portion de droite OM n'est *prolongeable* au delà d'un quelconque M de ses points que d'une seule manière.

En d'autres termes, étant donnée une droite CAB il ne peut exister aucune branche nouvelle de la même droite émanée de A, ce qui revient à dire qu'il ne peut y avoir deux suites continues distinctes de points demeurant voisins de A et demeurant immobiles pendant une même rotation.

Enfin nous admettons que deux points distincts sont toujours joignables par une droite : et de plus, *sauf à revenir plus tard sur ce point*, qu'ils ne sont joignables que par une seule droite.

Nous pourrons dès lors désigner une droite par deux de ses points. Une portion continue et déterminée de droite parcourue dans un sens s'appelle *segment*.

III. — La trame triangulaire et le plan.

Soient (Fig. 1) 3 points A, B, O dont le troisième n'est pas sur la droite qui joint les deux autres ; il résulte des faits précédents qu'aucun des trois points ne sera sur la droite qui joint les deux autres.

Considérons alors un point M mobile sur la droite AB et la droite variable obtenue en joignant le point M au troisième point, considérons même les *segments* limités tels que OM ;

considérons de même un point P mobile sur AO, puis la droite variable obtenue en joignant le point P au point B ;

considérons enfin un point Q mobile sur OB, puis la droite variable obtenue en joignant le point Q au point A.

Nous avons ainsi formé 3 *trames* de droites.

Nous admettrons que ces 3 trames n'en forment qu'une seule.

En d'autres termes nous admettrons qu'un *segment* OM *coupe* un *segment BP en un point I.*

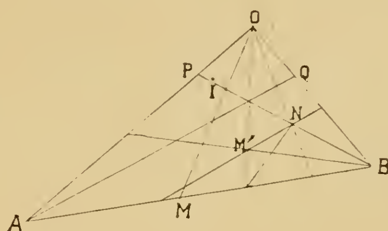


Fig. 1.

L'ensemble de ces trois trames fondues en une seule sera ce que nous appelons une *trame triangulaire*, ou encore un *triangle plan* ou simplement, un *triangle*.

Remarques. 1° si deux points M' et N (Fig. 1) appartiennent à une trame triangulaire le segment M'N qui les joint appartient tout entier à la trame. Cette remarque se justifie immédiatement en appliquant 4 fois la propriété essentielle de la trame triangulaire à 4 trames successives dont chacune *contient* la précédente.

2° La trame triangulaire contient donc tout segment qui y a ses deux extrémités.

En prolongeant *indéfiniment* les droites de la trame on voit, *par cheminement*, qu'il existe une surface telle que toute

droite qui y a déjà deux points y sera contenue tout entière, cette surface est *le plan*.

On voit aussi, toujours comme conséquence de la triple trame triangulaire, que toute droite XY (Fig. 2) partage le plan en deux régions (1) et (2) telles que le *segment* joignant

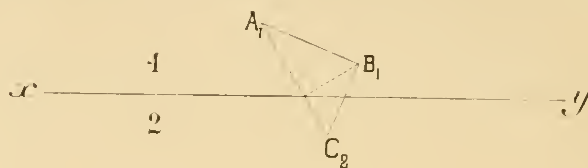


Fig. 2.

deux points quelconque d'une même région ne traverse pas la droite XY, tandis que le *segment* joignant 2 points appartenant à 2 régions différentes traverse XY.
nous admettrons encore le fait suivant :

IV

La position d'une trame qui fait partie d'un solide suffit pour définir complètement la position du solide ; il résulte de là que nous pouvons nous représenter le mouvement d'un solide tournant autour d'un axe par la rotation d'un plan du solide passant par le même axe.

Autre fait :

V

Lorsqu'un plan solide tourne autour d'un axe qui le contient, ce plan dans son mouvement *continu* pourra être amené en coïncidence avec tel plan de l'espace que l'on voudra, passant par l'axe ; et si on considère au lieu des plans complets les demi-plans *bordés* par l'axe de rotation, la rotation s'exécutant toujours *dans le même sens*, il arrivera un moment et un seul où le demi-plan mobile solide coïncidera avec le demi-plan fixe désigné à l'avance par *quelque portion de celui-ci*.

De là découle en particulier le principe du *rabattement :* Tout demi-plan peut être *rabattu* sur son prolongement par rapport a une droite AB de ce plan.

De là résulte aussi la notion de l'angle plan et de l'égalité des angles plans, insistons sur ce point quelque peu délicat.

Donnons à ce sujet une définition de l'égalité de deux figures entre lesquelles est définie une correspondance de leurs éléments constituants.

Deux figures sont dites *égales* si, à tout élément de l'une correspond un élément de l'autre, les ensembles de ces éléments étant deux parties correspondantes de deux solides capables d'être amenés en coïncidence l'un sur l'autre par un déplacement convenable.

Deux figures égales à une même figure sont alors égales entre elles.

Cette définition ne donne lieu à aucune difficulté lorsque les points constituant les figures sont en nombre fini ; lorsque ces éléments au contraire sont en nombre infini il faut avoir bien soin, toutes les fois qu'on veut se servir de la notion des figures égales de spécifier le mode de correspondance entre les éléments de l'une des figures et de leurs homologues dans l'autre.

Considérons par exemple deux faisceaux de droites formant deux portions de plan, supposons que ces ensembles que nous nommons *deux angles* soient supperposables O A (Fig. 3) venant en O′ A′, O B venant en O′ B′ après un déplacement convenable du solide, et les éléments intermédiaires du faisceau coïncidant aussi ; nous pourrons dire que ces angles sont égaux, mais cette définition serait stérile pour la suite si nous n'étions pas assurés qu'un angle plan est complètement défini par les positions de ses côtés extrêmes

En d'autres termes si deux angles plans A O B (sans figure), A O C sont à un moment dans une situation telle que l'un est portion de l'autre, il n'existera aucun déplacement capable d'amener l'un sur l'autre.

Cela résulte immédiatement des faits que nous avons admis concernant la rotation d'un demi-plan autour d'une droite A B.

Cette remarque est très importante et elle joue un rôle analogue à celui joué par le principe qu'une droite est déterminée par deux de ses points. Un angle est défini par ses deux côtés et par le sens de sa génération.

De même aussi qu'un segment est *orienté*, si le sens du parcours du point qui l'engendre est donné, de même un angle est orienté si le sens de l'apparition des droites du

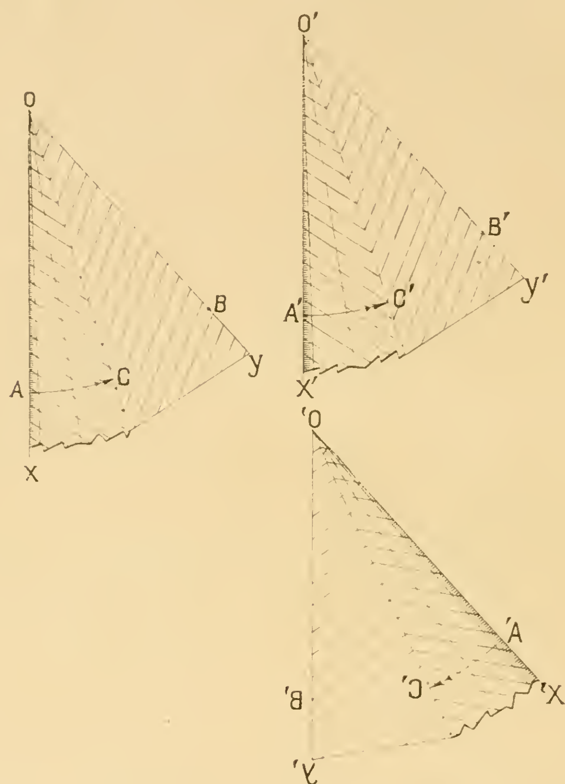


Fig. 3.

faisceau qui le forme est déterminé ; et de même qu'on définit le sens d'un segment par l'ordre dans lequel on appelle ses extrémités, de même on définira le sens d'un angle orienté par l'ordre dans lequel en énonce les noms de ses côtés supposés tracés au préalable avec une restriction, toutefois.

Ceci suppose que l'angle considéré soit choisi le plus petit des deux qui ont mêmes côtés extrêmes.

Rappel et conséquences des deux modes de superposition

des angles égaux. Si on peint les *deux faces* d'un plan on peut reproduire un angle par glissement : XOY (fig. 3) venu à droite en X′O′Y′ de manière que les faces de même couleur soient superposées.

C'est la reproduction par *glissement.*

On peut au contraire renverser l'angle dans son plan et reproduire l'angle obtenu par glissement la face bleue recouvrira alors le côté rouge primitif du plan, XOY venu, en dessous en ′Y′O′X.

Nous allons voir de ce fait des conséquences très importantes.

VI. — Propriétés du triangle isocèle.

Si sur les deux côtés d'un angle BAC (fig. 4) on prend deux longueurs égales à partir du sommet A : soit AB = AC on forme un triangle *isocèle.*

Ce triangle est superposable sur son envers, et lorsqu'on superpose l'angle BAC sur son envers C′A′B′ le milieu I de

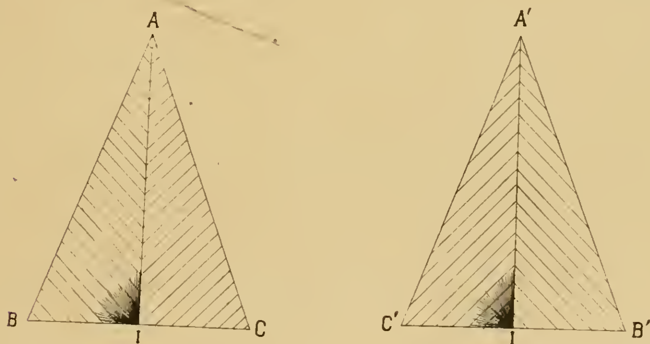


Fig. 4.

la droite BC reste le milieu de la droite C′B′ d'où l'on voit que l'envers de l'angle AIC recouvre l'angle AIB, rabattons alors la figure autour de B C (Fig. 5), IA vient en IA′ ; les 4 angles AIB, BIA′, A′IC, CIA sont égaux soit par glissement soit par retournement effectuons alors *un mouvement de glissement* autour du point I de manière que CIA prenant la place de AIB, IB prolongement de IC devra venir en IA″

prolongement de IA, les angles BIA′ et BIA″ seraient alors égaux, donc d'après une remarque essentielle faite tout à l'heure IA′ coïncide avec IA″ d'où le théorème suivant que nous énonçons après l'avoir démontré :

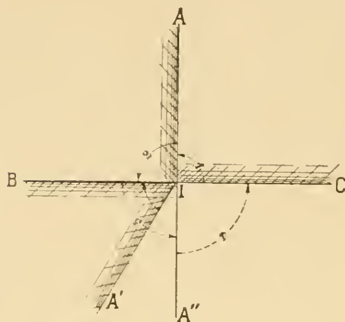


Fig. 5.

Théorème. *Dans un plan, étant donnée une droite AB (sans figure) et un point O de cette droite il existe une seconde droite du plan CD passant par O et formant avec la première 4 angles contigus égaux ; et chacune des droites ainsi obtenues vient coïncider avec son prolongement lorsqu'on rabat leur plan autour de l'autre droite.*

Définition. On dit alors que les droites AB et CD sont *perpendiculaires* entre elles, *cette relation est réciproque.*

Autre forme donnée aux résultats précédents. On peut encore dire :

Dans un triangle isocèle la droite qui joint le sommet principal (point de croisement des côtés égaux) au milieu de la base principale (côté opposé à ce sommet) est perpendiculaire sur cette base et réciproquement :

Si dans un triangle la droite qui joint un sommet au milieu I du côté opposé est perpendiculaire à ce côté, les deux autres côtés du triangle sont égaux.

La démonstration est immédiate par un rabattement autour de AI (Fig. 4), ce rabattement amenant C en B on a AB = AC.

L'angle de deux droites perpendiculaires entre elles s'appelle *angle droit.*

VII. — Les trois cas d'égalité des triangles.

Théorème. *Deux triangles sont égaux.*

1° *Lorsqu'ils ont un côté égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ;*

2° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ;*

3° *Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.* pour 1°, essai de superposition directe par l'angle égal $\widehat{A'} = \widehat{A}$ (Fig. 6) ;

Le cas 2° se démontre immédiatement en commençant l'essai de superposition directe par le côté égal B′C′ = BC (Fig. 7).

Dans les deux cas la superposition essayée s'achève d'elle même.

Pour démontrer le troisième cas d'égalité portons (Fig. 8) le triangle A′ B′ C′ *vers* ABC, C′ sur C et B′ sur B ce qui est possible puisque B′C′ = BC ; puis rabattons le triangle ainsi transporté du côté de BC où se trouve le triangle ACB, A′ vient alors en A″. Admettons pour un instant que les sommets A et A″ ne coïncident pas.



Fig. 6.

Par hypothèse AC = A″C ; AB = A″B.

Les triangles ACA″ et ABA″ seraient donc isocèles sur une base commune AA″ ; soit alors I le milieu de cette base. Joi-

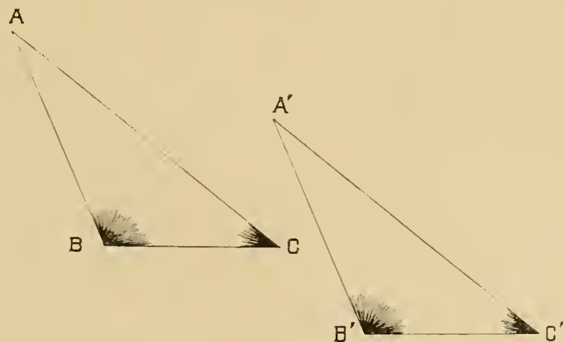


Fig. 7.

gnons AI et IB, ces deux droites seraient toutes deux perpendiculaires à AA″ en I, elles coïncideraient donc entre elles et par suite avec la droite AB le point I serait donc sur AB, mais ceci est impossible puisque A et A″ sont du même côté de AB et que tout point intérieur au segment AA″ reste

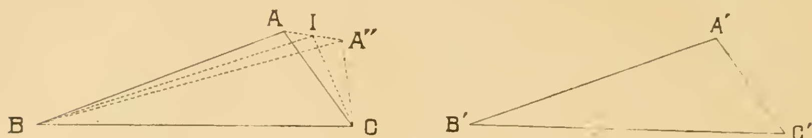


Fig. 8.

du même côté de BC que ses extrémités; il y a donc une contradiction qui ne peut être évitée que si A et A″ se confondent.

Remarque utile à retenir: dans deux triangles égaux aux côtés égaux sont opposés des angles égaux et réciproquement.

VIII. — Droite perpendiculaire à un plan.

Théorème. *Si une droite OA (Fig. 9) est perpendiculaire à deux droites distinctes AB, AC d'un plan P elle est perpendiculaire à une troisième droite quelconque du même plan.*

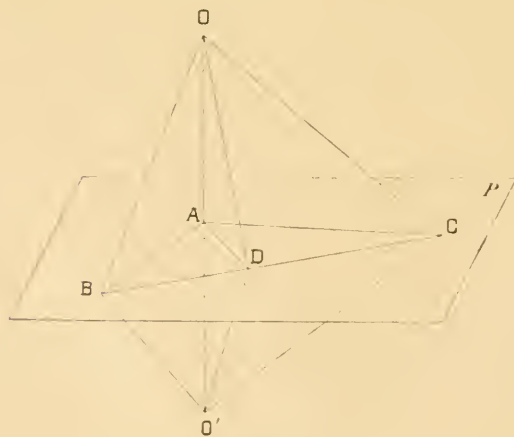


Fig. 9.

En joignant deux points autres que A pris sur deux des droites qui comprennent la troisième dans leur angle on obtient une droite qui coupe les trois droites issues de A aux trois points respectifs B, D, C soit O un autre point que A pris sur la droite AO, soit sur cette droite un autre point O′ tel que O′A = OA.

Les deux triangles OBO′ et OCO′ seront alors tels que les droites joignant le milieu A de leurs bases à leurs sommets respectifs seront perpendiculaires à cette base ces deux triangles seront donc isocèles et OB = O′B ; OC = O′C.

On conclut de là que les deux triangles OBC, O′BC réunis en talus par leur côté commun BC sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun ; nous concluons de là l'égalité des angles OBC et O′BC, puis ensuite l'égalité des triangles OBD, O′BD comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; d'où nous concluons OD = DO′; si enfin, nous considérons le triangle isocèle ODO′ nous voyons que la droite qui joint le sommet principal D au milieu A de la base est perpendiculaire à cette base.

Définition. Quand une droite OA est perpendiculaire à toutes les droites d'un plan P passant par A on dit que la droite est perpendiculaire au plan ; cette droite est nécessairement hors du plan P. Le point A se nomme la projection de O sur le plan P.

CHAPITRE II

Les deux mouvements fondamentaux d'un solide et la nouvelle théorie du dièdre.

En prenant comme éléments des figures les droites et les trames de droites ou plans et en prenant comme données fondamentales : la droite ou axe de rotation, et l'angle plan superposable sur lui-même par retournement nous avons déjà acquis un premier résultat important ; nous avons obtenu les trois cas d'égalité des triangles et la notion des droites perpendiculaires et celle d'une droite perpendiculaire à un plan, rappelons cette dernière notion.

Etant donnée une droite OX (sans figure), faisons passer par cette droite un premier plan dans lequel nous traçons OA perpendiculaire à OX, faisons passer par OX un second plan dans lequel nous menons OB perpendiculaire à OX, nous avons vu qu'une troisième droite quelconque tirée de O dans

le plan P formé par les deux droites OA et OB est perpendiculaire à OX. On a dit alors que la droite OX est perpendiculaire au plan P.

Il existe donc, par un point O de OX, un plan P perpendiculaire à OX, et comme tout plan peut être porté sur un autre plan on voit qu'aussi bien, étant donné un plan Q, on peut par un point O lui mener *une* droite OX perpendiculaire.

Mais il est nécessaire d'aller plus loin, et de nous assurer que par un point O d'un plan Q *on ne peut mener qu'une seule* perpendiculaire à ce plan.

Remarquons d'abord que par un point I situé hors d'un plan il ne peut passer deux droites distinctes IH et IK perpendiculaires à un plan Q.

En effet s'il en passait deux (Fig. 10), le triangle IHK ayant les deux sommets H et K communs avec le plan Q aurait la base HK commune avec lui dans le plan de ce triangle on aurait donc dans un même plan deux droites distinctes, perpendiculaires à une même droite et passant par un même point I, mais alors, comme on l'a vu (propriété des perpendiculaires) le rabattement du plan sur lui-même autour de HK devrait amener le point I en un même point J situé sur les prolongements de HI et de IK, on aurait donc deux droites distinctes passant par I et J ce qui, nous l'avons vu, n'est pas possible (propriétés fondamentales de la droite).

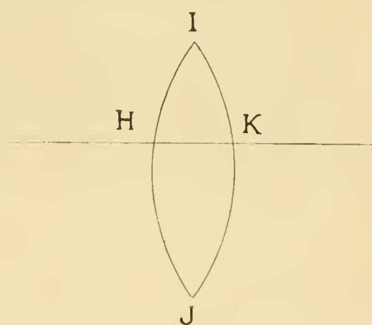


Fig. 10.

Cette remarque va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. — *Il est impossible que par un point O d'un plan Q puissent passer deux droites perpendiculaires à ce plan.*

En effet, soient deux de ces perpendiculaires sur lesquelles (Fig. 11) nous prendrons deux longueurs égales OM = ON, une droite quelconque tirée de O dans le plan Q, soit OS, est

perpendiculaire à une troisième droite quelconque dans le plan OMN; d'où on conclut, en faisant varier OS, que cette troisième droite quelconque du plan MON est aussi perpendiculaire au plan Q.

Considérons en particulier le point I milieu du segment MN; OI en particulier, sera perpendiculaire au plan Q.

Joignons SM et SN les deux triangles SOM et SON sont égaux comme ayant un angle égal (comme droit) compris entre 2 côtés égaux chacun à chacun; d'où on conclut que SM=SN, et, par suite, que IS est perpendiculaire à MN au point I (propriété du triangle isocèle).

Mais alors, en joignant un point S du plan au point I (Fig. 12) et prenant sur cette droite un segment de longueur constante IL, l'ensemble des points L ainsi obtenu devrait puisque

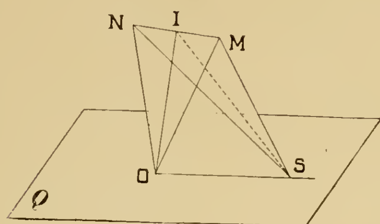


Fig. 11.

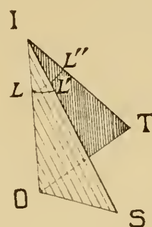


Fig. 12.

e LI est perpendiculaire à NM représenter l'ensemble des positions que peut occuper dans l'espace un point particulier d'un solide qui tourne autour de l'axe MN; or nous avons admis que l'ensemble des points L est une ligne, et que le déplacement de rotation d'un solide est parfaitement déterminé, tandis qu'ici nous voyons que ce déplacement est *complètement indéterminé* puisqu'il peut s'effectuer à partir de la position L dans tous les plans passant par IO.

Remarque additionnelle. La démonstration est achevée, mais pour rendre ceci encore plus net nous pourrons achever de préciser la complète indétermination du mouvement de L; les deux mouvements possibles pour le solide peuvent avoir lieu dans deux sens différents mais pour chacun de ces sens soit L′ une position voisine *postérieure* à la position actuelle

du point considéré dans le solide en rotation ; il existe sur la trajectoire de L des points de plus en plus voisins de L, et lorsque la distance LL′ tend vers zéro la position de LL′ tend, on le voit aisément, vers une position limite perpendiculaire à IO, *laquelle ne peut appartenir à tous les plans passant par la droite ILO* comme cela devrait avoir lieu en conséquence de la supposition faite plus haut qu'il existe 2 droites perpendiculaires à un plan. Cette supposition est donc une fois de plus inadmissible.

Conséquence. Nous savons déjà que la situation d'un corps solide peut être complètement définie par la position de l'une de ses trames, par exemple par celle qui se confond actuellement avec l'angle AOB de l'espace ; d'autre part nous venons de voir qu'il n'existe qu'une droite OZ perpendiculaire a l'angle AOB ; si donc on considère une barre rigide et si on l'oblige à rester perpendiculaire a une trame d'un solide, on peut être assuré que la barre sera du même coup invariablement liée au solide tout entier.

Théorème II. *Les diverses droites perpendiculaires à une même droite OZ menées par un même point O sont dans un seul et même plan.* Soit Fig. 13 OA une première perpendiculaire à OZ et soient OH et OK deux autres perpendiculaires à OZ, également tirées de O.

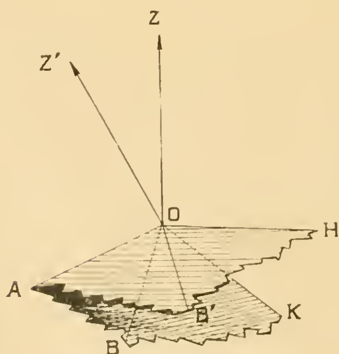


Fig. 13

Admettons provisoirement que les plans AOH et AOK puissent être différents ; alors traçons dans l'un et l'autre plan et à partir de OA comme origine, deux angles égaux AOB et AOB′.

La droite OZ est perpendiculaire à chacune des deux trames égales AOB et AOB′.

Les deux trames AOB et AOB′ étant égales, peuvent être regardées comme deux positions extrêmes d'une même trame d'un solide qui serait entrainée dans le mouvement de ce solide tournant autour de AO.

Regardons OZ comme la première position d'une droite du solide et considérons la positions OZ' occupée par cette dernière lorsque la trame AOB sera venue se coucher sur AOB' ; il est clair que OZ' sera distinct de OZ, sans quoi le solide aurait eu une trame ZOA non déplacée et n'aurait pas subi de déplacement ce qui est faux puisque la trame AOB s'est déplacée.

Or pendant le déplacement, la perpendiculaire à la trame lui reste perpendiculaire ; les droites OZ et OZ' distinctes seraient donc toutes deux perpendiculaires à la même trame AOB' ; mais nous avons déjà démontré que celà est impossible.

Donc enfin les plans HOA et KOA ne sauraient être distincts.

Conséquence : Tout plan pouvant être superposé sur un autre plan ou conservant sa perpendiculaire rigide, on voit de suite que par un point d'un plan on peut toujours tirer une droite perpendiculaire à ce plan.

Définitions. La courbe décrite par un point d'un solide tournant autour d'un axe, et qui, nous venons de le démontrer est contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe, s'appelle *une circonférence de cercle* ; OZ ou l'axe de ce cercle coupe le plan du cercle en un point O, appelé centre du cercle.

Dans son plan la circonférence de cercle est définie comme l'ensemble des points du plan qui sont à une même distance d'un point fixe. Le segment OM est un rayon du cercle.

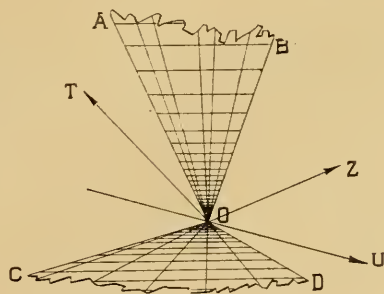


Fig. 14.

Corollaire. Si 2 plans distincts ont déjà un point commun ils ont en commun toute une droite commune passant par ce point, soit O le point commun Fig. 14 ;

Menons par O, 1° la droite OZ perpendiculaire au plan AOB ;

2° La droite OT perpendiculaire au plan COD;

3° Une droite OU perpendiculaire au plan des deux droites OZ et OT; cette droite OU étant perpendiculaire à OZ appartient au plan AOB, et étant perpendiculaire à OT elle appartient au plan OCD elle est donc commune aux deux plans AOB, COD.

Théorème III. *Pour projeter un point O sur une droite XY d'un plan P il suffit 1° de projeter le point O sur le plan P, en A; 2° de projeter le point A en I sur XY.*

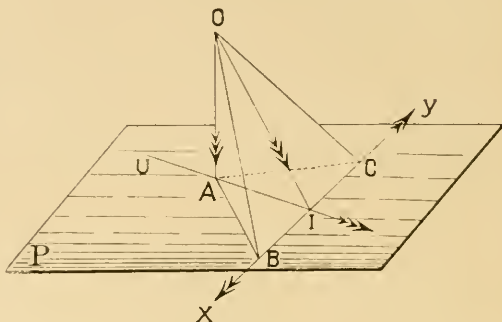


Fig. 15.

Il s'agit de démontrer qu'en joignant I à O la droite obtenue sera perpendiculaire à XY; à cet effet portons sur XY de part et d'autre de I les longueurs égales IB et IC, joignons les points B et C d'abord à A puis à O. On aura d'abord AC = AB, puis par la considération des triangles rectangles égaux OAB et OAC, nous trouvons OB = OC; et enfin, dans le triangle isocèle OBC, la droite qui joint le sommet O au milieu I de la base sera perpendiculaire à cette base.

Théoreme réciproque III *bis*. *Si par la projection I d'un point O extérieur à un plan P sur une droite XY du plan on mène, dans ce plan, une droite IU perpendiculaire à XY, la projection A du point O sur IU sera aussi la projection de O sur le plan P* (figure 15).

En effet la projection d'un point sur une droite ou sur un plan étant unique, le tracé précédent pourra être repris en ordre inverse de l'ordre précédent. Une démonstration directe serait d'ailleurs facile.

Corollaire. Tous les plans menés par un même point O perpendiculairement aux différentes droites XY d'un plan passent par une droite fixe OA.

Théoreme IV : *Si une droite* OI (Fig. 16) *coupant un plan* P

en I *n'est pas perpendiculaire à ce plan, les projections de ses différents points sur* P, *c'est-à-dire les pieds des perpendiculaires abaissées de ses différents points sur P, forment une droite du plan* P.

Démonstration. En effet soit H la projection de O, menons HI et IX dans P perpendiculaire à HI; cette droite IX est perpendiculaire à OI; d'après les théorèmes précédents, un point quelconque O′ de OI se projètera dans le plan P sur la perpendiculaire à IX menée par I, c'est-à-dire sur IH en quelque point H′ de I H.

Autre énoncé: si on observe que IX est perpendiculaire au plan OHI on voit par le même raisonnement qu'un point M quelconque intérieur au triangle OHI se projètera encore sur le plan P en quelque point M′ de HI.

Autre conséquence: soit K un point de HI situé sur le prolongement de HI au delà de I; joignons KO. et dans le plan du triangle OKH traçons IT perpendiculaire à HI: cette droite devra, d'après une remarque déjà faite [III, chap. I], couper *le contour* du triangle OHK, mais elle ne peut couper OH qui est comme elle perpendiculaire à HK; donc elle coupera OK en un certain point S.

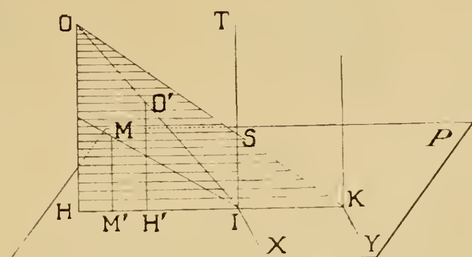


Fig. 16.

La droite OK n'étant pas perpendiculaire à HK, la perpendiculaire menée de S au plan P d'après le théorème précédent est contenue dans le plan OHK elle se confond donc avec SI.

Ainsi l'ensemble des projetantes des différents points de OI forme un plan qui contient aussi *une perpendiculaire au plan* P *élevée par I*, nous savons d'ailleurs que c'est la seule qui passe par I.

Définitions. On appelle *angle dièdre* la portion d'un solide comprise entre deux demi-plans réunis par leur frontière rectiligne commune ; cette droite se nomme *l'arête* du dièdre ;

Les deux demi-plans se nomment les *faces* du dièdre ; si par un point A (Fig. 17) de l'arête on trace des droites Ax, Ay perpendiculaires à l'arête et dans chacune des faces, on obtient *un angle* xAy *qui est dit : un angle rectiligne* du dièdre.

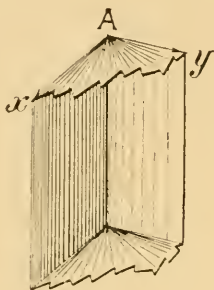


Fig. 17.

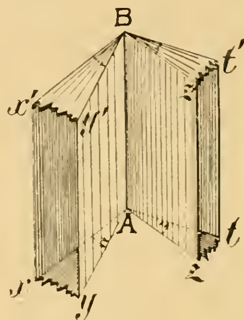


Fig. 18.

Théorème fondamental V. *Tous les angles rectilignes d'un dièdre sont égaux, quel que soit le point de l'arête d'où le rectiligne est tracé.*

Etablissons d'abord que si deux dièdres ont même arête, et que si leurs deux rectilignes d'un même sommet A (Fig. 18) sont égaux ; il en sera de même de leurs deux rectilignes d'un autre sommet B en effet si $\widehat{xAy} = \widehat{zAT}$ on peut amener par une rotation autour de AB la trame xAy sur la trame ZAT mais quand ce déplacement a été obtenu les plans BAx, BAy étant venu coïncider respectivement avec les plans BAz, BAt ; les droites Bx', By', viendront respectivement sur BZ' et BT' puisqu'elles sont perpendiculaires sur AB.

On conclut de là que : si l'angle $\widehat{xAy}$ est la moitié, le quart, le huitième etc ; de deux droits, l'angle x'By' sera égal en même temps que le précédent égal à la moitié, au quart, au huitième etc ; de 2 angles droits.

Les angles $x'By'$ et xAy seront donc égaux toutes les fois que le second est une fraction de 2 angles droits dont le dé nominateur est une puissance de 2.

Or, k et n désignant deux nombres entiers convenables, tout angle xAy est toujours compris entre deux angles égaux respectivement aux fractions suivantes de 2 angles droits savoir $\frac{k}{2^n}$ et $\frac{k+1}{2^n}$; or d'après ce qui précède l'angle $x'By'$ sera alors compris entre les mêmes deux angles, qui diffèrent d'aussi peu qu'on le voudra ; il est donc impossible que ces angles xAy et $x'By'$ soient différents.

Remarque. L'égalité des angles xAy et $x'By'$ dans le cas où le premier serait un angle droit résulte d'ailleurs évidemment du théorème sur la projection d'une droite établi tout à l'heure.

Ce théorème fondamental nous conduit à la notion du mouvement de translation d'un solide le long d'une droite donnée qu'il nous reste à définir :

la translation au guidage plan.

Théorème VI. *Si dans le mouvement d'un solide, une droite glisse sur elle-même et si un point du solide qui n'appartient pas à la droite reste dans un plan passant par cette droite, tous les autres points respectifs du solide restent dans des plans passant par la même droite à laquelle on peut donner le nom d'axe central de glissement.*

Ce théorème résulte immédiatement de l'égalité des angles rectilignes d'un même dièdre.

Remarques. Ainsi la droite se présente maintenant à nous soit comme *un axe de rotation*, soit comme *un axe de translation* avec guidage du mouvement du solide par le maintien d'un autre point dans un plan fixe passant par l'axe du glissement, auquel cas tous les points du solide se meuvent dans les plans passant par le même axe de glissement.

On remarquera encore comme conséquence de la théorie du dièdre et de la notion de l'angle de rotation cette proposition.

Théorème VII. *Quand un solide se déplace de manière qu'une trame du solide accomplisse un demi tour autour*

d'une droite de la trame, toutes les trames du solide qui passent par cet axe, accomplissent également un demi tour autour du même axe.

Remarque. Il est facile de s'assurer que ce dernier fait, pourrait aussi bien que l'existence de l'intersection rectiligne de 2 plans ayant un point commun, servir de fait primitif. et remplacer le fait que nous avons pris comme point de départ savoir : la continuité du mouvement de rotation.

Seconde démonstration :

Le théorème établi plus haut sur la projection d'une droite sur un plan peut évidemment s'énoncer ainsi : *Si un angle dièdre possède un angle rectiligne droit tous ses rectilignes seront aussi égaux à un droit*; dès lors la démonstration que nous avons esquissée pour passer du cas d'un dièdre dont tous les rectilignes valent 2 droits au cas d'un dièdre quelconque pourra se reproduire et nous permettra de passer d'un dièdre dont tous les rectilignes valent un angle droit à un dièdre quelconque.

Si l'on veut enfin une démonstration exempte de toute considération arithmétique nous exposerons la suivante :

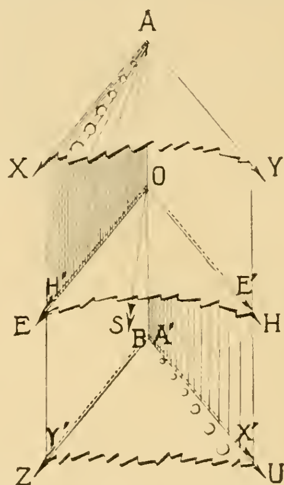


Fig. 19.

Troisième démonstration : (Fig. 19).

Pour démontrer que les deux angles rectilignes X A Y et Z B U sont égaux, nous considérons le milieu O de la droite qui joint les sommets A et B de ces deux angles rectilignes, puis nous traçons l'angle rectiligne du dièdre dont le sommet est en O soit l'angle E O H et nous allons *constater qu'un rabattement du plan E O H exécuté autour de la droite O S, bissectrice*[1] *de l'angle EOH, va faire coïncider l'angle X A Y sur l'angle UBZ envers* de l'angle $\widehat{ZBU}$.

En effet, par ce rabattement O E vient en O E′ recouvrir O H tandis que O H vient en O H′ recouvrir O E; le segment O A perpendiculaire à la trame E O H comme à la trame E′ O H′ devra donc, ou bien se retrouver sur lui-même, soit recouvrir le segment O B; le premier est inadmissible, car la fixité finale de la trame A O S fixerait le solide et par conséquent serait inconciliable avec le rabattement précédent; donc O A recouvre O B; A X vient alors en A′ X′ recouvrir B U, tandis que A Y vient alors en A′ Y′ recouvrir B Z donc enfin l'angle X A Y égal à l'envers de l'angle Z B U est aussi égal à ce dernier.

J. Andrade (Besançon).

(*A suivre*).

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME SUR LA DROITE DE SIMSON

Théorème I. — Soient une conique K de centre O et un triangle inscrit A B C ; a, b, c, les milieux des côtés BC, AC, AB. Joignons Oa, Ob, Oc. Par un point quelconque D de la conique menons des parallèles à Oa, Ob, Oc coupant les côtés du triangle en a_1, b_1, c_1 respectivement : Ces trois points a_1, b_1 c_1 seront en ligne droite (*fig.* 1). Si la conique est un cercle, ce théorème devient le théorème de Simson : *Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'un cercle sur les côtés d'un triangle inscrit sont en ligne droite.*

Théorème II. — Par un point quelconque S d'une conique menons des parallèles aux côtés AB, BC, CA du triangle inscrit ABC ; elles donnent sur la conique des points c, a, b. Soit D un point quelconque de la courbe, menons Dc, Da,

---

[1] La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux portions égales.

Db coupant respectivement les côtés AB, BC, CA du triangle aux points c_1, a_1, b_1 : *Ces trois points seront en ligne droite* (*fig.* 2).

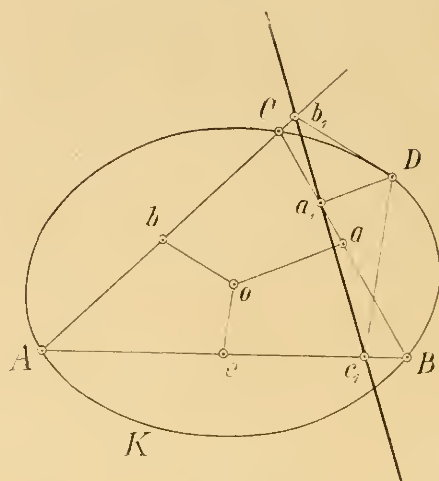


Fig. 1.

Si la conique est un cercle et si les points S et D sont pris aux extrémités d'un même diamètre, on retrouve le théorème de Simson.

Ces deux théorèmes ne sont qu'un cas particulier du *théorème général* suivant :

Soient une conique K et un triangle inscrit A, B, C. Soit M une droite quelconque prise dans le plan de la conique : déterminons sur cette droite deux divisions homographiques telles que les points d'intersection de la droite avec la conique en soient les points doubles (*fig.* 3). Nous prendrons pour les points de la première division les intersections c, a, b, de la droite M avec les côtés AB, BC, CA du triangle ;

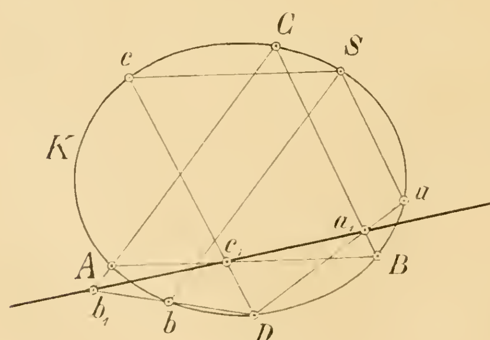


Fig. 2.

a_1, b_1, c_1 sont les points correspondants de l'autre division. Soit D un point quelconque de la conique : *Les droites* Da_1, Db_1, Dc_1 *couperont les côtés* BC, CA, AB *du triangle en trois points* α, β, γ, *situés sur la même droite*.

La démonstration en est facile. Considérons le côté AB du triangle comme fixe et le point C comme point variable pouvant se déplacer sur la conique. Le rayon variable AC coupe la droite M en b, point auquel correspond b_1. Les rayons AC et Db_1 sont les rayons de deux faisceaux homographiques, le lieu du point d'intersection de ces deux rayons

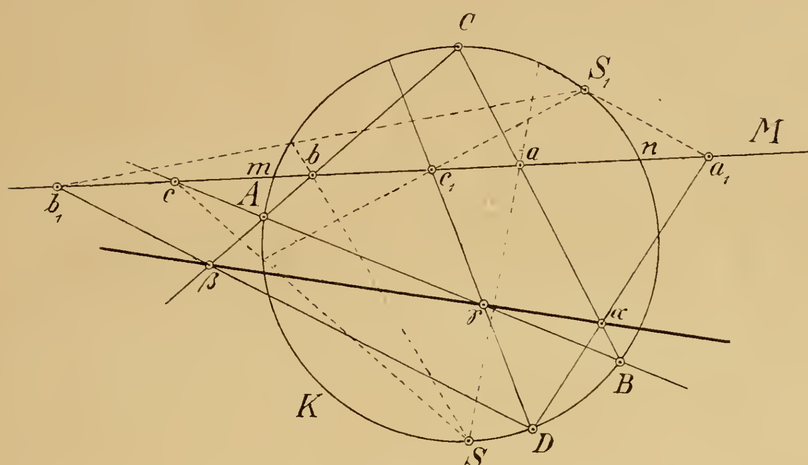


Fig. 3.

homologues sera une conique K_1, passant par les centres A et D des deux faisceaux, par les points m et n, intersection de la droite M et de la conique K, et par le point γ.

De même, le rayon variable BC coupe la droite M en a, point auquel correspond a_1. Les rayons BC et Da_1 sont des rayons homologues de deux faisceaux homographiques ; le lieu de leur point d'intersection sera une nouvelle conique K_2 passant par les centres B et D des faisceaux, par les points m et n et également par le point γ. Supposons que le point C décrive la conique K et considérons les rayons $\gamma\beta$ et $\gamma\alpha$. Ces rayons, ayant un centre commun γ appartenant aux deux coniques K_1 et K_2, sont homographiques. Un rayon $\gamma\beta$ du premier faisceau coupe la conique K_1 en un seul point β, la droite $A\beta$ coupe également la conique K en un seul point C. Au point C correspondra un seul point α et par suite un seul

rayon $\gamma\alpha$. Ainsi, à tout rayon $\gamma\beta$ correspond un seul rayon $\gamma\alpha$ et réciproquement.

Si nous pouvons démontrer que les faisceaux $\gamma\alpha$ et $\gamma\beta$ sont tels que l'on peut trouver trois rayons qui sont eux-mêmes leurs homologues, il en résultera que la propriété est générale, c'est-à-dire que chaque rayon est son propre homologue, ou encore que $\alpha\beta\gamma$ sont en ligne droite. Or il est facile de trouver les trois rayons en question. En effet, si C se trouve en m ou n, α et β se trouvent en m ou n, et si C est en D α et β coïncident avec ce même point D. Le théorème est donc démontré.

Les deux divisions homographiques a, b, c, ... a_1, b_1, c_1, ... ayant pour points doubles les points d'intersection de la droite M avec la conique K, peuvent s'obtenir en projetant les points de la conique sur la droite M, en prenant comme point de vue deux points quelconques S et S_1 de cette conique. Par conséquent, le théorème précédent peut s'énoncer comme suit : Soit une droite M coupant les côtés BC, CA, AB d'un triangle inscrit à une conique en a, b, c faisons correspondre à ces points trois autres points a_1, b_1, c_1 de la droite M, tels que S et S_1 étant deux points quelconques de la conique, les couples de droites Sa et S_1a_1, Sb et S_1b_1, Sc et S_1c_1 se coupent respectivement en des points de la même conique, il en résulte que les droites Da_1, Db_1, Dc_1 couperont les côtés BC, CA, AB en des points α, β, γ situés sur une même droite ; D étant un point quelconque de la conique.

Dans le cas où la droite M est la droite de fuite et où le point D coïncide avec le point S_1, on obtient le théorème II.

Si nous prenons pour divisions homographiques les divisions en involution, c'est-à-dire si aux points a, b, c, on fait correspondre les points conjugués a_1, b_1, c_1 par rapport à la conique, et si nous prenons pour la droite M la droite de fuite, on obtient le théorème I.

Nous pouvons obtenir maintenant des théorèmes correspondant par dualité aux précédents. Soient une conique et un triangle circonscrit ABC. Soit O un point que nous prenons comme centre de deux faisceaux homographiques ayant pour rayons doubles les tangentes menées de O à cette co-

nique. Soient les trois rayons OA, OB, OC; déterminons leurs correspondants et soient *a*, *b*, *c* les points où ces rayons correspondants coupent une tangente quelconque à la conique ; les droites A*a*, B*b*, C*c* seront concourantes. On peut déduire de ce théorème plusieurs théorèmes particuliers qui correspondent aux précédents par dualité.

Nous citerons seulement le cas particulier où le point O est le centre de la conique et où les faisceaux homographiques sont en involution. Nous obtenons alors le théorème suivant :

Soit un triangle ABC circonscrit à une conique de centre O. Soient les trois rayons OA, OB, OC, construisons leurs conjugués coupant une tangente quelconque à la conique aux points *a*, *b*, *c* les droites A*a*, B*b*, C*c* seront concourantes.

Si la conique est un cercle, nous obtenons un théorème qui correspond par dualité au théorème de Simson :

Soit un triangle ABC circonscrit à un cercle de centre O. Elevons en O des perpendiculaires aux droites OA, OB, OC respectivement ; soient *a*. *b*, *c*, les intersections de ces perpendiculaires avec une tangente quelconque au cercle, les droites A*a*, B*b*, C*c* sont concourantes. Ce point de concours se nomme pour cette raison le point corrélatif de la droite de Simson.

Ant. Pleskot (Pilsen).

SUR LA DÉFINITION DE L'AIRE DES SURFACES

1. — On définissait autrefois l'aire d'une surface S comme étant la limite des aires d'une suite de surfaces polyédrales inscrites dans la surface S et tendant vers elle. M. Schwarz[1] a montré que cette définition est inacceptable. Depuis cette remarque de M. Schwarz, bien des définitions ont été proposées.

Celle de M. Minkowski[2] mise à part, toutes ces définitions font dériver la notion d'aire d'une surface S de la considération de surfaces polyédrales voisines de S. Quelques auteurs ont employé des surfaces polyédrales discontinues, voir par exemple les définitions proposées par Hermite[3] et M. Peano[4], ce qui a l'inconvénient de ne pas faire ressortir l'analogie des sens mathématique et vulgaire du mot aire. La plupart des auteurs ont considéré des suites de surfaces polyédrales inscrites dans la surface à mesurer mais, pour que les aires de ces surfaces aient une limite, ils les assujettissaient à des conditions supplémentaires : que les angles des faces ne tendent pas vers zéro, que les angles des plans des faces avec les plans tangents tendent vers zéro, etc[5]. Ces définitions sont très artificielles, les restrictions qu'on s'impose ne se justifient que parce qu'elles conduisent bien à un nombre limite ; de plus il n'est nullement évident que d'autres restrictions ne conduiraient pas à un autre nombre limite tout aussi

---

[1] Voir une lettre de M. Schwarz a Genocchi reproduite dans le cours d'Analyse lithographié d'Hermite, 1882. Une observation identique a été faite par M. Peano (*Atti dei Lincei*. 1890).

[2] *Jahrb. der Deutsch. Math. Verein.*, 1901.

[3] Voir le cours cité d'Hermite. La définition d'Hermite est reproduite dans de nombreux ouvrages.

[4] Voir la note citée de M. Peano. En réalité la définition de M. Peano ne fait pas intervenir des surfaces polyédrales voisines de la surface à mesurer, mais des surfaces formées d'aires planes.

[5] Au sujet de ces définitions, voir la note de M. Peano. Tout récemment M. Cartan vient de proposer une définition du même genre (*Comptes Rendus*, 1907).

intéressant. Mais en réalité, tant qu'on se limite aux surfaces définies par des fonctions à dérivées partielles continues, ce que l'on fait toujours, on sait à l'avance la valeur de l'aire, car on n'accepterait pas comme valable une définition qui ne fournirait pas pour aire l'intégrale double classique. Aussi, si l'on a pas de définition naturelle à proposer, serait-il plus franc de prendre l'intégrale pour définition de l'aire et de chercher ensuite une propriété géométrique de cette intégrale en reprenant en sens inverse l'un des raisonnements qui permet d'arriver à cette intégrale en partant d'une des définitions géométriques précédemment indiquées.

Dans ses leçons sur les théories générales de l'analyse, M. Baire emploie une méthode analogue à celle dont je viens de parler. Après avoir attaché à une surface le nombre aire par l'intégrale double classique, il montre que cette aire jouit de la propriété suivante : c'est la plus petite limite que puissent atteindre les aires d'une suite de surfaces polyédrales tendant vers la surface à mesurer.

Cette propriété, qui ne particularise pas les surfaces polyédrales voisines de la surface donnée, me paraît assez importante pour pouvoir être posée comme définition de l'aire. C'est la méthode que j'avais employée dans ma thèse [1]; elle me paraît présenter différents avantages sur la méthode de vérification de M. Baire et les autres méthodes indiquées, en particulier celui-ci. Il n'est peut-être pas suffisant de donner dans les cours d'analyse une définition de l'aire; il faut encore faire le raccord entre cette définition et les évaluations d'aires faites en géométrie élémentaire; sans doute on pourra toujours faire ce raccord par des calculs de vérification, mais il vaut mieux, il me semble, que la même définition soit adoptée en géométrie élémentaire et en analyse. En reprenant ici la méthode que j'ai indiquée je veux surtout faire voir qu'elle peut être employée dès la géométrie élémentaire; je ne m'astreindrai pas cependant à employer le langage qui conviendrait pour être compris des débutants.

---

[1] Intégrale, Longueur, Aire: *Annali di Matematica*, 1902.

M. Zoard de Geöcze[1] a proposé une définition qui diffère de la mienne seulement en ce qu'il assujettit les surfaces polyédrales qu'il considère à être inscrites dans la surface donnée ; cette définition peut aussi être employée dès la géométrie élémentaire, un peu moins simplement que la mienne il me semble.

J'essaierai d'abord de justifier la définition que je proprose, j'en déduirai ensuite des conséquences en géométrie élémentaire et en analyse.

2. — Dans la pratique, pour mesurer l'aire d'une surface matérialisée non décomposable en surfaces connues, on mesure l'aire d'une surface polyédrale voisine. Pour imiter cela, ayant à mesurer une surface S, il nous faudra considérer des surfaces polyédrales S_1, S_2, ..., correspondant point à point d'une façon biunivoque et continue à S, et tendant vers S. Les surfaces S_i devront être choisies de manière que leurs aires A_i tendent vers une limite A.

On pourra toujours supposer que les faces de S_i sont divisées en triangles acutangles T_i de côté plus petit que $\frac{1}{i}$. B étant alors un nombre quelconque plus grand que A, remplaçons chaque triangle T_i par la surface latérale d'un tétraèdre à dièdres aigus, dont le triangle T_i considéré soit la base et tel que la surface latérale soit à la base dans le rapport $\frac{B}{A}$. Il est évident que la hauteur du tétraèdre est inférieure à $\frac{B}{A} \times \frac{1}{i}$, donc la surface Σ_i, formée par ces surfaces latérales, tend vers S en même temps que S_i ; elle correspond d'ailleurs évidemment point à point (je crois inutile ici et dans la suite d'expliciter les correspondances) à S_i donc

[1] *Comptes Rendus*, 1907 ; voir aussi la note citée de M. Cartan. — Dans ma thèse je n'ai pas choisi la définition de M. Zoard de Geöcze, d'une part, parce que, lorsqu'on mesure pratiquement une courbe ou une surface, on mesure des lignes polygonales ou des surfaces polyédrales voisines et non inscrites et d'autre part, parce que ma définition rendait plus facile certaines démonstrations, par exemple celle de la proposition : l'aire de la surface somme de deux autres est la somme des aires de ces deux autres. M. Z. de Geöcze a d'ailleurs démontré que, dans des cas tres étendus, il y avait identité entre sa définition, celle de M. Peano et la définition par l'intégrale double.

à S, donc B est, tout comme A, une limite d'aires de surfaces polyédrales tendant vers S[1].

L'ensemble de ces nombres limites d'aire est donc formé de tous les nombres égaux ou supérieurs à un certain nombre a qui définit l'ensemble et qui est le seul qui soit attaché simplement et naturellement à cet ensemble. C'est donc a qu'on doit prendre pour aire.

Ainsi, *on appellera aire d'une surface S la plus petite des limites des aires des surfaces polyédrales tendant vers S.* Cette définition est acceptable parce qu'elle est d'accord avec les définitions antérieurement données des aires des surfaces polyédrales et des domaines plans. D'ailleurs, en ce qui concerne ces domaines, du moins ceux qui sont limités par des courbes de longueur finie (et je suppose qu'on n'en considère pas d'autres), on peut admettre que l'aire est précisément donnée par la définition précédente. Quoiqu'il en soit, je supposerai dans la suite que l'étude de ces domaines plans a été faite.

La définition proposée ici est entièrement analogue à l'une de celles que l'on peut proposer pour la longueur d'une courbe. D'autre part, une définition analogue peut être proposée pour les volumes des domaines quarrables; sans doute dans cette dernière définition la considération *d'une plus petite limite* est inutile, mais il n'est peut-être pas sans intérêt de proposer, pour les trois principales grandeurs de la géométrie élémentaires des définitions entièrement semblables.

De la définition il résulte que : l'aire d'une surface est la plus petite des limites des aires des surfaces tendant vers elle ; les aires de deux surfaces égales ou symétriques sont égales ; les aires de deux surfaces semblables sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues.

---

[1] Les collégiens de ma génération s'amusaient au raisonnement suivant : soit ABC un triangle,divisons la base AB en un nombre quelconque de parties et.sur chacune d'elles comme base, construisons un triangle semblable à ABC. Les côtés de ces triangles forment une ligne polygonale égale à ABC et tendant vers AB quand le nombre des divisions augmente indéfiniment, donc AB = AC + CB. Nous démontrions de même que $\pi = 2$.

La plus grosse critique qu'on puisse faire en ces matières aux ouvrages de géométrie que nous avions est de constater qu'ils ne nous permettaient pas d'apercevoir une différence quelconque entre ce raisonnement et ceux qu'on nous faisait pour avoir la longueur d'une circonférence, la surface d'un cylindre ou le volume d'une sphère, puisqu'on ne nous définissait ni une longueur ni une aire, ni un volume.

3. — Voici comment, en géométrie élémentaire, on peut faire usage de cette définition pour la mesure des surfaces classiques qui sont convexes.

Je suppose établi ce théorème : toute surface polyédrale convexe fermée a une aire plus petite que toute surface polyédrale enveloppante ; proposition dont la démonstration est entièrement analogue à celle de la proposition correspondante de la géométrie plane. De là il résulte que toute surface fermée convexe a une aire au plus égale à celle de toute surface enveloppante.

Ceci posé soient S une surface fermée convexe, S_1, S_2, ... des surfaces polyédrales[1] convexes tendant vers S ; je dis que leurs aires tendent vers celle de S. En effet, O étant un point intérieur à S, je prends les homothétiques Σ_1, Σ_2, ... de S_1, S_2 ... par rapport à O, les rapports d'homothétie K_1, K_2, ... tendant vers 1 et étant choisis de telle manière que Σ_1, Σ_2, ... soient intérieures à S.

L'aire de S est supérieure à celle de Σ_p quel que soit p, donc au moins égale à la plus grande des limites des aires de Σ_p ; d'autre part, d'après la définition, l'aire de S est au plus égale à la plus petite des limites des aires des Σ_p. Donc les aires des Σ_p tendent vers l'aire de S et il en est par suite de même des aires des S_p.

Soient maintenant S', S'_p les parties de S et S_p situées d'un certain côté d'un plan P, D et D_p les domaines plans découpés par S et S_p sur P, T et T_p les surfaces convexes formées par S' et D, S'_p et D_p. Soient, d'autre part, s_p des surfaces polyédrales tendant vers S' et dont les aires tendent vers celle de S', P_p un plan parallèle à P, tendant vers P quand p croît, et tel que s_p découpe sur lui un domaine plan d_p, s'_p la partie de s_p situé du côté considéré de P_p, t_p la surface polyédrale fermée formée de s'_p et t_p. La limite des aires des s'_p est au plus celle des aires de s_p, donc c'est l'aire de S' ; la limite des aires des S'_p est au moins l'aire de S'. Mais d'autre part les aires des t_p tendent au plus vers l'aire de T qui est la limite des aires des T_p et comme les aires des D_p et des d_p tendent

[1] Le mot « polyédrales » pourrait être supprimé.

vers l'aire de D, la limite des aires des S'_p est au plus égale à celle des aires des s'_p.

En définitive les aires des s_p, s'_p, S'_p ont la même limite l'aire de S', c'est-à-dire que le théorème précédent s'étend aux surfaces telles que S'. Naturellement il s'étendra aux surfaces S'' formées de la partie de S' situé d'un certain côté d'un plan Q, etc.

Du théorème ainsi complété il résulte immédiatement que la surface latérale d'un cône convexe. d'un cylindre convexe, d'un tronc de cône convexe est la limite des surfaces polyédrales convexes inscrites, d'où les formules classiques. D'où aussi la formule qui donne l'aire engendrée par une ligne polygonale régulière tournant autour d'un de ces diamètres.

Mais l'aire d'une zone est la limite des aires décrites par les lignes polygonales inscrites dans l'arc de grand cercle méridien, d'où l'aire d'une zone, d'une sphère.

Je reviendrai plus loin sur ces démonstrations pour mettre bien en évidence ce qui les complique et comment on peut les simplifier.

4. En analyse, on pourra raisonner ainsi : soit $z = f(x, y)$ une surface S, f est définie pour un domaine quarrable D du plan des (x, y) et y admet des dérivées partielles du premier ordre finies et continues.

Divisons le plan des xy, par des parallèles aux axes, en carrés de côté λ. Soient α un de ces carrés entièrement intérieur à D, C_0 le centre de α, M_0 le point correspondant de S, P_0 le plan tangent en M_0, α_0 le quadrilatère contenu dans P_0 et qui se projette sur α. Soient d'autre part des surfaces polyédrales S_i tendant vers S et dont les aires tendent vers celles de S ; il est évident qu'on peut toujours supposer que ces surfaces ne traversent pas plus d'une fois toute parallèle à oz. Soit α_i la partie de S_i qui se projette sur α et soit β_i la surface latérale du cylindre projetant les contours de α_0 et α qui est comprise entre ces contours. On a évidemment :

$$\text{aire } \alpha_0 < \text{aire } \alpha_i + \text{aire } \beta_i .$$

D'autre part faisons tendre simultanément λ vers 0, i vers ∞

et désignons par Σ une somme étendue à tous les carrés α. Σ aire α_i tend vers l'aire de S, on ne doit donc pas diminuer sa limite en remplaçant le morceau α_i par $\alpha_0 + \beta_i$, donc on a :

$$\lim \Sigma \text{ aire } \alpha_i \leqq \lim \text{inf.} \Sigma \text{ aire } \alpha_0 + \lim \text{inf } \Sigma \text{ aire } \beta_i .$$

Si donc on fait en sorte que Σ aire β_i tend vers zéro, on aura :

$$\text{aire S} = \lim \Sigma \text{ aire } \alpha_i = \lim \Sigma \text{ aire } \alpha_0 .$$

Or l'aire β_i est le produit du périmètre 4λ de α par un nombre inférieur à $\varepsilon_i + \eta_\lambda \lambda$, ε_i désignant le maximum de la différence parallèle à oz de S et S_i, η_λ étant la limite supérieure de l'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial n}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dans un carré λ. Donc on a, n étant le nombre des carrés α,

$$\Sigma \text{ aire } \beta_i \leqq 4n\lambda\varepsilon_i + 4n\lambda^2\eta_\lambda ;$$

$n\lambda^2$ est inférieur à l'aire de D donc borné, i et λ peuvent être associés de telle manière que $4n\lambda\varepsilon_i$ tend vers zéro et alors Σ aire β_i tend vers 0[1].

Nous sommes ainsi ramenés à la définition d'Hermite, c'est-à-dire au calcul de Σ aire α_0. Or, x_0, y_0 étant les coordonnées de C_0, on a :

$$\text{aire } \alpha_0 = \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^2 + 1} ,$$

d'où l'on conclut de suite

$$\text{aire S} = \int\int_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dx dy .$$

Soit maintenant une surface Σ décomposable en deux surfaces S et S', analogues à la précédente, relatives aux domaines D et D' qui se recouvrent partiellement et ont un arc lm de frontière en commun. Je suppose cet arc de longueur finie ; soient $l_i m_i$ des lignes polygonales dont les longueurs sont bornées qui tendent vers lm et découpent dans D et D'

[1] Un calcul entièrement semblable permettrait de comparer Σ aire α_0 à l'aire d'un polyèdre inscrit à S et dont les sommets se projettent aux sommets des carrés α. On ferait ainsi le raccord avec la définition de M. Zoard de Geöcze.

des domaines D_i et D'_i ne contenant pas lm. Soit S_i, S'_i des surfaces polyédrales de la nature de celles précédemment considérées distantes de S et S′ dans D_i et D'_i de moins de $\frac{1}{i}$ et dont les aires diffèrent des parties correspondantes de S et S′ de moins de $\frac{1}{i}$. La surface formée de s_i de s'_i et d'une partie du cylindre de section droite $l'_i m_i$ a une aire qui tend évidemment vers celle de Σ car l'aire de la portion de cylindre tend vers zéro. Donc l'aire de Σ est la somme des aires de S et de S′ et l'on peut maintenant démontrer dans toute sa généralité la formule qui donne l'aire en coordonnées curvilignes.

De cette formule il résulte que, si une surface est donnée en fonctions des cordonnées curvilignes u, v par des fonctions à dérivées premières continues, l'aire de la partie de cette surface, correspondant à un domaine quarrable D du plan des (u, v) somme de deux domaines quarrables D_1 et D_2, est la somme des aires des parties de surface correspondant à ces deux morceaux.

5. — Ce qui a compliqué les raisonnements des deux derniers paragraphes c'est que je me suis astreint à ne pas admettre, sans les démontrer, de cas particuliers de cette proposition : l'aire de la surface somme de plusieurs autres est la somme des aires de ces surfaces composantes. Je n'ai pas voulu admettre ces cas particuliers parce que, comme l'on sait, l'énoncé précédent n'est pas exact dans toute sa généralité. Il me semble d'ailleurs que l'énoncé qui termine le paragraphe 4 n'est pas satisfaisant en ce sens qu'il fait intervenir la représentation paramétique de la surface considérée et non pas seulement une propriété géométrique de la surface et des courbes employées; c'est pourquoi, qu'on ait ou non l'intention de s'en servir pour simplifier les raisonnements ultérieurs, on devrait, à mon avis, aussi bien en géométrie élémentaire qu'en analyse, affirmer qu'on démontre la proposition ci-dessus énoncée dans le cas où les arcs le long desquels se soudent les surfaces composantes sont de longueur finie.

La démonstration que j'ai donnée dans ma thèse pour cet

énoncé repose d'ailleurs sur un principe très simple, immédiatement compréhensible même aux élèves qui étudient la géométrie élémentaire seulement; mais, si l'on veut exposer ce raisonnement complètement, on est nécessairement conduit à ce qu'il m'a semblé à des longueurs devant lesquelles j'ai reculé dans ma thèse.

En tous cas il n'y a aucune difficulté à examiner le cas où l'arc le long duquel on soude les deux surfaces composantes est plan ; la démonstration devient particulièrement simple lorsque les deux surfaces partielles sont tout entières d'un même côté du plan considéré (voir le raisonnement de la fin du paragraphe 4) ou lorsque les deux surfaces sont tout entières de côtés différents de ce plan.

H. Lebesgue (Poitiers).

UN NOUVEAU THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

---

1. — Cette qualification de « nouveau », que nous donnons au théorème en question, paraît véritablement justifiée, à la suite de recherches assez attentives et multipliées faites par plusieurs personnes. En raison même de l'extrême simplicité du sujet, on s'expliquerait difficilement un silence complet, aussi bien dans les traités classiques que dans les recueils d'exercices les plus répandus.

L'un des côtés originaux de cette proposition, c'est qu'elle a été découverte et démontrée, sans avoir été énoncée ; tandis que celui qui l'a énoncée est le premier à déclarer qu'il n'en est pas l'inventeur.

A propos des tables de numération inverses, dans son *Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques* (p. 29-31) M. Gabriel Arnoux a en effet établi implicitement le théorème

en question, par une constatation faite sur les figures, laquelle est une véritable démonstration. En examinant cette partie intéressante du livre dont il s'agit, M. Gaston Tarry, dont j'avais attiré l'attention sur ce point, a formulé l'énoncé, et en a déduit certaines applications qu'il m'a fait connaître, soit par correspondance, soit dans d'assez nombreuses conversations. Nous croyons, lui et moi, que le théorème mérite de devenir classique, qu'il fait ressortir les avantages de la méthode graphique en matière d'invention et qu'il est de toute équité de lui attribuer le nom du créateur de cette méthode.

2. — Ces explications préliminaires produites, arrivons maintenant à l'énoncé.

Théorème d'Arnoux. — *Soit* $M = m_1 m_2 \ldots m_n$ *un nombre composé, dont les facteurs* $m_1, m_2, \ldots m_n$ *sont premiers entre eux deux à deux ; appelons* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *les quotients* $\frac{M}{m_1} = m_2 m_3 \ldots m_n, \ldots\ldots$ *Si* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *sont des nombres tels que l'on ait*

$$a_1\mu_1 = \text{mult. } m_1 + r, \qquad a_2\mu_2 = \text{mult. } m_2 + r, \ldots a_n\mu_n = \text{mult. } m_n + r,$$

il s'ensuit qu'on aura aussi

$$a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots\ldots + a_n\mu_n = \text{mult. } M + r.$$

La démonstration est d'une extrême facilité. Il suffit en effet d'établir que $a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots\ldots + a_n \mu_n - r$ est un multiple de M. Or cette expression peut s'écrire

$$(a_1 \mu_1 - r) + a_2 \mu_2 + \ldots\ldots + a_n \mu_n$$

Le premier terme $a_1 \mu_1 - r$, en vertu de l'énoncé, est divisible par m_1 ; chacun des termes $\mu_2, \mu_3, \ldots\ldots \mu_n$, par sa définition même, est aussi divisible par m_1. Donc l'expression considérée

$$a_1 \mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n \mu_n - r$$

est divisible par m_1. On établirait de même qu'elle est divisible par $m_2, m_3, \ldots m_n$; elle l'est donc par le produit

$m_1 m_2 \ldots m_n = \mathrm{M}$, puisque ces facteurs $m_1, m_2, \ldots m_n$ sont premiers entre eux deux à deux, ce qui démontre le théorème d'Arnoux.

3. — Quelques observations supplémentaires peuvent trouver place. Reprenons les relations figurant dans l'énoncé, mais en mettant en évidence les multiplicateurs $b_1, b_2, \ldots b_n$ des facteurs $m_1, m_2, \ldots m_n$:

$$a_1 \mu_1 = b_1 m_1 + r, \qquad a_2 = \mu_2 b_2 m_2 + r, \ \ldots \qquad a_n \mu_n = b_n m_n + r.$$

En les ajoutant, on a

$$\Sigma a_i \mu_i = \Sigma b_i m_i + nr \ ;$$

et, en vertu du théorème d'Arnoux,

$$\Sigma a_i \mu_i = b\mathrm{M} + r.$$

Donc $$\Sigma b_i m_i = b\mathrm{M} - (n-1)\,r.$$

Cette remarque constitue en quelque sorte un corollaire.

Le multiplicateur b s'exprime par $\frac{\Sigma a_i \mu_i}{\mathrm{M}} - \frac{r}{\mathrm{M}}$, c'est-à-dire par

$$\frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \ldots - \frac{r}{\mathrm{M}}$$

Dire que cette expression se réduit à un nombre entier, c'est sous une forme nouvelle énoncer encore le théorème d'Arnoux. Ce nombre entier b a encore pour expression, d'après ce qui précède,

$$\frac{b_1}{\mu_1} + \frac{b_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{(n-1)\,r}{\mathrm{M}}.$$

4. — Si M est un produit de deux facteurs seulement, m_1, m_2, premiers entre eux, le théorème prend un caractère remarquablement simple. On a alors, $\mu_1 = m_2$, $\mu_2 = m_1$, et

$$a_1 m_2 = b_1 m_1 + r, \ a_2 m_1 = b_2 m_2 + r, \ a_1 m_2 + a_2 m_1 = b m_1 m_2 + r.$$

En outre

$$b_1 m_1 + b_2 m_2 = b m_1 m_2 - r \ ;$$

et le nombre entier b s'exprime par

$$\frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} - \frac{r}{m_1 m_2} \quad \text{ou par} \quad \frac{b_1}{m_2} + \frac{b_2}{m_1} + \frac{r}{m_1 m_2}.$$

Enfin ce nombre, comme on le voit immédiatement, est égal à

$$\frac{a_1 + b_2}{m_1} \quad \text{ou à} \quad \frac{a_2 + b_1}{m_2}$$

Les vérifications numériques de ces diverses propriétés seront faciles sur un exemple numérique quelconque.

5. — Il est à noter, pour revenir au théorème lui-même, qu'on peut supposer $r = 1$, pour ainsi dire sans rien particulariser. En effet, si l'on a les relations $a_1\mu_1 = b_1 m_1 + 1, \ldots$ on en déduit $\Sigma a_1\mu_1 = b\text{M} + 1$. Et il suffit de multiplier tous les a_i et tous les b_i par r, pour que 1 se trouve remplacé par r, en même temps que b l'est par br.

Le théorème est ainsi établi pour r quelconque, dès qu'il l'a été pour $r = 1$. Naturellement, on pourra ensuite, de $a_1 r$ et $b_1 r$, enlever m, autant de fois qu'on voudra, pour avoir les nouveaux multiplicateurs a'_1 et b'_1 ; et ainsi des autres.

6. — Parmi les applications possibles du théorème d'Arnoux, on peut signaler le problème que voici : une fraction irréductible étant donnée, dont le dénominateur est composé des facteurs $m_1, m_2 \ldots m_n$ premiers entre eux deux à deux, l'écrire sous la forme d'une somme de fractions dont les dénominateurs sont $m_1, m_2, \ldots$, somme augmentée ou diminuée d'un nombre entier.

Les considérations du n° 3 ci-dessus permettront d'avoir immédiatement la solution. En conservant les mêmes notations que plus haut, appelant $\frac{r}{\text{M}}$ la fraction donnée, nous avons

$$\frac{r}{\text{M}} = \frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \ldots + \frac{a_n}{m_n} - b .$$

Comme certaines des fractions $\frac{a_1}{m_1}$, $\frac{a_2}{m_2}$, ..., ou toutes, peuvent avoir des valeurs plus grandes que l'unité, on pourra faire

la somme des entiers qu'elles contiennent, laquelle ajoutée à $-b$ donnera un entier positif ou négatif.

On peut aussi mettre la fraction $\frac{(n-1)r}{M}$ sous la forme de la différence entre un nombre entier et une somme de fractions ayant pour dénominateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots$, en nous servant de la relation

$$\frac{(n-1)r}{M} = b - \left(\frac{b_1}{\mu_1} + \frac{b_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{b_n}{\mu_n}\right).$$

Nous engageons le lecteur à vérifier tout ceci sur des exemples numériques simples. Pour abréger, nous ne donnons pas ici ces exemples faciles. Qu'il nous suffise de remarquer que ces questions seront toujours ramenées à la résolution d'équations indéterminées de la forme $a_1\mu_1 = b_1 m_1 + r$, ou ce qui revient au même, de congruences $a_1\mu_1 \equiv r \pmod{m_1}$, où a_1, b_1 sont les inconnues.

7. — Les personnes qui ne connaîtraient pas l'ouvrage précité de M. Arnoux seront peut-être curieuses de savoir ce que sont ces tables de numération dont nous avons parlé au nº 1. Nous allons l'indiquer sur un exemple très simple, celui d'un produit $M = 28$ de deux facteurs 7 et 4 (en général m_1, m_2) premiers entre eux. En écrivant les 28 nombres, 0, 1, 2, ... 27, chacun d'eux, divisé par 7, donnerait un certain reste r_1, et divisé par 4, un certain reste r_2. En formant un tableau de trois colonnes (Nombres, r_1, r_2) on aurait une table de numération directe. La table de numération inverse a pour objet de trouver le nombre, inférieur à 28, qui correspond aux deux restes r_1, r_2, respectivement inférieurs à 7 et à 4. Voici cette table de numération inverse :

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	8	16	24	4	12	20
1	21	1	9	17	25	5	13
2	14	22	2	10	18	26	6
3	7	15	23	3	11	19	27

Pour savoir par exemple quel nombre, divisé par 7, donne pour reste 5 et, divisé par 4, donne pour reste 2, il suffit de prendre la colonne et la ligne marquées respectivement 5 et 2 ; à leur intersection, on trouve 26, qui est le nombre cherché.

La construction de cette table se fait en écrivant 0 dans la première case, à gauche en haut, et en écrivant tous les nombres 0, 1, 2, ... dans la ligne bissectrice de la verticale et de l'horizontale. Chaque fois qu'on sortirait du tableau de 28 cases, on y ramène le nombre à écrire en le plaçant dans la case homologue à celle qu'il occuperait, si la figure était indéfiniment reproduite sur toute l'étendue du plan.

Ces figures présentent de nombreuses propriétés sur lesquelles nous n'avons pas à insister ici. Pour un nombre M de la forme $m_1 m_2 m_3$, la table serait parallélépipédique, au lieu d'être rectangulaire. Pour plus de trois facteurs, elle affecterait la forme d'espaces à plus de trois dimensions, d'une réalisation pénible, mais dont la considération est utile pour la recherche et l'étude de certaines propriétés arithmétiques.

C.-A. Laisant.

CHRONIQUE

Le 4e Congrès international des mathématiciens. Rome, 1908.

Compte rendu sommaire.

Près de cinq cents mathématiciens avaient répondu à l'appel du Comité d'organisation. Ce fut un beau succès, entièrement justifié du reste par l'ensemble très remarquable des conférences générales annoncées au programme. Il est vrai que l'Italie elle-même a exercé une grande attraction et que bien des congressistes préféraient parfois le Forum, le Palatin ou les galeries artistiques au siège un peu excentrique du Congrès. La fréquentation effective aux séances de sections et aux séances générales a cependant été supérieure à celle des précédents congrès (Zurich, 209; Paris, 262; Heidelberg, 336). Le nombre des travaux présentés a augmenté dans le même rapport. Dans la suite on sera nécessairement amené à le limiter afin de laisser plus de temps aux conférences et discussions sur les questions d'un intérêt général pour la Science. On se rapprochera davantage du but que l'on s'est tracé au premier Congrès. De nouveaux pas ont précisément été faits dans ce sens par l'adoption des résolutions adoptées par le Congrès dans sa dernière séance générale et sur lesquelles nous attirons l'attention des lecteurs.

Suivant la décision prise à Heidelberg, le Congrès a été organisé par la « R. Accademia dei Lincei » avec le concours du « Circolo matematico di Palermo ». Le *Comité local* était composé comme suit : MM. P. Blaserna, président ; G. Castelnuovo secrétaire-général ; V. Reina, trésorier ; V. Cerruti, A. Di Legge, G. Pittarelli, A. Sella, A. Torrelli, V. Volterra. Grâce au bienveillant concours de l'Etat, de la Ville de Rome, et aussi de la municipalité de Tivoli, il a pu organiser de belles réceptions : tout d'abord, le dimanche soir 5 avril, la réception familière des congressistes à l'Aula de l'Université par le Recteur M. Torrelli, puis le mercredi soir très belle réception au Musée du Capitole par M. le Syndic Nathan, au nom de la municipalité de la ville de Rome ; le mercredi après midi visite du Palatin sur l'invitation de M. le Ministre de l'Instruction publique Rava, et le soir grand concert orchestral à l'Amphithéâtre Corea (mausolée d'Auguste) et enfin,

comme clôture du congrès, excursion à Tivoli avec visite à la villa d'Adrien et à la villa d'Este. Ce furent des fêtes brillantes et des réceptions empreintes d'une grande cordialité qui laisseront un souvenir durable chez tous les participants !

SÉANCES GÉNÉRALES

Séance d'ouverture. — Le 4e Congrès international des mathématiciens a été ouvert solennellement, le lundi 6 avril 1908, à 10 h. du matin, au Capitole, dans la belle salle des Horaces et des Curiaces, en présence S. M. le Roi d'Italie. De beaux discours, vivement applaudis, furent prononcés par M. Nathan, Syndic de la ville de Rome, M. Blaserna, Président du Comité d'organisation et M. Rava, Ministre de l'Instruction publique. Puis dans sa conférence *sur les mathématiques en Italie pendant la seconde moitié du 19e siècle.* M. Volterra rappela la part importante que les mathématiciens italiens prirent au mouvement scientifique grâce aux travaux de Cremona, Betti, Brioschi, Fergola, Battaglini et d'autres.

Première séance générale

Lundi 6 avril, présidence : M. Blaserna.

Les séances générales et les séances de section eurent lieu dans les salles de l'Accademia dei Lincei, au Palais Corsini. Dans la première séance générale, qui eut lieu le lundi après midi à 3 h., le Congrès confirma par acclamation le comité d'organisation comme comité du Congrès.

M. Segre (Turin) donne ensuite lecture du rapport de la Commission chargée d'examiner les mémoires présentés au concours de la *médaille Guccia* et composée de MM. Poincaré, Noether et du rapporteur. On sait qu'un prix de 3000 fr. et une médaille en or avaient été mis à la disposition du Circolo matematico di Palermo, sur la gracieuse offre de M. Guccia, au mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques, ou encore à la théorie des surfaces ou autres variétés algébriques. Trois mémoires furent présentés. La Commission décerna, à l'unanimité, le prix à M. Fr. Severi, professeur à l'Université de Padoue, pour ses travaux sur les surfaces algébriques. Tous les savants sauront gré à M. Guccia de sa généreuse initiative qui a provoqué d'intéressants travaux dans un important domaine des mathématiques.

Puis vinrent les conférences de MM. Mittag-Leffler et Forsyth.

Conférence de M. Mittag-Leffler *sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe.* — M. Mittag-Leffler commence par rappeler que le point

de départ de la théorie des fonctions analytiques chez Weierstrass est la série de puissances

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

Cette série est la source d'où jaillit successivement et en entier, par transformation et continuation, la théorie de la fonction analytique dans sa totalité. Il rappela ce théorème de Weierstrass à savoir que si un lien analytique quelque général ou quelque spécial qu'il soit, existe entre plusieurs différentes séries de puissances ou leurs dérivées, ce même lien subsiste encore pour les fonctions dans leur totalité.

La conférence avait pour objet d'exposer les solutions principales obtenues pendant les dix dernières années du problème suivant : former des expressions arithmétiques d'une variable x et d'une suite infinie de constantes $a\, b\, c\, d, \ldots$ qui sont linéaires par rapport à ces constantes et qui ont simultanément la propriété de représenter, si l'on introduit dans $a, b, c, d, \ldots$ les c_0, $c_1, c_2, \ldots$ la fonction F (x) correspondante dans un domaine dans lequel les $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$ une fois fixés, est définie d'une manière univoque. Les premiers efforts vers la solution de ce problème consistaient à rechercher des expressions qui représentent F (x) non seulement à l'intérieur du cercle de convergence C de $\mathfrak{P}(x)$, mais encore sur la périphérie de C, dans de tels points où F (x), est régulier. M. Borel est le premier qui est arrivé à une solution plus générale en ayant obtenu une expression valable à l'intérieur d'un domaine B qui entoure en général le domaine C. L'idée de M. Borel consistant à former une expression permettant de sommer une série (1) hors du cercle de convergence (il n'y a là qu'un jeu de mots) donne l'impression qu'il soit arrivé à reculer les limites de la théorie des fonctions analytiques autrement que ne l'avait fait Weierstrass. En fait si l'expression Borel converge hors du cercle et si l'on peut lui appliquer les mêmes opérations qu'à la série primitive (1), c'est uniquement en vertu du théorème de Weierstrass allégué tout à l'heure.

La solution complète du problème de la conférence a été obtenue finalement et de plusieurs manières différentes depuis que la nouvelle conception de *l'étoile* a été d'abord introduite par M. Mittag-Leffler en l'année 1898. A une de ces solutions qui est obtenue par une généralisation de l'intégrale de Laplace se rattache l'étude importante des fonctions $E_\alpha(x)$ de M. Mittag-Leffler ainsi que de la croissance des fonctions entières dans des angles où le long de demi-droites différentes. Le conférencier a terminé en rappelant la propriété remarquable de sa fonction

$$\mathrm{E}(x) = \int_s e^{e^z}\, e^{-e^{e^z}}\, \frac{dz}{z - x}$$

qui tend indéfiniment et uniformément vers zéro, quand la variable x augmente au-dessus de toute limite à l'intérieur d'un domaine entourant un angle si petit qu'il soit et qui embrasse la partie infinie de l'axe réel positif, mais qui possède encore la propriété inattendue de tendre indéfiniment et uniformément vers zéro quand la variable croit vers l'infini le long de l'axe réel positif.

Conférence de M. Forsyth, *on the present condition of partial differential equations of the second order, as regards formal integration.* — Le savant géomètre de Cambridge a examiné la question dans son ensemble avec des considérations sur plusieurs points connexes. Il a indiqué des restrictions aux deux définitions de l'intégrale générale d'équation du second ordre dues respectivement à Ampère et à M. Darboux et il a montré qu'il y a des difficultés pour la discussion de l'intégrale complète. Ensuite il a discuté les trois méthodes les plus importantes pour l'intégration proprement dite des équations du second ordre en les groupant sous les noms de Laplace, Ampère et de M. Darboux : il a établi des restrictions à leur application qui, si elles ne sont pas satisfaites dans chaque cas particulier, laisseront comme seule intégrale générale possible l'intégrale du théorème d'existence de Cauchy. Puis il a mentionné divers problèmes, les uns déjà en partie résolus, d'autres seulement ébauchés jusqu'ici ; parmi ceux-ci :

(I). L'application du calcul des « équations intégrales » aux équations avec dérivées partielles linéaires.

(II). La construction de classes d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui ont des intégrales intermédiaires qui ne sont pas du type de Monge.

(III). La construction de classes plus étendues d'équations qui sans avoir d'intégrale intermédiaire ont cependant des intégrales générales du type traité dans la conférence.

M. Forsyth signale à la réflexion des mathématiciens plusieurs problèmes dépendant de ces résultats.

Deuxième séance générale

Mardi 7 avril, présidence : M. Newcomb.

Conférence de M. Darboux. — La deuxième séance générale a débuté par une conférence très remarquable de M. Darboux *sur les origines, les méthodes et les problèmes de la Géométrie infinitésimale.* C'est précisément un domaine dans lequel les savants italiens ont apporté d'importantes contributions et cela fournit à M. Darboux l'occasion de rendre hommage au beau génie de l'Italie

où la Géométrie a donné des maîtres illustres tels que Bellavitis, Brioschi, Cremona et Casorati.

C'est un problème posé par la pratique, celui des cartes géographiques qui a donné naissance à la Géométrie infinitésimale. Etudié successivement par Lambert, Euler et Lagrange, il a été traité pour la première fois dans toute sa généralité par Gauss. Puis vinrent les travaux remarquables des géomètres français, Monge, Dupin, Lamé et de leurs successeurs dans les divers pays. M. Darboux montre ensuite quelles sont les méthodes de la Géométrie infinitésimale et quel est le rôle de la méthode analytico-géométrique. Il insiste tout particulièrement sur la nécessité d'introduire franchement et complètement les imaginaires en Géométrie et donne quelques exemples à l'appui. Abordant ensuite les problèmes de la Géométrie infinitésimale le savant conférencier passe successivement aux sujets suivants : les courbes à courbure constante ; les surfaces à courbure constante et leurs transformations ; la notion d'intégrale générale telle qu'elle a été donnée par Cauchy ; l'application aux surfaces minima, le problème de Plateau ; progrès et problèmes de la théorie des cartes géographiques ; les surfaces à courbure constante et la Géométrie non-euclidienne ; réduction des problèmes les uns aux autres ; les équations linéaires aux dérivées partielles et leur rôle en Géométrie infinitésimale ; la déformation des surfaces.

Dans son élégant exposé M. Darboux a montré qu'il reste encore bien des questions à résoudre par les géomètres et les analystes et il a attiré tout particulièrement leur attention sur la nécessité d'obtenir des méthodes générales et uniformes permettant d'introduire d'importantes simplifications.

Conférence de M. von Dyck (Munich), *Ueber die mathematische Encyclopädie.* — La question devait être traitée par M. F. Klein. Empêché de prendre part au Congrès, le savant professeur de Gœttingue s'est fait remplacer par M. v. Dyck qui siège avec lui dans la commission de l'Encyclopédie. Le conférencier donne un aperçu très clair de l'état actuel et du plan d'ensemble de cette importante publication. On sait qu'à Heidelberg (1904) M. Klein déposa les deux volumes qui forment le *Tome I* (Arithmétique et Algèbre). Cette fois le rapporteur remet à la présidence le premier volume du *Tome IV*, Mécanique : les fondements de la mécanique, mécanique du point et des systèmes rigides. Il a paru en outre vingt-neuf fascicules des autres volumes de l'édition allemande et quatre fascicules de l'édition française qui se publie sous la direction de M. Molk.

Troisième séance générale

Mercredi 8 avril, présidence : M. Gordan.

Conférence de M. S. Newcomb, *La théorie du mouvement de la lune, son histoire et son état actuel.* — Le savant astronome américain présenta un intéressant résumé des méthodes fondamentales pour déterminer les inégalités dans le mouvement de la lune produites par l'action du soleil et des planètes. Parmi les travaux importants de notre temps se trouvent ceux de Hansen et de Delaunay. Cependant, la meilleure méthode a été esquissée par Euler dans un ouvrage publié en 1772. Mais, chose curieuse, cent ans se sont écoulés sans qu'aucun géomètre n'ait reconnu la supériorité de cette méthode. Alors, en 1878 et 1888, George W. Hill publia deux mémoires qui forment la base sur laquelle Ernest W. Brown a construit une théorie complète des inégalités lunaires. Toutefois les observations depuis 1650 révèlent l'existence des inégalités de longue période dans le mouvement moyen de la lune, qui n'existent pas dans aucune théorie, et dont l'explication forme aujourd'hui la plus grande énigme de la mécanique céleste.

Conférence de M. H. A. Lorentz (Leyde). *Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther.* — C'est un sujet dont les physiciens se sont beaucoup occupés depuis Kirchoff, en se fondant sur les principes généraux de la thermodynamique, et plus tard, en introduisant des idées empruntées à la théorie cinétique de la matière, à la théorie électromagnétique de la lumière et à la théorie des électrons. Le savant professeur de Leyde en donne un aperçu qui a vivement intéressé les auditeurs. Après avoir rappelé les résultats relatifs au rayonnement de la chaleur qu'on doit à Kirchoff, Boltzmann et W. Wien, il montre que la méthode développée par Gibbs dans ses « Principes de mécanique statistique » peut être appliquée à un système composé de matière pondérable et d'éther ; à cet effet, il fait voir que les phénomènes dans un tel système peuvent être décrits à l'aide de formules qui sont exactement analogues aux équations du mouvement de Hamilton. La considération des valeurs moyennes dans un ensemble canonique de Gibbs conduit ensuite à une formule pour la fonction du rayonnement qui a été trouvée par M. Jeans et d'où l'on tire cette conséquence, qui semble assez singulière au premier abord, qu'un véritable état d'équilibre entre la matière et l'éther serait impossible, l'énergie s'accumulant de plus en plus dans l'éther où, à la longue, elle se trouve sous forme d'ondes électromagnétiques extrêmement courtes. La conférence se termine par une comparaison de cette théorie avec celle qui a été établie par

M. Planck, et d'après laquelle, grâce à une idée nouvelle introduite par ce physicien, l'énergie se partagerait entre la matière et l'éther dans une proportion déterminée.

Quatrième séance générale

Vendredi 10 avril, présidence : M. Mittag-Leffler.

Conférence de M. Poincaré. *L'avenir des mathématiques.* — Par suite d'une indisposition M. Poincaré n'a pu se rendre à la séance, au grand regret de tous les assistants parmi lesquels on remarquait le Ministre de l'Instruction publique M. Rava. M. Darboux donna lecture du Mémoire de son illustre collègue. C'est une étude substantielle du développement des idées en mathématiques ; elle sera lue avec le plus vif intérêt par tous les mathématiciens. M. Poincaré reprend et développe l'idée du célèbre philosophe viennois Mach, qui a dit que le rôle de la science est de produire l'économie de la pensée, de même que la machine produit l'économie de l'effort ; il montre, entre autres, combien un mot bien choisi peut parfois économiser la pensée. Avec un langage bien adapté des démonstrations faites pour un objet connu s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objets nouveaux, sans que l'on n'ait rien à y changer. Parmi les mots qui ont exercé une influence très heureuse il y a ceux de *groupe* et d'*invariant*. La nature des problèmes nouveaux contribue aussi au développement de la science. Le but de notre science est double, car elle confine à la fois à la Philosophie et à la Physique. C'est du côté de la nature qu'il faut diriger le gros de notre armée. C'est là que nous rencontrons toujours de nouveaux problèmes que nous posent le physicien et l'ingénieur. « Autrefois on ne considérait une équation comme résolue que quand on en avait exprimé la solution à l'aide d'un nombre fini de fonctions connues, mais cela n'est possible qu'une fois sur cent à peine. Ce que nous pouvons toujours faire ou plutôt ce que nous devons toujours chercher à faire, c'est de résoudre le problème qualitativement pour ainsi dire, c'est-à-dire de chercher à connaître la forme générale de la courbe qui représente la fonction inconnue. »

L'auteur passe ensuite en revue les diverses sciences particulières dont l'ensemble forme les mathématiques. Les grands progrès se sont produits toutes les fois que deux de ces sciences se sont rapprochées. Des Congrès comme celui-ci favoriseront ces rapprochements ; « ils nous mettront en rapport les uns avec les autres, nous ouvriront des vues sur le champ du voisin, nous obligeront à le comparer au nôtre, à sortir un peu de notre village et seront le meilleur remède au danger que je viens de signaler » (une trop grande spécialisation).

M. Poincaré examine successivement les progrès réalisés dans

les diverses branches et montre dans quel sens elles se développeront dans l'avenir. Nous devons nous borner à énumérer les principaux points abordés par l'éminent savant : l'Arithmétique, l'Algèbre, les équations différentielles, les fonctions abéliennes, la théorie des fonctions, la théorie des groupes, la Géométrie, le cantorisme, la recherche des postulats.

Conférence de M. E. Picard. *La Mathématique dans ses rapports avec la Physique.* — Dans sa très belle conférence sur la Mathématique dans ses rapports avec la Physique, M. Picard a d'abord insisté sur le fait qu'il y a toujours eu un contact très intime entre ces deux branches, depuis les temps les plus reculés où, chez les Egyptiens et les Chaldéens, les Mathématiques présentaient un caractère purement utilitaire et expérimental.

Au XVII[e] siècle le développement de la Cinématique et de la Dynamique donne une forte impulsion aux Mathématiques et l'on peut dire que l'Analyse est vraiment sortie de la Mécanique. « L'origine de la notion de dérivée est dans le sentiment confus que nous avons de la mobilité des choses et de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle s'accomplissent les phénomènes. » Pendant cette nouvelle période l'histoire des mathématiques, dans ses points les plus essentiels, se confond avec celle de la Mécanique.

M. Picard montre ensuite, par des exemples particuliers, les relations réciproques de la Mathématique et de la Physique. A une période d'induction vient succéder une période déductive où l'on s'efforce de donner aux principes une forme définitive. La Physique pose sans cesse de nouveaux problèmes et c'est sous son influence que se sont organisées les principales disciplines des sciences mathématiques, qui, en retour, par la netteté de leur langage, donnent une forme précise aux notions qui, sans elle, seraient vagues ; de plus, par leur puissance de transformation elles permettent souvent de mettre en évidence des faits nouveaux. C'est donc le monde extérieur qui nous a guidé dans nos recherches analytiques et le savant conférencier ne craint pas d'affirmer qu'il en sera toujours de même dans l'avenir et que la vraie place du mathématicien est à côté de ceux qui s'occupent des sciences de la nature.

Cinquième et dernière séance générale

Samedi 11 avril, présidence : M. Blaserna.

Le programme adressé aux congressistes avait encore annoncé deux conférences générales, celle de M. Hilbert, sur la méthode des variables indépendantes en nombre infini, et celle de M. Véronèse. A la suite d'un surmenage le distingué géomètre de Gœt-

tingue a dû renoncer à se rendre à Rome, et les congressistes l'ont vivement regretté. Ils ont également été privés du plaisir d'entendre le savant sénateur M. Véronèse qu'une indisposition a empêché de se rendre aux séances. Sa conférence sera toutefois publiée dans les comptes rendus du Congrès. Nous sommes heureux d'en pouvoir donner ici un résumé.

Conférence de M. Véronèse. *La Geometria non-archimedea.* — L'auteur rappelle d'abord les discussions anciennes sur l'infini et l'infiniment petit et établit une distinction entre les segments infinis ou infiniment petits actuels et les autres grandeurs analogues. Il fait remarquer que ce fût le continu intuitif qui a donné la clef permettant de répondre à la demande de l'existence des segments susdits, réponse qui semblait déjà donnée négativement par le postulat du continu, connu sous les formes de Weierstrass, Cantor et Dedekind. Après avoir établi la validité logique du continu rectiligne non-archimédien et par conséquent de la géométrie non-archimédienne, suivant la manière dont l'auteur l'a exposée dans ses *Fondamenti di Geometria*, il s'est aussi occupé des relations de cette géométrie avec les recherches de M. Hilbert et d'autres. Mais le but principal de la conférence est de faire ressortir la nature de l'axiome d'Archimède, le contenu et la méthode de cette géométrie en relation avec les autres axiomes, le contenu et les méthodes de la Mathématique pure et de la Géométrie en général. Il soutient la nécessité de la séparation entre les recherches mathématiques et celles qui ont un caractère philosophique proprement dit. Mais, si d'un côté la Philosophie doit accepter les nouvelles idées mathématiques déjà formées définitivement sur les principes de la Science, de l'autre côté la Mathématique ne peut pas négliger le contenu des objets de ses recherches, qui dans les questions de principe est un élément essentiel; de même aussi que la méthode que peut choisir le mathématicien doit être conforme à la nature du contenu des objets étudiés ; elle doit être philosophique. Le géomètre doit distinguer l'espace physique et intuitif de l'espace géométrique, mais il ne peut pas se désintéresser de la possibilité physique et de celles de ses hypothèses qui ne dérivent pas de l'observation directe extérieure, et par conséquent il doit s'opposer aux systèmes philosophiques sur la théorie de la connaissance qui contredisent ses principes.

Il était particulièrement intéressant de voir aborder ce sujet par l'éminent professeur de Padoue, d'autant plus qu'il n'existe pas encore d'opinion commune entre les géomètres sur ces questions qui pourtant appartiennent à la Géométrie.

Séance administrative. — Dans sa séance de clôture le Congrès a tout d'abord été appelé à se prononcer sur les propositions des

sections III et IV concernant la *création de deux commissions internationales.* Toutes deux ont été vivement appuyées. Elles ont été présentées et adoptées dans l'ordre suivant :

Commission internationale de l'enseignement mathématique. — « *Le Congrès ayant reconnu l'importance d'un examen comparé des méthodes et des plans d'études de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires des différentes nations, confie à* MM. Klein, Greenhill *et* Fehr *le mandat de constituer une Commission internationale qui étudiera ces questions et présentera un rapport d'ensemble au prochain Congrès.* » (Voir plus loin le compte rendu de la section IV.)

Commission internationale pour l'unification des notations vectorielles. — « *La section III (Mécanique), après un échange de vues dans lequel a été reconnu l'importance d'une unification des notations vectorielles, propose au Congrès la nomination d'une Commission internationale pour l'étude de cette question.* » — Le Comité d'organisation est invité à constituer cette Commission en faisant un choix dans la liste des noms proposés dans la séance de section du 11 avril. (Voir le compte rendu de la section III A.

M. Conti (Bologne) attire ensuite l'attention de l'assemblée sur le rôle utile que pourrait jouer une *Association internationale des mathématiciens.* Il propose que la question soit mise à l'ordre du jour de la prochaine séance. Cette proposition est approuvée.

Mathématiques appliquées.—Le Congrès approuve également la proposition suivante présentée par M. d'Ocagne au nom de la section III B : « *Il résulte de l'échange de vues qui a eu lieu dans la section III B qu'il serait hautement désirable de provoquer une entente de plus en plus étroite entre ceux qui s'occupent de perfectionner les méthodes mathématiques et ceux qui ont besoin de les appliquer à un objet pratique. A cet effet la section émet le vœu que les mathématiques appliquées à la science de l'ingénieur fassent, au prochain Congrès, l'objet d'une section spéciale.*

En outre la section III B propose la constitution d'une commission internationale chargée de préparer les travaux de cette nouvelle section. La composition de cette commission internationale sera fixée par le bureau du IVe *Congrès.*

Œuvres d'Euler. — Dans sa séance consacrée à l'Histoire, la section IV a été appelée à se prononcer de nouveau sur la question de la publication des œuvres d'Euler. Depuis le vœu émis à Heidelberg, cette question a en effet fait un nouveau pas grâce à l'initiative de la Société helvétique des sciences naturelles et de l'Association internationale des Académies. La section IV émet le vœu suivant : « *Reconnaissant l'importance pour les mathématiques pures et appliquées de la publication des œuvres d'Euler, le Con-*

grès salue avec reconnaissance l'initiative de la Société helvétique des sciences naturelles et émet le vœu qu'elle obtienne la collaboration des mathématiciens des diverses nations ; il prie l'Association internationale des Académies et spécialement les Académies de Berlin et de St-Pétersbourg qui ont compté Euler au nombre de leurs membres de prêter leur appui à cette publication. »

M. le président BLASERNA déclare qu'il transmettra la proposition à la prochaine réunion de l'Association internationale des Académies qui doit se tenir à Rome l'année prochaine.

M. DARBOUX fait observer que la question a été examinée par la dite Association dans sa réunion tenue à Vienne. On peut donc être assuré dès maintenant que ce nouveau vœu d'un Congrès de mathématiciens ne trouve un accueil très favorable.

La proposition de la section IV est adoptée à l'unanimité.

LIEU ET ÉPOQUE DU PROCHAIN CONGRÈS. — On sait qu'à Heidelberg M. GREENHILL s'était fait l'interprète des mathématiciens anglais pour émettre le vœu que le 5e Congrès se tienne en Angleterre. M. FORSYTH reprend cette invitation au nom de la *Cambridge Philosophical Society*, avec l'appui de la *London mathematical Society* et de nombreux mathématiciens anglais, écossais et irlandais. La proposition de tenir le *5e Congrès international des mathématiciens à Cambridge en août 1912*, est adoptée par acclamation.

M. MITTAG-LEFFLER annonce qu'au prochain congrès les mathématiciens suédois auront l'honneur d'inviter le Congrès international à se réunir à Stockholm en 1916 et qu'ils se sont déjà assurés du haut patronage de S. M. le Roi Gustave.

M. HADAMARD émet le vœu que l'on favorise le plus possible le rapprochement entre les mathématiciens et les physiciens en cherchant à faire coïncider le lieu et la date d'un prochain congrès avec un congrès de physiciens. M. Forsyth espère que ce vœu se trouvera déjà partiellement réalisé à Cambridge où viendront certainement de nombreux physiciens.

Pour terminer *le président* M. Blaserna fait remarquer combien ce Congrès a été important par ses travaux et exprime sa reconnaissance à tous ceux qui ont contribué à la réussite des séances générales et des séances de section. Après un discours vivement applaudi dans lequel M. Darboux présente les remerciements des congressistes étrangers, le Président déclare clos les travaux du Congrès.

SÉANCES DES SECTIONS

Section I : Arithmétique, Algèbre, Analyse.

Introducteurs : MM. Arzelà, Capelli, Pascal, Pincherle. Ont en outre été appelés à la présidence : MM. Jordan, Gordan, Forsyth, Mittag-Leffler, Stephanos, Moore.

Secrétaires : MM. Amaldi et Galvani.

37 communications, réparties sur 5 séances.

1. GORDAN (Erlangen), Die Auflösung der allgemeinen Gleichnung des 6ten Grades. — L'auteur démontre que l'équation du professeur Gerbaldi est une forme normale de l'équation générale du 6me degré.

2. T. ZERMELO (Göttingen), Ueber die Grundlagen der Arithmetik und Analysis. — D'après une nouvelle définition d'un ensemble infini il déduit les propriétés fondamentales des nombres finis et en particulier le principe de l'induction complète.

3. E. BOREL (Paris), Sur les principes de la théorie des ensembles. — Nos notions exactes sur la puissance des ensembles ne vont pas plus loin que l'observation suivante : il y a des ensembles nombrables et des ensembles non nombrables, cette dernière définition étant purement négative.

4. F. RIESZ (Györ, Hongrie), Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre. — L'auteur introduit les concepts de type de condensation et de type d'enchaînement qui forment le fondement d'une théorie générale des variétés continues.

5. A. B. FRIZELL (Göttingen), Die Mächtigkeit des Kontinuums. — Il considère en particulier les nombres tels que dans leur développement en fraction continue chaque nombre naturel n'apparaît qu'une seule fois.

6. P. KOEBE (Göttingen), Ueber ein allgemeines Uniformisierungsprinzip. — L'auteur cite ses plus récents travaux dans les « Göttinger Nachrichten » sur l'uniformisation des courbes algébriques ou analytiques. Il aborde ensuite le mémoire de Poincaré « Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. »

7. BOUTROUX (Paris), Sur l'inversion des fonctions entières. — L'auteur traite de la relation de ce problème avec le problème général de l'uniformisation des divers mécanismes de permutations.

8. PETROVITCH (Belgrade), Une classe remarquable de séries entières. — Il recherche les conditions nécessaires et suffisantes

pour qu'une série de Maclaurin jouisse de la propriété d'avoir tous ses zéros réels, afin que le même fait subsiste pour chaque polynome formé d'un nombre quelconque de termes au commencement de la série.

9. PINCHERLE (Bologne) Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti. — L'auteur met en relation l'ordre infini de la génératrice avec les singularités de la déterminante et il rappelle leur application à la série de Dirichlet.

10. YOUNG (W.-H.) (Göttingen). On some applications of semi-continuous Functions. — L'auteur résume les applications qu'il a faites des fonctions semi-continues : 1° aux conditions de continuité ; 2° à la théorie de l'intégration ; 3° à la théorie de la mesure ; 4° à la discussion sur la distinction entre droite et gauche ; 5° à la théorie de convergence uniforme et de la divergence des séries.

11. HADAMARD (Paris). Sur l'application d'une méthode de Calcul des variations. — La méthode indiquée par l'auteur dans son mémoire des *C. R.* (Paris 1906, décembre) pour la résolution d'un problème du Calcul des variations présente certaines difficultés dans le cas des problèmes isopérimétriques et dans le cas où l'intégrale est prise sous forme paramétrique. D'autre part il semble que ces difficultés sont inhérentes à la nature des choses, en particulier à l'existence de singularités dans le champ fonctionnel.

12. SCHLESINGER (Kolozswar). Sur quelques problèmes paramétriques de la théorie des équations différentielles linéaires. — L'auteur parle de quelques problèmes que l'on rencontre dans l'étude des équations différentielles linéaires lorsqu'on examine les relations entre les substitutions fondamentales et les paramètres dont dépendent les coefficients. Il fait hommage au Congrès d'un exemplaire de ses « Vorlesungen ueber lineare Differentialgleichungen » (Leipzig, 1908).

13. REMOUNDOS (Athènes). Sur les zéros des intégrales d'une classe d'équations différentielles. — L'auteur utilise une méthode d'élimination dont il s'était servi dans sa thèse et établit un théorème analogue concernant les intégrales d'une classe beaucoup plus étendue d'équations différentielles.

14. PICK (Prag). Ueber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion. — L'auteur développe suivant un nouvel aspect la théorie générale des équations différentielles hypergéométriques en considérant d'une façon plus détaillée le cas des équations d'ordre inférieur et ayant trois points singuliers.

15. SALTYKOW (Kharkow). Sur l'existence des intégrales de S. Lie et le perfectionnement de la méthode de Jacobi dans la théorie des équations aux dérivées partielles. — L'auteur indique entre autres quelques perfectionnements à la méthode Jacobi-Mayer en montrant comme les modifications qui sont ainsi introduites ne

dérangent pas la symétrie des calculs de Jacobi. Chaque système différentiel des caractéristiques prend la forme d'un système canonique d'équations différentielles totales.

16. Lalesco (Bucarest), Sur les solutions analytiques de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$. — L'auteur fournit une étude qui permet d'établir la formule de Fourier pour toutes les solutions analytiques de l'équation considérée.

17. Volterra (Rome), Sopra il metodo delle immagini nelle equazioni del tipo iperbolico. — L'auteur se reporte à une note publiée dans les « Proceedings of the London Mathematical Society » (1904), et dans les « Lezioni di Stocolma » et montre que le principe des images peut s'appliquer à l'équation fondamentale à trois variables du type hyperbolique.

18. Zervos (Athènes), Sur la correspondance entre les théories d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et l'intégration des systèmes de Monge. — L'auteur fait observer comment dans certains cas particuliers on peut faire correspondre aux théories d'intégration des équations aux dérivées partielles des théories relatives à l'intégration d'un système de Monge.

19. E.-G. Moore (Chicago), On a form of general Analysis with application to differential and integral Equations. — Deux principes de généralisation, dont l'un consiste à adjoindre un paramètre. Application aux équations intégrales linéaires et aux équations différentielles linéaires.

20. Fredholm (Stockholm), Les intégrales de Fourier et la théorie des équations intégrales linéaires. — L'auteur attire l'attention sur le fait qu'il existe une classe d'équations intégrales de deuxième espèce dont la solution est une fonction multiforme de laquelle dérivent toutes les équations intégrales de première espèce que l'on peut résoudre avec la méthode des intégrales de Fourier.

21. Adhémar (R. d') (Lille), Sur les équations intégrales de MM. Fredholm et Volterra. — L'auteur montre la nécessité d'introduire les « parties-finies » des intégrales infinies dans les problèmes de Volterra. Il traite un problème un peu plus général que celui de Volterra et Lalesco avec la méthode des approximations successives et il étudie la nature analytique des solutions.

22. Orlando (Rome), Sulla risoluzione delle equazioni integrali. — L'auteur expose une méthode de résolution de certaines équations intégrales, puis il étudie le cas général à l'aide de la méthode des approximations successives.

23. De Donder (Bruxelles) adresse un mémoire sur les invariants intégraux.

24. Pascal (Naples), Sulla nuova teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualcunque. — M. Pascal présente un résumé

des principaux résultats qu'il a obtenus par cette nouvelle théorie.

25. Stéphanos (Athènes), Sur une extension de la théorie des covariants et invariants de formes binaires. — L'auteur expose diverses propriétés de ces expressions et montre leur importance dans la résolution de différents problèmes algébriques.

26. Montessus R. de (Lille), Sur les relations de récurrence à trois termes. — L'auteur cherche à démontrer le théorème de Poincaré en substituant une relation de récurrence à coefficients constants à la relation de récurrence à coefficients variables qu'il introduit dans la question.

27. Pucciano (S. Demetrio Corone), Contributo alla critica di alcune questioni che si riattaccano all' equazione differenziale di Laplace. — L'auteur examine entre autres les conditions suffisantes auxquelles est soumise l'intégration de l'équation différentielles aux dérivées partielles du premier ordre et qui sont suffisantes pour intégrer l'équation différentielle de Poisson.

28. Capelli (Naples), Sopra i coefficienti degli sviluppi delle funzioni algebriche. — L'auteur donne quelques développements des résultats qu'il a obtenus et qui se trouvent dans les « Rendiconti de l'Académie de Naples (1907) ».

29. Niccoletti (Pise), Riduzione a forma canonica di un fascio di forme bilineari e quadratiche. — Exposé des lignes fondamentales d'un théorème de Weierstras sur l'équivalence de deux faisceaux de formes bilinéaires dont le déterminant n'est pas identiquement nul, en considérant en particulier le cas des faisceaux de formes symétriques.

30. Fubini (Gênes), Sulla teoria dei gruppi discontinui. — L'auteur donne quelques généralisations concernant les groupes qui transforment en elles-mêmes une région quelconque et les courbes de transformations conformes, puis il assigne une méthode qui dans chaque cas peut servir à reconnaître la discontinuité propre des groupes linéaires à un nombre quelconque de variables.

31. Dickson (Chicago), adresse une Note intitulée : On the last theorem of Fermat.

32. B. Levi (Cagliari), Sopra la equazione indeterminata del 3° grado. — L'auteur s'occupe de la détermination de solutions rationnelles de l'équation indéterminée du 3me degré à l'aide des procédés rationnels et en partant des solutions rationnelles connues.

33. Frattini (Rome), La nozione di indice e l'analisi indeterminata dei polinomi interi. — Après une courte introduction l'auteur définit *l'indice* d'un binome irrationnel et donne une règle pour sa détermination. Il termine par quelques applications.

34. Severini (Catania), Sulle successioni infinite di funzioni analitiche. — L'auteur rappelle les recherches faites dans ce do-

maine suivant la direction donnée par Cauchy et Riemann, puis il les examine ensuite au point de vue de la théorie de Weierstrass.

35. Zaremba (Cracovie), Sur le principe de Dirichlet. — M. Zaremba remplace le problème de Dirichlet par un autre plus général qu'il appelle *problème transformé* et il montre que la théorie du principe de Dirichlet et les questions qui s'y rattachent résultent simplement de la théorie du problème transformé.

36. Boggio (Turin), Sulla risoluzione di una classe di equazioni algebriche che si presentano nella matematica finanziaria ed attuariale. — L'auteur appelle l'attention des analystes sur la résolution des équations algébriques dans lesquelles tous les coefficients sont positifs, sauf le terme connu qui est négatif.

37. Autonne (Lyon), adresse un mémoire sur les fonctions homogènes d'une variable hypercomplexe.

Section II : Géométrie.

Présidents : MM. Bianchi et Segre. — Ont en outre été appelés à la présidence : MM. Zeuthen, Darboux, Noether, D'Ovidio, Schur.

Secrétaires : MM. De Franchis et Amoroso.

17 communications, réparties sur 4 séances.

1. Andrade (Besançon), Le théorème d'Ampère-Stokes et le postulatum d'Euclide. — Le théorème d'Ampère-Stokes sur le vecteur tourbillon est susceptible d'une extension non-euclidienne ; après avoir justifié cette remarque l'auteur en montre l'application suivante : la cinématique des vecteurs caractérise immédiatement l'espace euclidien par la forme cartésienne de son ds^2 savoir $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

2. Varicak (Agram), Beitrag zur nicht-euklidischen analytischen Geometrie. — Exposé de quelques applications à la Géométrie analytique de Lobatschefsky.

3. Zeuthen (Copenhague), Un exemple d'une correspondance sans « Werthigkeit ». — Etude basée sur la détermination des « points-pinces » d'une certaine surface réglée.

4. Montesano (Naples), Sui complessi bilineari di coniche nello spazio. — L'auteur fait un exposé des complexes qu'il a étudiés et montre comment ils se rattachent à ceux de Humbert.

5. Severi (Tivoli), Di alcuni recenti résultati nella geometria algebrica e di qualche problema ad essa collegato. — Après avoir rappelé les résultats concernant les intégrales simples appartenant à une surface algébrique, il considère la cause d'irrégularité d'un système linéaire liée à l'irrégularité de la surface.

6. Bagnera (Messine), Sopra le equazioni algebriche f (x, y, z)

= 0 che si possono risolvere con x, y, z, funzioni meromorfe quadruplamente periodiche de due parametri.

7. DE FRANCHIS (Parme). Intorno alle superficie regolari di genere uno che ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti. — Exposé des méthodes permettant la construction des surfaces hyperelliptiques et étude d'un cas particulier.

8. RADOS (Budapest). Ueber Wendetangenteuebenen von Raumkurven. — L'auteur expose le critère de l'existence des plans tangents d'inflexion pour les courbes gauches dans l'espace ordinaire et dans les espaces de dimensions supérieures.

9. BIANCHI (Pise). Sulle trasformazioni di Darboux delle superfici di area minima. — C'est une étude des transformations basée sur les travaux de MM. Darboux et Guichard. Les transformations ainsi obtenues pour la démonstration des paraboloïdes ne sont qu'un cas particulier des transformations des surfaces applicables sur les quadriques. L'auteur indique un problème plus général dont la solution paraît désirable.

M. Darboux ajoute quelques remarques et signale quelques résultats nouveaux.

10. PANNELLI (Rome). Sopra un carattere delle varieta algebriche a tre dimensioni. — L'auteur montre que le genre Jacobien d'une droite donnée ne dépend pas du choix de cette droite et qu'il constitue par conséquent un invariant relatif à la variété.

11. DINGELDEY (Darmstadt). Zur Erzeugung der Kegelschnitte nach Braikenridge und Maclaurin. — Le conférencier examine le mode de classification des éléments qui servent à la génération des sections coniques selon Braikenridge et Maclaurin.

12. FINSTERBUSCH (Zwickau). Ueber Erweiterung eines Schliessungsproblems von J. Steiner und ihre Beziehung zur Gauss'chen Theorie Zentrierter Linsensysteme. — L'auteur donne deux exposés d'un problème de Steiner avec une application à la théorie des lentilles.

13. GALLUCCI (Naples). Su la configurazione armonica.

14. BRÜCKNER (Bautzen). Bemerkungen zur Morphologie der aussergewöhnlichen Polyeder erläutert durch die Sechsflache. — Aperçu des principes de la division en classes des polyèdres irréguliers et méthode principale pour la génération de ces formes.

15. BROUVER (Amsterdam). Une théorie des groupes finis et continus indépendante des axiomes de Lie. — Elle est basée sur la prépondérance biuniforme et continue des courbes.

16. TZITZEICA (Bucarest). Sur une nouvelle classe de surfaces.

17. PFEIFFER (Kieff). Du développement des fonctions algébriques de deux variables indépendantes en séries entières des variables indépendantes.

Section III.

Section III A : Mécanique et Physique mathématique.

Présidents : MM. Pizzelli, Levi-Civita, Luiggi. — Ont en outre été appelés à la présidence : MM. Volterra, G.-H. Darwin, Liapounoff, Wangerin, Hadamard.

Secrétaires : MM. Gianfranceschi, E. Levi, Boggio.

25 communications, réparties sur 6 séances.

1. G.-H. Darwin (Cambridge). The rigidity of the earth. — Etude historique et critique des principaux travaux sur la rigidité de la terre en rapport avec le phénomène des marées ; l'auteur examine tout particulièrement les travaux de Laplace et de Lord Kelvin.

2. Lamb (Manchester). The flexure of narrow Beams.

3. Lauricella (Catania). Sull' equazione $\Delta^{2n} V = 0$ e su alcune estensioni delle equazioni dell' elasticita. — L'auteur part de sa récente démonstration de l'équation : $\Delta^4 V = 0$ et présente une généralisation pour des valeurs données au contour de la fonction inconnue et de ses dérivées normales des $N - 1$ premiers ordres. Il envisage encore d'autres équations plus générales.

4. Somigliana (Turin). Sulle deformazioni elastiche non regolari. — L'auteur commence par démontrer l'existence possible de déformations élastiques satisfaisant aux conditions établies par Weingarten et non pas à celles de Volterra et que de telles déformations ne sont possibles que dans les corps simplement connexes. D'après une conception du professeur Morera il énonce une théorie possible de la tension des larmes bataviques.

5. M. Abraham (Berlin). Zur Theorie der Wirbelstrombremsen. — Etude basée sur l'électrodynamique de Hertz. L'auteur cherche jusqu'à quel point la dépendance de la force freinante à la vitesse peut être déterminée théoriquement.

6. J. Andrade (Besançon). Nouvelle méthode pour la mesure du frottement. — L'auteur construit une roue pendule de grandes dimensions qui produit par une même pression systématique deux frottements de moments différents, et par la comparaison de deux expériences il déduit des extinctions des amplitudes le coefficient de frottement après élimination de l'effet de roulement.

7. Korn (Munich). Ueber die universellen Schwingungen der Materie mit Anwendungen auf die Theorie der Gravitation und der intramolekularen Kräfte. — Après une courte exposition des fondements de la théorie des vibrations universelles (vibrations propres aux particules faiblement compressibles, immergées dans un milieu incompressible) l'auteur définit la vibration de pulsa-

tion nécessaire pour expliquer la gravitation comme étant une vibration fondamentale des vibrations universelles.

8. Levi-Civita (Padoue), Sulla espressione asintotica dei potenziali ritardati. — L'auteur étudie le caractère de dépendance fonctionnelle qui complique singulièrement le maniement des potentiels retardés.

9. Garbasso (Gênes), La luce bianca. — Etude du spectre normal d'une vibration amortie. D'accord avec les expériences de Zelinder et en opposition avec la théorie de Carvallo il cherche à établir que ce spectre est continu.

10. Greenhill (Londres), Geometry of motion of a spinning top. — Méthode pour désigner une famille de courbes hodographes de l'herpolodie de Poinsot en employant l'ellipse focale d'un hyperboloïde déformable et une tangente génératrice pour la détermination de l'angle absidal et des inclinaisons limites des axes.

11. Sommerfeld (Munich), adresse une Note intitulée : Beiträge zur Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen.

12. Boggio (Turin), Sopra alcuni teoremi di fisica matematica. — Etude des applications aux problèmes de la Physique mathématique des intégrales des équations indéfinies aux limites.

13. Boccardi (Turin), Sur une nouvelle équation dans les observations des passages. — L'auteur explique les observations et les faits qui l'ont conduit à établir une table qu'il appelle « équation de transparence. »

14. J. Andrade (Besançon), Synchronisation par le fer doux. — La méthode d'approximations successives de M. Picard a permis à l'auteur d'affirmer la stabilité du phénomène de synchronisation et de l'étendre à des mouvements *à peu près* pendulaires amortis par une résistance *à peu près* proportionnelle à la vitesse. Dans la synchronisation par le fer doux il n'y a plus de force synchronisante périodique à proprement parler et pourtant la méthode de M. Picard et la notion des substitutions répétées combinées permettent d'expliquer encore ici le phénomène de la synchronisation.

15. Genese (Aberyswyth), The Method of reciprocal polars applied to Forces in Space. — Extension à l'espace des conclusions d'une Note précédente sur les polaires réciproques en statique publiée dans les « Proceedings of the London Mathematical Society. »

16. Macfarlane (Chatham, Canada) adresse un mémoire intitulé : On the square of Hamiltons's delta. — Etude de cette expression en coordonnées polaires.

17. Tedone (Gênes), Sopra il problema di Lamé. — Détermination de certains systèmes triples orthogonaux de surfaces de rotation.

18. G.-H. Bryan (N. Wales), Notes on the steering of automobiles and on the balancing of ships. — L'auteur examine les conditions géométriques qui interviennent dans l'étude du glissement latéral.

19. Poynting et Barlow (Angleterre), The momentum of a beam of light. — L'étude de la pression de radiation sur un plan mobile révèle l'existence d'une composante tangentielle lorsque le faisceau tombe obliquement sur une surface absorbante.

20. Kolosoff (Jurserff), Sur le problème plan dans la théorie d'élasticité. — Etude d'un nouveau moyen permettant d'obtenir diverses solutions du problème plan de la théorie d'élasticité. Elle a été suivie de remarques de MM. Runge, Boggio, Volterra et Hadamard.

21. Marcolongo (Naples), Per l'unificazione delle notazioni vettoroviali. — MM. Burali-Forti et Marcolongo ont publié dans les « Rendiconti di Palermo » (1907-1908), une série d'articles sur cette importante question. M. Marcolongo résume leurs propositions qui sont basées sur les deux *principes* suivants :

I. Les notations fondamentales du système minimum vectoriel ne doivent pas être en contradiction avec celles des systèmes plus amples de Möbius, Hamilton, Grassmann.

II. Les opérations doivent être conformes, autant que possible, à des lois formelles similaires à celles qui sont universellement connues des analystes.

Les *propositions* sont au nombre de *cinq :*

1° Selon Grassmann, Hamilton, Bellavitis, Möbius on propose d'indiquer le *vecteur* de A à B par B-A (différence de deux points). Dans certains cas comme cela arrive souvent en Physique mathématique, on peut indiquer un vecteur par une seule lettre, et selon Heaviside, se servir de caractères gras $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, etc.

2° La *grandeur* ou module du vecteur B-A ou $\mathbf{a}$ est indiquée par *mod.* $\mathbf{a}$ suivant Argand et Cauchy.

3° La somme d'un point et d'un vecteur, la somme ou la différence de deux vecteurs, le produit d'un nombre réel par un vecteur sont indiqués, selon Grassmann et Hamilton, respectivement par

$$A + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad m\mathbf{a}.$$

4° Selon Grassmann, Somoff, Resal, le *produit intérieur* ou *scalaire* des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est indiqué par $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (et se lit $\mathbf{a}$ scalaire $\mathbf{b}$) ; le *produit extérieur ou vectoriel* serait exprimé par la notation nouvelle $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ (qui se lit $\mathbf{a}$ vecteur $\mathbf{b}$).

5° D'après Maxwell, Riemann-Weber, Clifford, Lorentz, Ferraris, on indiquera le gradient d'un nombre, la rotation et la divergence d'un vecteur u par la notation

$$\text{grad. } \mathbf{u}, \quad \text{rot. } \mathbf{u}, \quad \text{div. } \mathbf{u}.$$

Les auteurs avaient eu soin d'envoyer leurs propositions à tous ceux qui s'occupent habituellement de calculs vectoriels, aussi s'attendait-on à une discussion immédiate. Faute de temps celle-ci n'a pu avoir lieu. Il eut pourtant été intéressant et utile d'avoir tout au moins un premier échange de vues sur ce projet de notation. Sur la proposition de M. Hadamard, qui présidait la séance, la section a décidé de demander au Congrès de nommer une *Commission internationale pour l'unification de la notation vectorielle*. On a vu plus haut que cette proposition a été adoptée et que le Comité du Congrès a été chargé de former cette Commission. Celle-ci sera nécessairement formée des représentants, non pas des différentes nations, mais des différentes écoles. Au moment où le calcul vectoriel pénètre de plus en plus dans les sciences appliquées, le besoin d'une unification de la notation s'impose chaque jour davantage.

22. Pizzetti (Pise). Sulla riduzione delle latitudini e delle longitudini al livello del mare.

23. Casazza (Milan). Nuove deduzioni nella teoria della composizione dei noti. — L'auteur expose des critiques personnelles sur la théorie physique de la composition des mouvements.

24. Beljankin (Kieff). Exemple d'une force centrale telle qu'un point matériel peut décrire une courbe de deuxième ordre.

25. Störmer (Christiania). Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans le champ d'un aimant élémentaire, avec application aux aurores boréales. — Dans cette conférence qui a eu lieu le soir, vendredi 10 avril, à la salle de la Société des ingénieurs et architectes, l'auteur donne un court résumé de son important mémoire : *Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre avec application aux aurores boréales*, paru dans les « Archives de Genève » (juillet-octobre 1908).

Il fait voir comment on est conduit tout naturellement à l'étude des trajectoires en question quand on veut déduire par l'analyse mathématique les conséquences de l'hypothèse physique de M. Berkeland que les aurores boréales et les perturbations magnétiques sont dues à des corpuscules électrisés venant de l'espace cosmique vers la terre. La solution du problème de trouver les trajectoires présente de très grandes difficultés, mais l'auteur avait réussi soit théoriquement, soit par des intégrations numériques d'une grande étendue (plus de 5000 heures de travail) à déduire les propriétés essentielles des trajectoires. Comme conséquences de cette analyse on retrouve théoriquement toute une série de propriétés caractéristiques des aurores boréales, comme les zones de fréquence maximum, l'apparition dans la nuit, les rayons auroraux et les draperies d'aurores.

Cette conférence était illustrée de projections lumineuses.

Section III B : Sciences de l'actuaire et sciences de l'ingénieur.

Sciences de l'Actuaire.

Président : M. G. Toja. M. Quiquet a été appelé à présider la deuxième séance.

Secrétaires : MM. P. Michel et Insolera.

12 communications, réparties sur 2 séances.

1. Toja (Florence), Alcune considerazioni sui rapporti tra le Matematiche e la Scienza Attuariale. — Dans ce discours d'ouverture, le président examine les rapports entre les mathématiques et la science de l'ingénieur, il insiste notamment sur le concept et la détermination de la probabilité *à priori.*

2. Quiquet (Paris), Sur une nouvelle application des Jacobiens aux probabilités viagères. — L'auteur apporte un complément à sa thèse d'actuaire (1892) et à sa communication au Congrès d'actuaires à New-York (1903). Il essaie de représenter N fonctions de survie d'ordre n, distinctes ou non, par un groupe de n fonctions seulement, $n < N$, celles-ci étant identiques entre elles. Il étudie aussi le cas particulier où les N fonctions présentent le caractère appelé « Gompertzien ».

3. Poussin (Paris), Sur l'application du graphicisme aux calculs d'assurances.

4. Elderton, A comparison of some curves used for graduating.

5. Bohlmann (Berlin), Ueber die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung. — Dans la première partie, la partie générale, l'auteur examine les hypothèses et les théorèmes du calcul des probabilités sur lesquels se basent les opérations de la Théorie des assurances. L'analyse de la notion d'indépendance des événements montre qu'il ne suffit pas pour que n événements soient indépendants que l'indépendance soit vérifiée *pour deux quelconques* de ces événements ; cette étude est accompagnée d'un exemple. La seconde partie est consacrée aux applications à la Théorie des assurances. Ici l'auteur montre qu'en raison des hypothèses faites, *l'indépendance des probabilités de décès* de n individus a lieu dès qu'elle est vérifiée pour *deux quelconques individus.*

6. Borel (Paris), Sur les applications du Calcul des Probabilités aux sciences biologiques.

7. March (Paris), Une nouvelle statistique internationale de la population. Observation sur la comparaison et sur la terminologie des statistiques.

8. De Helguero (Asti), Sulla rappresentazione analitica di alcune statistiche.

9. LEMBOURG (Bruxelles), L'actuaire, sa fonction et les deux aspects de celle-ci.

10. GINI, La regolarità dei fenomeni rari.

11. DAWSON (New-York), Necessary cautions in Dealing with Actuarial Problems.

12. CASTELLI (Rome), Sull'insegnamento della matematica attuariale e finanziaria nelle scuole professionali inferiori, medie, e superiori.

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR.

Président: M. Luiggi. — M. d'Ocagne a été appelé à présider la seconde partie de la séance.

Secrétaire : M. Parvopassu.

6 communications, 1 séance.

1. LUIGGI L. (Rome), Considérations sur les rapports entre les sciences mathématiques et l'art de bâtir.

2. CANEVAZZI S. (Bologne), La matematica e l'arte del costruttore in Italia.

3. D'OCAGNE (Paris), La technique du calcul dans la science de l'ingénieur. — Importance, au point de vue des applications techniques, des tables de calculs tout faits. Avantages qu'il y a à leur donner la forme graphique et plus particulièrement celle de monogrammes à points alignés.

4. D'Ocagne (Paris), Sur la rectification graphique approchée des arcs de cercle. — Comparaison d'un certain nombre de constructions dues à Snellius, Huygens, Macquorn Rankine, Van den Berg, d'Ocagne, qui, toutes, fournissent une approximation du 5me ordre, ce qui, *pratiquement*, équivaut à une construction rigoureuse. Seules, la première et la dernière sont réversibles, c'est-à-dire permettent de porter une longueur donnée sur un cercle donné, problème non moins utile à résoudre que le problème direct pour les applications à la Géométrie descriptive. Comparaison des approximations fournies par ces deux constructions, toute à l'avantage de la seconde qui ne le cède d'ailleurs pas à la première sous le rapport de la simplicité du tracé.

5. CLAXTON-FIDLER, On the Applications of Mathematics to the Theory of Construction.

6. SWAIN, The teaching and use of Mathematics in the civil Engineering profession.

Le président exprime le vœu qu'aux prochains congrès on donne plus de développement à cette section.

Section IV : Philosophie, Histoire, Enseignement.

Présidents : MM. Enriques, Loria, Vailati. — Ont en outre été appelés à la présidence : MM. Fehr, E. Picard et Simon.

Secrétaires : MM. Lazzeri et Conti.

39 communications, réparties sur 5 séances.

Publications déposées à la présidence : En ouvrant la séance du 8 avril, M. LORIA, président, annonce que la rédaction de l'*Enseignement mathématique* met à la disposition des membres de la section des exemplaires des numéros 1 et 2 de l'année courante, dont le premier contient, entre autres documents importants, le rapport de MM. Klein et Gutzmer sur la préparation des candidats à l'enseignement scientifique. — A cette même séance, M. GUTZMER dépose le volume : *Die Tätigkeit der Unterrichskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher u. Aertzte* (Leipzig, 1908). — A la séance du 10 avril M. Loria présente au Congrès le premier exemplaire du 4me volume des *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, par M. Cantor, et propose qu'à cette occasion le Congrès adresse un télégramme de sympathie au savant historien des mathématiques (adopté par acclamation). — A la seconde séance de la sous-section d'Histoire, M. GUBLER (Zurich) dépose deux nouvelles reproductions de *portraits de Steiner*, adressées au Congrès par M. Bützberger (Zurich) ; il annonce qu'on a retrouvé des travaux inédits du grand géomètre suisse. Ils seront publiés, probablement sous forme d'un supplément aux œuvres de Steiner, par les soins de M. Bützberger qui les accompagnera d'une étude biographique [1] très complète.

PHILOSOPHIE.

1. ENRIQUES (Bologne), Matematiche e Filosofia, discours d'ouverture. — M. Enriques, en ouvrant la sous-section de Philosophie du Congrès, exprime le vœu que la discussion amène à éclaircir les raisons d'ordre sentimental, esthétique ou pratique, qui séparent les vues des mathématiciens. Il retrace à grands traits le développement des mathématiques depuis l'origine de la science moderne jusqu'à nos jours, en faisant ressortir le parallélisme entre la conception dominante des mathématiques et les traits généraux de la pensée chez les philosophes mathématiciens. C'est ainsi que le problème cosmologique, le problème de la connaissance, et de nos jours le problème logique correspondent à un développement de notre science, où l'on voit se séparer successivement les éléments d'expérience, d'intuition et de logique, qui se trouvaient englobés d'une façon confuse dans la conception des mathématiques chez Descartes.

La préoccupation logique actuelle correspond à une conception

---

[1] Suivant une communication de M. Bützberger, Steiner a passé l'hiver 1843-44 à Rome, en compagnie de Dirichelet, Jacobi, Borchardt et Schläfli. En mai 1844, il a visité Naples en compagnie de Jacobi. — H. F.

statique des mathématiques pures, dont on veut ordonner les propositions en satisfaisant certaines exigences esthétiques et économiques de la pensée. Cependant, M. Enriques fait remarquer que le développement des mathématiques dans le dernier siècle ne se borne pas à un travail de systématisation ; il est essentiel de reconnaître les nouveaux éléments empruntés à l'expérience et à l'intuition qui sont venus enrichir les domaines de notre science. Or chez les travailleurs qui voient dans ces éléments la source des découvertes nouvelles, une autre préoccupation philosophique s'ajoute à celle de la logique, et c'est ainsi que le problème psychologique prend naissance dans leur esprit.

Le dualisme que l'on rencontre entre ces deux points de vue logique et psychologique parmi les penseurs mathématiciens correspond aux différentes conceptions qu'ils se forment de la science, envisagée chez les uns au point de vue statique de la théorie accomplie, chez les autres au point de vue dynamique de la genèse des théories, ou de leur histoire.

2. Hessenberg (Bonn), Zahlen und Anschauung. — Les fondements de la théorie des nombres entiers appartiennent à la logique ; la construction de ses éléments est basée sur l'intuition, puisque ces éléments sont logiquement irréductibles. Le cas est tout à fait analogue à celui de la géométrie, dans laquelle le système des rapports résulte de la logique, mais non des éléments eux-mêmes.

3. Boutroux (Paris), Sur la relation de l'Algèbre à l'Analyse mathématique. — Au point de vue historique, l'Analyse mathématique est une extension de l'Algèbre. L'Analyse et l'Algèbre sont pour Newton, Euler, Lagrange, des expressions synonymes, la première se distinguant de la seconde en ce qu'elle renferme des opérations infinies. Et c'est ainsi qu'une longue tradition nous fait considérer l'Analyse comme l'étude des expressions algébriques convergentes. Cette opinion ne semble plus être soutenable aujourd'hui. L'Analyse n'est pas une construction ; c'est l'effort que nous faisons pour analyser et pour traduire dans la langue de l'Algèbre les lois mathématiques. L'Algèbre n'est plus que l'instrument de l'Analyse.

4. Itelson (Berlin), Logik und Mathematik. — La relation entre la logique et les mathématiques ne peut être déterminée que lorsqu'une définition de l'une et des autres a été donnée. La logique n'est pas, comme on la définit ordinairement, *la science de la pensée*, elle est, considérée attentivement, *la science des objets en général ;* les mathématiques sont *la science des objets ordonnés*.

5. Itelson (Berlin), Deduction, Induction und Perduction. — L'orateur parle du rôle de la déduction et de l'induction dans les mathématiques. Il estime que la démonstration de n à $n+1$ est appelée à tort une induction complète ; elle est composée de deux

raisonnements, une induction complète et une déduction ; elle mérite par conséquent un nom spécial. L'orateur propose de lui donner l'expression « perduction. »

M. Dickstein interpelle l'orateur à la fin de la communication pour lui demander où la logique prend ses postulats en supposant que chaque science doive en avoir.

6. Simon (Strasbourg), Du continu, point et ligne droite, remarques historiques. — L'orateur, se plaçant au point de vue historique, parle de Galilée et de Leonardo, qui étaient les premiers à reconnaître exactement le problème du continu ; il combat ensuite l'arithmétisation du continu faite par Cantor. Par contre, il se déclare d'accord avec les théories de M. Veronese. Il applique ensuite deux axiomes de continuité de Hilbert et fait ressortir que ceux-ci ne disent réellement rien pour la géométrie *géométrique.*

7. Bernstein F. (Gœttingen), Nachweis dass unter allen Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes der Beweis des An-Nairizi (900 n. Chr.) der axiomatisch einfachste ist. — L'auteur rappelle que l'un des traits caractéristiques de la mathématique moderne est de mettre en évidence la nature exacte de certaines idées, qu'on s'est faites sur la méthode de notre science. Par exemple, on a pu, grâce aux recherches sur les fondements de la géométrie, donner un sens exact au concept de la « pureté » des démonstrations. Dans le même ordre d'idées, nous définissons la « simplicité axiomatique » d'une démonstration, sur la base des axiomes appliqués dans cette démonstration. En prenant comme exemple le théorème du Pythagore, nous nous bornons aux démonstrations par addition et prenons comme mesure de « simplicité axiomatique » le nombre le plus petit des applications de l'axiome de congruence en plan. L'auteur démontre rigoureusement le théorème suivant : *Il est impossible de faire la démonstration sans appliquer l'axiome de congruence en plan moins de* six *fois.*

En l'appliquant sept fois nous obtenons la démonstration bien connue de An-Nairizi ; c'est donc une des plus simples à notre sens.

La méthode appliquée ici pour fixer le sens de la simplicité la plus naturelle n'est pas unique. Nous l'avons variée en divers sens. C'est bien clair si l'on observe qu'on peut varier la base axiomatique de la démonstration. L'auteur estime que des recherches analogues seraient nécessaires dans la Géometrographie créée par M. Lemoine.

8. Pastore (Aoste), Sopra la natura extra-logica delle leggi di tautologia e di assorbimento nella logica matematica. — Les choses principales exposées dans cette communication se réduisent en substance à la démonstration de la nature extra-logique, c'est-à-dire purement descriptive, des lois indiquées. Il en résulterait

l'introduction dans la logique mathématique d'un nouveau groupe de notions et d'opérations.

9. Gallucci (Naples), La questione logica e gnoseologica nei fondamenti della matematica. — La critique des principes des mathématiques appartient aux mathématiques et à la philosophie, d'où un double point de vue dans leur traitement : le point de vue logique et le point de vue gnoséologique. Après avoir exposé sommairement les conséquences de ce double point de vue, l'auteur parle d'une conclusion possible qui pourrait conduire à une réélaboration de la théorie de la connaissance dans laquelle on tiendrait compte des récents développements des principes de la science.

10. Broggi (Rome), Sui fondamenti del Calcolo delle Probabilita. — L'auteur se propose de donner une définition axiomatique de la probabilité, et de démontrer l'existence d'une classe de nombres, qui peuvent être considérés comme probabilités dans le sens de cette définition. Sa construction diffère de celle dont M. Bohlmann a fait l'objet d'une autre communication au Congrès (Classe III B), en tant qu'elle s'appuie sur une définition d'événements qui suppose la possibilité de la réduction au « schema » de deux ensembles d'un nombre fini ou transfini d'éléments.

Dans le cas d'ensembles qui ne sont pas numérables, et des problèmes qui les concernent (et qu'on peut toujours ramener à la forme de problèmes géométriques) la détermination de la probabilité reconduit au problème de la détermination de la mesure des ensembles (dans le sens de M. Lebesgue) et n'est possible que si celle-ci l'est de son côté.

11. Casazza (Milan), Del continuo e dei limiti nelle matematiche applicate. — M. Casazza examine l'idée du continu et de la continuité en se basant sur des considérations de la géométrie atomique. Il étend ces considérations aux concepts d'espace et de temps. Selon lui les indivisibles de Galilée et de Cavalieri, qui sont hypothétiques, doivent être remplacés par des indivisibles réels.

12. Brouver (Amsterdam), Le potenze possibili. — En examinant comment il est possible de construire un système mathématique, l'auteur a trouvé qu'il ne peut exister que trois puissances infinies ; la puissance nombrable, la puissance nombrable incomplète, et la puissance continue.

Histoire.

13. G. Loria (Gênes), Le tradizioni matematiche dell'Italia. — Dans son intéressant discours d'ouverture de la sous-section d'Histoire, M. Loria se propose de donner un premier aperçu des études qu'il a entreprises depuis quelque temps en vue de compléter l'« Histoire des sciences mathématiques en Italie » de G. Libri.

Il expose les raisons pour lesquelles l'histoire italienne des mathématiques ne doit pas commencer avec Pythagore ou Archimède, mais avec Leonardo Pisano ; il décrit l'œuvre accomplie par celui-ci et les causes pour lesquelles il n'avait pas de dignes successeurs durant trois siècles. Mais avec Luca Paciuolo l'Algèbre italienne reprend son véritable chemin ascendant pour arriver à son apogée avec Cardano, Tartaglia et leurs disciples. L'auteur énumère aussi les contributions que l'Italie a fournies à la perspective et spécialement la découverte du point de concours faite en 1600 par Guidobaldo del Monte. Le siècle suivant, le XVII, fut dominé par Galilée et rempli de ses œuvres et de celles de ses disciples Cavalieri, Viviani, Torricelli, Borelli, etc., tandis qu'au XVIIIme siècle, l'Italie a effectivement développé les nouvelles doctrines fondées par Leibniz et Newton. L'auteur rappelle les Manfredi, les Riccati, les Fagnano, G. J. Malfatti, Lagrange (dont il démontre l'indiscutable nationalité italienne) et finalement Ruffini qui par ses études approfondies sur l'insolubilité des équations du 5me degré a fondé les bases de la théorie actuelle des substitutions. Il rappelle ensuite les historiens à la tête desquels se trouve Cassali avec sa grande histoire de l'algèbre italienne. Puis il décrit encore la part active que l'Italie a prise au développement et à la diffusion de la Géométrie descriptive, en citant la vaste œuvre géométrique qu'elle a accomplie au XIXme siècle sous la direction de Luigi Cremona et il n'oublie pas les écoles analytiques qui fleurissent à la même époque à Torino, Pavie et Pise. Après un rapide aperçu concernant divers autres éminents mathématiciens italiens, l'auteur signale quelques caractéristiques générales de l'arithmétique italienne, en particulier sa continuation durant sept siècles et il exprime la confiance générale qu'il a en un avenir non moins glorieux que le passé.

14. H. G. Zeuthen (Copenhague), Sur les rapports entre les principes anciens et modernes de la Géométrie. — L'auteur a fait remarquer que, pour bien saisir la connexion logique des différents groupes de principes, il faut avoir égard à leurs différents points de départ. Pour les anciens le continu était déjà quelque chose d'existant, qu'on représentait géométriquement, tandis que les modernes n'y parviennent que par le *postulat d'Eudoxe,* faussement appelé à présent le postulat d'Archimède. Il permettait aux anciens d'établir des relations entre des quantités incommensurables, et de calculer des aires et des volumes qu'on ne peut décomposer en parties égales. Pour calculer aussi les lignes et les surfaces courbes, Archimède a fait usage de postulats semblables à ceux qu'on prend aujourd'hui pour point de départ de ce calcul, et c'est par une méprise fort étrange qu'on a pris le premier de ces postulats (la droite est le plus court chemin entre deux points) pour une définition de la droite !

15. Dav. Eug. Smith (New York), The Ganita-Sara-Sangraha of Māhāvīrācārya. — Nous avons été si longtemps habitués à considérer Aryabhata Brahmagupta, et Bĥaskara comme les seuls mathématiciens de renom que l'Inde ait produits, que c'est devenu une sorte de postulatum chez nous qu'il n'en a existé aucun autre. Il est par conséquent intéressant de savoir que d'ici à un ou deux ans nous aurons une traduction, par le professeur Rangacharya de Madras, du grand Ganita de Māhāvīrācārya, qui a écrit à Mysore en l'an 850 environ. Parmi les caractères intéressants de cet ouvrage se trouvent la sommation des séries au-delà d'un certain terme fixe, une erreur relative à la signification de $a : o$, plusieurs problèmes comprenant le cas $x - (bx + c\sqrt{x} + a) = o$, et de nombreuses formes d'équations indéterminées comprenant le cas

$$ax + by + cz + dw = p,\ \Sigma\, a = g.$$

Cet ouvrage jetera peut-être du jour sur l'origine des connaissances de Bhaskara, sur les relations des mathématiques grecques et hindoues, sur les rapports des écoles de Pataliputra et Ujjain avec celle de Mysore, et certainement sur la nature de l'algèbre hindoue et sur l'époque où Al-Khowarazmi écrivait à Bagdad.

16. P. Duhem (Bordeaux), Sur la découverte de la loi de la chute des graves. — La loi de la chute des graves a été énoncée d'une façon exacte par Leonardo da Vinci. Mais l'idée, d'une façon un peu confuse, se trouve dans Albert de Saxe, en 1341. Il dit que les vitesses sont proportionnelles aux espaces parcourus ; mais on peut comprendre d'après le texte, que les vitesses sont proportionnelles aux temps. (Voir les *C. R.* de l'Académie des Sciences de Paris, 4 mai, 1908. — H. F.)

17. Giacomelli (Rome), I risultati di alcune ricerchi sull'opera meccanica di Galileo. — Après avoir montré l'état des questions historiques sur les deux premières lois newtoniennes du moment, qui, comme on sait, sont dues à Galilée, le conférencier démontre quel a été le procédé mental et expérimental de Galilée. Il résulterait d'abord de la démonstration que Galilée parvint à la proposition de la persistance du mouvement en se servant d'une idée adoptée par lui déjà *a priori*, puis, en second lieu que les expériences sur le plan incliné par lesquelles on croit qu'il a été mené à la découverte de la loi d'inertie correspondent à celles qui le conduisirent aux découvertes de l'indépendance des mouvements, en troisième et dernier lieu, que les rapports entre les deux procédés furent de nature purement extérieurs sans qu'il y ait entre les deux un lien intime et essentiel.

18. G. Pittarelli (Rome), Luca Pacioli usurpò per se stesso qualche libro di Piero de' Franceschi ? — Après une étude comparée très minutieuse entre le *Libellus Petri Pictoris Purgentis de quinque corporibus regularibus* codex dans la bibliothèque vati-

cane, fond urbinat) et les *Tractatus primus, secundus, tertius* qui précèdent la *Divina proportione* de Luca Pacioli, M. Pittarelli montre que vraiment celui-ci fut un plagiaire.

Il donne ensuite une brève notice du Libellus, dont on conclu que le peintre Piero de' Franceschi connaissait très bien la géométrie d'Euclide, et savait se servir de l'algèbre de son époque pour résoudre des problèmes de géométrie.

19. G. Pittarelli (Rome), Due lettere inedite di Lagrange all'Abate di Caluso esistenti nell'Archivio storico municipale di Asti. — Le professur Pittarelli a trouvé ces lettres de Lagrange dans les Archives d'Asti : il en présente les photographies offertes au Congrès par la Municipalité d'Asti.

20. Emch (Soleure), Der Rechenkünstler Winkler und seine Methoden. — Le grand calculateur suisse J. J. Winkler (1831-1893) eut une vie assez mouvementée et il n'est guère possible de faire une biographie complète. M. Emch est cependant parvenu à réunir un certain nombre de renseignements biographiques qu'il fait suivre d'une étude approfondie de ses méthodes de calcul. Ses calculs oraux extraordinaires sont cités par Laurent dans son rapport sur Winkler et par Binet dans son ouvrage sur les grands calculateurs; ils sont dus à une mémoire remarquable au service de règles systématiques mnémotechniques. A signaler sa résolution rapide d'équations indéterminées du 2e degré à 4 inconnues, sa décomposition d'un nombre de cinq chiffres en une somme de quatre carrés, son calcul du logarithme à 7 décimales d'un nombre de 6 à 7 chiffres. Il faisait tous ces calculs sans écrire, aussi doit-on le compter au nombre des plus grands calculateurs connus.

21. Marcolongo (Naples), Un trattato di meccanica inedito di V. de Filippis anteriore alla « Mécanique analytique » di Lagrange. — De Filippis fut un des martyrs de la république de Partenopea de 1799. Vers 1780 il écrivit un traité mécanique dans lequel il s'efforça de démontrer rigoureusement les principes de la science. Cette œuvre est non remarquable parce qu'on y trouve une première tentative de démonstration générale du principe du travail virtuel pour le cas des systèmes rigides, mais aussi par l'esprit critique de l'auteur.

22. G. Loria (Gênes), Sur les moyens de faciliter et de diriger les études de l'histoire des mathématiques. — L'auteur rappelle un article dans lequel M. Eneström a fait valoir la nécessité d'imprimer une direction constante aux études sur l'histoire des mathématiques et il fait remarquer qu'il est urgent de faire le nécessaire afin que des jeunes gens puissent se vouer à ce genre de recherches. Pour atteindre ce but il estime qu'il y aura lieu de composer un *Manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques*, dont le plan correspondrait aux divisions suivantes :

Chap. I. Généralités sur la nature, le but et les méthodes de la recherche historique en général.

Chap. II. Des méthodes employées pour l'étude scientifique de la littérature; limites de leurs applicabilités aux recherches sur l'évolution d'autres manifestations de la pensée. Les ouvrages de consultation.

Chap. III. Des différentes directions que l'on peut suivre dans les études sur l'histoire des sciences en général et des mathématiques en particulier. Analyse des principales histoires générales des mathématiques. Matériaux pour une histoire des histoires mathématiques.

Chap. IV. Recherches sur l'histoire des mathématiques dans l'Antiquité et au Moyen Age; généralités sur l'étude des manuscrits. *a)* Les mathématiques des Grecs. *b)* Les mathématiques des Romains. *c)* Les mathématiques des Orientaux. *d)* Les mathématiques au Moyen Age.

Chap. V. Le livre imprimé et son histoire. Œuvres complètes des grands mathématiciens modernes. Les recueils académiques et les journaux scientifiques. La bibliographie moderne et les secours qu'elle offre à l'histoire des mathématiques.

En terminant l'auteur exprime le désir que les personnes présentes manifestent leurs opinions sur ce projet; mais, malheureusement, le temps trop court, n'a pas permis un échange d'idées.

23. Amodeo (Naples), Appunti su Biagio Pelacani da Parma. — M. Amodeo rappelle d'abord un fragment de M. Moritz Cantor sur l'intérêt que présente l'unique traité connu jusqu'à présent de Biagio da Parma et qui fait partie d'une collection très rare de traités mathématiques publiés à Venise en 1505, et il ajoute que, ayant eu cette collection en mains, il y a trouvé non seulement un, mais deux traités de Biagio de Parme, et un autre traité inconnu également, de Giovanni de Casali.

D'après la lecture des deux traités de Biagio de Parme il résulte que son nom de famille doit s'écrire Pelicani au lieu de Pelacani. Celui-ci souleva à Bologne une discussion sur le choc des corps durs qui forme l'objet du traité qui a été retrouvé.

M. Amodeo résume le contenu du traité intitulé : « Tractatus de latitudinibus forarum Blasii de Parma, » et il conclut que dans celui-ci la conception de Nicole Oresme sur les formes géométriques planes fut beaucoup élargie et compliquée par Biagio Pelicani en la faisant dévier du chemin qu'il aurait dû prendre pour arriver plus vite à la conception de la géométrie analytique de Descartes.

24. Amodeo (Naples), Sulla necessità di formare un archivio pe delle scienze matematiche. — M. Amodeo montre la difficulté qu'on éprouve dans les recherches historiques de connaître qui a été le premier auteur d'une théorie ou d'une proposition, et comment dans le

doute l'Histoire est changée en donnant au développement des idées une marche différente à celle qu'il a suivie réellement. Il insiste sur la nécessité de supprimer cette difficulté. Il examine le développement de l'Histoire des Mathématiques depuis Montucla à Chasles, Libri, et Cantor, et montre l'importance que l'œuvre de Libri a eue quant aux notices, l'importance de la Collezione matematica de Pappus pour les notes qu'elle a fournies sur les œuvres perdues. Il conclut par la nécessité d'ordonner le matériel historique; on y parviendrait en créant les *archives des mathématiques*.

Il examine ensuite quelle devrait être l'organisation des Archives, qui seraient publiées par les soins d'un comité central avec le concours de comités nationaux.

Sur la proposition de M. Conti *la section d'Histoire appuie le principe de la création d'Archives des Sciences mathématiques* sans entrer dans le détail de leur organisation.

Ce serait là précisément une question du ressort de l'Association internationale des mathématiciens dont le projet de création a été soulevé à Rome.

Œuvres complètes d'Euler. — On sait qu'au Congrès de Heidelberg on avait émis un vœu en faveur de la publication des œuvres d'Euler. Ce vœu a été appuyé ces dernières années à l'occasion du 2me centenaire d'Euler, dans plusieurs assemblées de mathématiciens. M. A. Krazer, secrétaire général du précédent Congrès, parle des démarches qui ont été faites depuis quatre ans, notamment des pourparlers entre la Commission nommée par les mathématiciens allemands et la Société suisse des Sciences naturelles. Il soumet à la section le vœu suivant, qui sera ensuite présenté à l'approbation du Congrès :

« *Reconnaissant l'importance pour les mathématiques pures et appliquées de la publication des œuvres d'Euler, le Congrès salue avec reconnaissance l'initiative de la Société helvétique des sciences naturelles et émet le vœu qu'elle obtienne la collaboration des mathématiciens des diverses nations; il prie l'Association internationale des Académies et spécialement les Académies de Berlin et de Saint-Pétersbourg qui ont compté Euler au nombre de leurs membres de prêter leur appui à cette publication.* »

Sur la proposition de Pittarelli la motion Krazer est approuvée par acclamation. On a vu plus haut dans notre compte rendu de la 5me séance générale que ce vœu a été approuvé par le Congrès et que M. Darboux a pu annoncer que l'appui de l'Association internationale des Académies pouvait être considéré comme assuré.

Le professeur Amodeo exprime le vœu que l'on publie dans un avenir prochain les *œuvres de Bonaventura Cavalieri*. L'assemblée approuve ce vœu.

ENSEIGNEMENT.

25. GUTZMER (Jena), Ueber die Reformbestrebungen auf dem Gebiet des mathematischen Unterrichts in Deutschland. — Le conférencier envisage les questions de réforme de l'enseignement mathématique en Allemagne dans leur ensemble et rappelle les travaux de la Commission d'enseignement de l'Association allemande des Naturalistes et Médecins. Les travaux de cette Commission qui ont duré trois ans, tendent à obtenir une évolution rationnelle de l'enseignement en débarrassant celui-ci de développements inutiles tels que des constructions nombreuses concernant le triangle. Cette réforme tend, comme on sait :

1° à développer l'intuition de l'espace ; 2° à développer l'idée de fonction.

M. Gutzmer signale également le Rapport concernant la préparation scientifique des maîtres et contenant un ensemble de vœux s'adressant à l'Université. Une discussion générale sur cette question aura lieu à Cologne au mois de septembre 1908 à la réunion annuelle de l'Association allemande des Naturalistes et Médecins.

26. BOREL (Paris), Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en France. — Après avoir donné un aperçu des divisions de l'enseignement secondaire en quatre sections A, B, C, D, M. Borel rappelle la réforme de 1902, qui a introduit, entre autres, la notion de dérivée. Cette introduction a donné des résultats satisfaisants. En Géométrie des tentatives de réforme sont encore à l'ordre du jour ; on cherche à introduire la notion de mouvement, qui est utile aussi bien à ceux qui feront des sciences qu'à ceux qui entreront dans la pratique. L'auteur rend hommage à la tentative de Méray.

Suit une discussion à laquelle prennent part MM. Niewenglowski, Peano, Pittarelli, Marotte et Zeuthen. Celui-ci s'étonne avec raison du peu de temps accordé aux mathématiques dans les sections A et B.

27. C. GODFREY (Osborne), L'enseignement des Mathématiques dans les écoles publiques anglaises pour garçons. — En l'absence de l'auteur, M. Vailati présente une traduction italienne du rapport de M. Godfrey. Il définit d'abord le terme d'école publique et indique l'organisation de l'enseignement mathématique dans une école publique. Les différentes branches de mathématiques sont généralement enseignées dans une même classe par un même maître. Le nombre d'heures affectées à l'enseignement mathématique en classe est de quatre à sept heures par semaine dans la section classique. Pendant les deux dernières années d'école (17-19 ans) les élèves donnant les meilleurs résultats pour les mathématiques se spécialisent. Les dernières réformes peuvent être résumées comme suit : 1. Le côté utilitaire des Mathématiques

est accentué par l'usage des applications modernes. 2. Le programme est allégé par la suppression de beaucoup de choses sans valeur et d'intérêt minime, comme la discussion de certaines questions financières, de poids et mesures impossibles, de bien des règles particulières en Arithmétique, de théorèmes de Géométrie sans utilité, etc. 3. On cherche à donner de la précision et du relief entre autres par l'usage d'exemples numériques dans toutes les branches et par l'introduction de travaux expérimentaux dans les laboratoires. 4. Le programme de Géométrie a été revu afin de combiner le maximum de liberté avec la connaissance d'un certain nombre de principes fondamentaux ; aucun ordre de succession type des théorèmes n'est imposé ; l'usage du dessin est obligatoire. 5. Le programme mathématique a été arrangé à nouveau de façon à introduire de bonne heure l'étude de la trigonométrie plane et du Calcul et à renvoyer à plus tard l'étude approfondie des sections coniques et de certaines parties de l'algèbre. — M. Gibson (Glasgow), ajoute quelques observations concernant l'enseignement dans les écoles écossaises.

28. Dav. Eug. Smith (New-York), L'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires des Etats-Unis. — Dans cet intéressant rapport, que nous reproduirons *in extenso* dans un prochain numéro, le prof. Smith développe principalement les cinq points suivants : 1. Les influences historiques qui ont contribué à faire des mathématiques dans l'Ouest ce qu'elles sont aujourd'hui. 2. L'état actuel du sujet. 3. Les influences actuellement en action pour former les mathématiques de l'avenir. 4. Quelques-unes des réflexions qui en résultent pour changer l'état de choses actuel. 5. Des questions que, dans un congrès international, une section comme celle-ci peuvent étudier avec profit avec l'appui d'une commission internationale contenant des représentants des pays exerçant une action dirigeante au point de vue éducatif.

M. Archenhold (Treptow-Berlin) insiste sur le rôle utile que peut jouer une *Commission permanente* pour l'étude des questions concernant l'enseignement des mathématiques dans les établissements secondaires. Sur sa proposition, l'assemblée appuie en principe le projet de formation d'une telle commission et renvoie la discussion à une prochaine séance.

29. Suppanschitsch (Vienne), L'application des idées modernes des mathématiques à l'enseignement secondaire en Autriche. — Dès que la France a donné l'exemple de la réorganisation de l'enseignement secondaire, on a songé aussi en Autriche à un nouveau programme des mathématiques pour les divers établissements secondaires : les « Gymnasien » et les « Realschulen ». A la suite des expériences faites dans ce but, on n'insiste plus sur les méthodes soi-disant rigoureuses employées jusqu'à présent ; on veut, au contraire, recourir à l'intuition naturelle aussi dans les parties

plus difficiles. De cette manière, on gagne assez de temps pour donner aux élèves quelques notions élémentaires des fonctions et de la dérivée. A côté du développement de l'intuition on n'oublie pas qu'il faut aussi inspirer aux jeunes âmes le respect de la vérité, la première leçon que l'on peut tirer de l'étude de la science, comme l'a dit M. Tannery. Les expériences dureront probablement encore quelque temps pour aboutir, finalement, à une réorganisation définitive.

30. BEKE (Budapest), Ueber den mathematischen Unterricht in Ungarn. — Il ressort du rapport de M. Beke que la Hongrie a remanié entièrement son plan des études mathématiques de l'enseignement secondaire en s'inspirant des idées préconisées en Allemagne par M. Klein et en Angleterre par M. Perry. Les réformes furent introduites à la suite d'un rapport[1] très complet d'une commission qui fit une enquête sur les réformes à l'ordre du jour dans les autres pays. Les programmes ont été simplifiés, on a introduit des exercices graphiques, la notion de fonction et les notions du Calcul différentiel et intégral, la fusion de la Stéréométrie et de la Géométrie descriptive et l'on a cherché partout à obtenir un lien plus intime entre la théorie et les applications pratiques.

31. VAILATI (Rome), Su alcuni caratteri degli attuali programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie. — C'est surtout par la forme et le contenu des manuels scolaires et l'organisation des examens que les programmes actuellement en vigueur dans les établissements secondaires italiens exercent une fâcheuse influence sur l'enseignement des différentes parties des mathématiques. Ils donnent à l'enseignement de l'Algèbre une forme trop abstraite ; les exercices les plus simples de résolution d'équations des deux premiers degrés sont précédés de développements théoriques trop longs auxquels les élèves ne peuvent s'intéresser, car ils n'en comprennent ni le but, ni l'utilité.

Pour ce qui est de la Géométrie, on néglige trop de mettre la première phase de l'enseignement en contact intime avec les exercices de dessin à l'aide des instruments, avec les procédés de mesure et les vérifications directes des *faits géométriques* que les élèves apprendront plus tard à expliquer et à démontrer par la voie déductive.

On doit aussi éviter de trop insister, au début, sur les démonstrations de propositions évidentes par elles-mêmes et même sur les définitions de concepts trop abstraits pour qu'on puisse les éclaircir à l'aide d'autres notions générales. C'est un préjugé de croire que les récents progrès de l'analyse logique des principes et des procédés de raisonnement mathématique justifient ou ten-

[1] Voir Goldziher, Reformtörekvések a mathematikai oktatas Terén, K. a Magyar Pædagogia, Budapest, 1908.

dent à provoquer des modifications des méthodes didactiques dans le sens d'une plus grande abstraction ou d'une tendance à s'éloigner des applications pratiques. C'est précisément l'opposé qui est vrai.

M. Vailati insiste sur l'utilité d'introduire la notion de dérivés dans l'enseignement secondaire supérieur.

Cet intéressant exposé est suivi d'une courte discussion à laquelle prennent part MM. Amodeo, Frattini et Vailati.

32. Fehr (Genève), Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en Suisse. — Après un exposé sommaire de l'organisation générale de l'enseignement secondaire en Suisse, l'auteur montre quelle est la place accordée aux mathématiques, principalement dans les sections classiques et techniques. Dans les premières on accorde généralement quatre heures par semaine aux mathématiques et le plan d'étude comprend l'Algèbre, la Géométrie, la Trigonométrie, la Géométrie analytique, la Cosmographie. On trouve la notion de fonction dans la plupart des programmes par le fait que depuis longtemps on enseigne la Géométrie analytique. Dans les sections techniques, ces mêmes branches sont étudiées d'une manière plus approfondie (six à huit heures par semaine, quelquefois même dix heures dans la première classe). On y enseigne en outre les éléments de l'Algèbre supérieure et du Calcul différentiel et intégral, la Géométrie descriptive et, en général, de la Géométrie pratique.

33. Stéphanos (Athènes), Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en Grèce. — Le conférencier débute par un aperçu historique du développement de l'enseignement pendant le XIX[e] siècle, puis il expose l'organisation actuelle de l'enseignement mathématique dans les établissements secondaires.

34. Archenhold (Treptow-Berlin), Ueber die Bedeutung des mathematischen Unterrichtes im Freien in Verbindung mit Reformvorschlägen für den Lehrgang. — L'auteur demande que la première initiation géométrique parte de l'observation en plein air et que l'on fasse usage, le plus possible, d'objets empruntés à à la réalité et non de modèles.

C'est bien ainsi que l'on procède généralement dans le *premier* enseignement, comme le fait observer M. Gubler, mais l'auteur a cependant raison d'insister pour que cela se pratique de plus en plus.

35. Andrade (Besançon), Quelques observations psychologiques recueillies dans les enseignements scientifiques d'initiation. — M. Andrade rapporte quelques observations dans lesquelles il décrit des scènes vécues dans l'enseignement ou autour de l'enseignement des sciences des établissements secondaires français. Observations critiques concernant l'enseignement de la Géométrie et la préparation au baccalauréat.

36. Conti (Bologne), Sulla iniziazione alle matematiche e sulla preparazione matematica dei maestri elementari in Italia. — Le conférencier estime que les réformes de l'enseignement mathématique ne doivent pas seulement porter sur l'enseignement secondaire, où l'on cherche entre autres à introduire des notions appartenant jusqu'ici à l'Université, mais que l'on doit étendre les réformes aux degrés inférieurs, en commençant par l'école enfantine et l'école primaire. Il faut que ce premier enseignement soit un acheminement rationnel vers l'enseignement secondaire. Il est urgent de réformer, voire même d'instituer une initiation mathématique rationnelle en se basant sur les idées Vittorino da Feltre, Fröbel, Pestalozzi, Herbart, La Chalotais, et tout particulièrement sur l'excellente base que donne M. Laisant dans son *Initiation mathématique*.

Ces réformes, et tout particulièrement la réforme adoptée pour les écoles élémentaires (loi du 8 juillet 1904), entraînent nécessairement une revision du règlement actuel de l'Ecole normale. L'organisation et le plan d'études des écoles normales ne sont pas en rapport avec l'importance de la mission du maître. Les critiques concernent surtout l'insuffisance du temps consacré aux Mathématiques, des programmes défectueux, la courte durée du cours normal, l'organisation imparfaite du stage dans les écoles, et la préparation mathématique des instituteurs des écoles élémentaires.

37. Z.-G. de Galdeano (Saragosse), Sur l'enseignement des mathématiques en Espagne. — En Espagne la prépondérance littéraire et les luttes politiques ont presque étouffé le développement scientifique au point qu'aucune école mathématique n'a pu prendre racine; depuis un demi-siècle, aucun législateur n'a entrepris un plan d'enseignement; celui-ci est resté cristallisé. Quelques savants, au nombre desquels il faut compter l'auteur, font des efforts sérieux pour le développement des études scientifiques. Il vient de se constituer une « Asociacion española para el progreso de la ciencias », dont la première réunion aura lieu à Saragosse au mois de septembre ou d'octobre 1908; elle ne manquera pas de donner une impulsion au mouvement scientifique espagnol.

L'Espagne compte trois Facultés des sciences conduisant jusqu'à la licence et celle de Madrid conduisant au doctorat. Il y a en outre soixante instituts techniques.

Dans l'enseignement de l'Analyse, aux ouvrages de Duhamel et de Sturm, succédèrent ceux de MM. Appell, Goursat, Picard, etc. On sait que le conférencier lui-même a écrit un traité dans lequel il a introduit les théories modernes de Riemann, Weierstrass, Darboux et de l'Ecole française. En Géométrie, ce sont surtout les ouvrages de Reye, Fiedler, d'Ovidio, Lazzeri, qui sont les plus répandus dans cette dernière période.

L'enseignement élémentaire est encore trop restreint ; cela entrave les études secondaires et supérieures d'une manière très fâcheuse.

M. de Galdeano termine par quelques considérations philosophiques propres à contribuer aux progrès de la science.

38. E. de Amicis (Forli), L'équivalenza in planimetria indipendamente dalle proporzioni e dal circolo. — L'auteur démontre le théorème suivant, en se basant uniquement sur l'équivalence des parallélogrammes de même base et de même hauteur, et sans avoir recours à des propositions et des propriétés du cercle ou des triangles homologiques : Lorsque deux triangles ont les angles égaux chacun à chacun, le rectangle ayant pour dimensions un côté de l'un et un côté de l'autre triangle, est équivalent au rectangle ayant pour dimensions les côtés correspondants.

39. Delitala, La Tetragonometria piana nelle scuole secondarie. — Dans cette communication l'auteur réunit et complète les résultats qu'il a obtenus antérieurement. Il fait ressortir les applications de la Tétragonométrie à la Géodésie élémentaire et il estime qu'il y aurait lieu d'introduire ces méthodes dans l'enseignement secondaire.

Commission internationale de l'enseignement mathématique. — La fin de la dernière séance de la Section IV a été consacrée à la discussion de la proposition de M. D.-E. Smith tendant à créer une Commission internationale pour l'étude des réformes de l'enseignement mathématique dans les établissements secondaires. Le principe ayant été admis il restait à examiner le rôle et la constitution de la commission.

M. Smith propose de nommer un comité restreint de trois membres avec la mission de constituer la commission ; ce comité devrait être composé de MM. F. Klein, Greenhill et Fehr ; en qualité de directeur de l'*Enseignement mathématique*, M. Fehr apporterait le concours de son journal qui deviendrait l'organe de la Commission.

Après une discussion, à laquelle prennent part MM. Bonola, Smith, Conti, Fehr, Stephanos, Archenhold, Castelnuovo, Enriques, l'assemblée, sur la proposition de M. Castelnuovo, adopte la résolution suivante :

La section IV, ayant reconnu l'importance d'un examen comparé des méthodes et des plans d'études de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires des différentes nations, confie à MM. Klein, Greenhill *et* Fehr, *le mandat de constituer une commission internationale qui étudiera ces questions et présentera un rapport d'ensemble au prochain Congrès.*

On a vu que le Congrès a adopté cette résolution dans sa séance de clôture.

Clôture des travaux de la section IV. — Les travaux de la sec-

tion ont été déclarés clos après un court discours d'adieu du président M. Enriques, et des paroles de remerciements à l'adresse du Bureau de la section prononcées par MM. Archenhold et Fehr.

Notes finales.

Ce compte rendu sommaire donne un premier aperçu des questions nombreuses et variées qui ont été abordées au Congrès de Rome. Le volume des *Atti del Congresso,* qui paraîtra sans doute d'ici à quelques mois, permettra à chacun de lire les belles conférences générales et d'examiner à loisir ceux des mémoires qui l'intéressent plus particulièrement. Mais il peut constater dès maintenant que dans aucun de ses domaines la science mathématique n'est restée stationnaire. Il remarquera aussi que non seulement elle continue à rester en contact avec les sciences appliquées, mais qu'on s'efforce de toute part à rendre ce contact de plus en plus intime. Cette tendance existe d'ailleurs effectivement dans l'enseignement supérieur où l'on tient à associer toujours davantage les mathématiques appliquées aux mathématiques pures. Qu'il nous suffise de rappeler ici, à titre d'exemples, les cours et instituts de la Sorbonne et de l'Université de Gœttingue.

Il nous a paru intéressant de grouper les mémoires d'après les quatre langues admises aux Congrès des mathématiciens.

Langues :	italienne,	française[1],	allemande,	anglaise.	Total.
Conférences générales	2	6 (3)	1	1	10
Section I	12	16 (6)	6	3	37
Section II	7	5 (1)	5	—	17
Section III A	9	6 (2)	3	7	25
Section III B	5	8 (6)	1	4	18
Section IV	18	10 (4)	8	3	39
	53	51 (22)	24	18	146

Au premier rang vient nécessairement l'Italie, qui compte actuellement tant de brillants mathématiciens, présents au Congrès dans la presque totalité. Si l'on compare ensuite les chiffres concernant les trois autres langues, on voit que la langue française prend le premier rang. Cela tient non seulement à ce que l'école française était brillamment représentée, mais à ce que beaucoup de savants possèdent à fond cette langue qui continue à maintenir son rang de langue internationale des Congrès. Nous avons ajouté entre parenthèses les nombres concernant la nationalité française.

Il convient de remarquer d'autre part que si le nombre des communications dans les séances des sections a considérablement augmenté depuis le premier Congrès, cela a toujours été au détriment des discussions d'une importance générale qui ont leur place dans une réunion internationale. Malgré tout l'intérêt que

[1] Les chiffres entre parenthèses donnent le nombre des auteurs de nationalité française.

présentent les communications individuelles sur tel sujet particulier et le plaisir de les voir exposées au tableau noir par leur auteur, il est indispensable, pour le succès même des futurs Congrès, d'accorder plus de temps aux rapports et discussions au sujet desquels une entente internationale paraît désirable. Au quatrième Congrès, plusieurs questions de cet ordre ont été soulevées, mais inscrites au même titre que les communications, elles n'ont pas pu être soumises à une discussion approfondie. Celle-ci ne saurait du reste être efficace et aboutir à un résultat que si, comme cela se fait pour la plupart des Congrès, le rapport ou tout au moins le texte des propositions est adressé aux congressistes en temps utile, c'est-à-dire au moins trois mois à l'avance. Sur ce point il y aurait lieu de compléter le règlement de nos Congrès internationaux.

Parmi les buts multiples que poursuivent nos Congrès, l'un des principaux est sans doute de provoquer des relations personnelles, afin de permettre aux savants qui s'occupent de mêmes recherches de s'entretenir à loisir. Sous ce rapport, celui de Rome a pleinement réussi. De solides amitiés ont été nouées ou resserrées. Elles constituent à la fois de bons souvenirs et de précieux encouragements dans le travail scientifique.

Nous ne saurions terminer sans réitérer ici nos plus vifs remerciements à tous ceux qui nous ont facilité la rédaction de ce rapport et tout particulièrement au Secrétariat du Congrès et au dévoué Secrétaire général, M. Castelnuovo. H. Fehr.

Congrès scientifiques.

Parmi les congrès scientifiques annoncés pour les vacances 1908, nous signalons les réunions ci-après :

L'*Association française pour l'avancement des sciences* se réunira à *Clermont-Ferrand* du 3 au 10 août.

L'*Association des naturalistes et médecins allemands* tiendra sa 80[me] réunion annuelle à *Cologne*, du 20 au 26 septembre ; la section des sciences mathématiques sera présidée par MM. Schwering et Heine. On sait que l'Association des mathématiciens allemands *(Deutsche Mathematiker-Vereinigung)* se joint chaque année à ce congrès. Son comité, qui est présidé par M. F. Klein, a décidé que cette année les communications porteront principalement sur la Mécanique.

La *British association for the advancement of science*, aura sa réunion annuelle à *Dublin*, du 2 au 9 septembre, sous la présidence de M. Francis Darwin.

La *Société helvétique des sciences naturelles* tiendra sa 91[me] réunion annuelle à Glaris, du 30 août au 2 septembre.

La *Società italiana per il progresso delle Scienze* aura sa 2[me]

assemblée annuelle en automne, dans la seconde moitié d'octobre, à *Florence*. La *Società italiana di Matematica* se joindra à la première pour tenir sa séance de constitution.

Nous pouvons ajouter qu'il se constitue actuellement une *Société espagnole pour le progrès de la science;* elle tiendra sa première réunion à *Saragosse* au mois de septembre prochain.

Société italienne de Mathématiques.

Au mois de février 1908 un appel a été adressé aux professeurs de mathématiques des établissements secondaires et supérieurs de l'Italie en vue de former une Société italienne de mathématiques. Les adhésions n'ont pas tardé à affluer auprès du comité d'initiative; elles atteignent déjà le beau chiffre de 125 (au 25 avril 1908).

Le comité d'initiative a formé les trois commissions suivantes :

1. MM. Amodeo, Conti et Enriques ont été chargés du projet de statuts de la Société;

2. MM. Berzolari, Bonola et Veneroni ont été invités à présenter un rapport sur les propositions de la Commission royale de l'enseignement des mathématiques dans les écoles moyennes;

3. MM. Certo et Pittarelli présenteront une étude sur la préparation des candidats à l'enseignement dans les écoles secondaires moyennes.

La *Società italianà di Matematica* tiendra sa première réunion à Florence, dans la seconde moitié d'octobre.

Nominations et distinctions.

M. Bricard, répétiteur de Géométrie et de Stéréotomie à l'Ecole polytechnique est nommé professeur de Géométrie appliquée aux arts, au Conservatoire des Arts et Métiers de Paris, en remplacement de M. Laussedat.

M. M. Cantor est nommé professeur honoraire de l'Université de Heidelberg.

M. Coolidge est promu professeur adjoint à l'Université Harvard.

M. Hamy, astronome à l'Observatoire de Paris, est nommé membre de l'Académie des Sciences en remplacement de M. Janssen.

M. R. Rothe, privat-docent à l'Ecole technique supérieure de Charlottenbourg est nommé professeur de mathématiques à l'Ecole des Mines de Clausthal.

M. Fr. Severi, professeur à l'Université de Padoue, a obtenu le prix et la médaille Guccia, pour ses travaux sur la Géométrie des surfaces algébriques.

M. J. Weingarten est nommé professeur honoraire de l'Université de Fribourg (Brisg.

M. P. Stäckel, professeur à l'Ecole technique supérieure de

Hanovre, a accepté un appel qui lui a été adressé par l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe.

Nécrologie.

M. A. von Braunmühl, professeur à l'Ecole technique supérieure de Munich, est décédé le 9 mars 1908, à l'âge de 54 ans.

M. le Général Frolow est décédé à Genève, le 2 avril 1908.

M. Lorenz-Léonard Lindelöf, ancien professeur à l'Université de Helsingfors, est décédé le 3 mars 1908, à l'âge de 80 ans.

M. Maschke, professeur à l'Université de Chicago, est décédé le 2 mars dernier.

M. Picciati, qui venait d'être nommé professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Bologne, est décédé à Venise le 11 mars 1908, à l'âge de 39 ans.

M. Wedekind, professeur à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe, est mort le 8 février à l'âge de 69 ans.

Nous apprenons d'autre part la mort de deux savants professeurs de l'Université de Leipzig :

M. Scheibner, décédé le 8 avril 1908, à l'âge de 82 ans.

M. A. Mayer, décédé le 11 avril à l'âge de 69 ans.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

2. Livres nouveaux :

R. Bonolai. — **De nichteuklidische Geometrie** historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Autorisierte deutsche Ausgabe besorgt von Liebmann mit 76 Figuren im Text. — 1 vol. in-16, 244 p. ; 5 M. ; G. B. Teubner, Leipzig.

Carlo Bourlet. — **Eléments de Géométrie.** Géométrie plane Géométrie dans l'espace, contenant 762 exercices. — 1 vol. cart. toile in-16, 376 p. ; 2 fr. 50 ; Hachette et Cie, Paris.

M. Cantor. — **Vorlesungen über Geschichte der Mathemathik** unter Mitwirkung von V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti. C. R. Wallner. *Vierter Band*, von 1759 bis 1799. — I vol. broché in-8°, 1113 p. ; 32 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

P. Crantz. — **Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht II.** (Aus Natur und Geisteswelt.) — I vol. cart., in-16, 127 p. ; 1 M. 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

L. Crelier. — **Géométrie cinématique plane** : Notice, avec quelques applications à l'usage des techniciens et des ingénieurs. — 1 fascicule in-4°, 44 p. ; Imprimerie W. Gassmann, Bienne.

Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik, München. Führer durch die Sammlungen. — 1 vol. in-4°, 157 p. ; 1 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK. Tome I (troisième volume) *Théorie des nombres :* 2me fascicule : Théorie arithmétique des formes ; exposé, d'après l'article allemand de K. TH. VAHLEN, Griefswald, par E. CAHEN, Paris ; p. 97 à 192 ; B. G. Teubner, Leipzig ; Gauthier-Villars, Paris.

K. GOLDZIHER. — **Reformtörekvések a Mathematikai oktatás terén.** — 1 fascicule in-4°, 68 p. Budapest.

Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Nouvelle édition. — 1 vol. in-4°, 110 p. ; H. C. Delsman, Amsterdam ; Gauthier-Villars, Paris.

F. PIETZKER. — **Lehrgang der Elementar-Mathematik** in zwei Stufen. Teil II Lehrgang der Oberstufe. — 1 vol. cartonné in-4°, 442 p. ; 4 M. 40 ; B. G. Teubner, Leipzig.

E. GALOIS. — **Manuscrits de Evariste Galois,** publiés par J. TANNERY. — 1 vol. broché in-8° 67 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

Oeuvres de Charles Hermite, publiées par EMILE PICARD. Tome II. — 1 vol. broché in-8°, 520 p. ; 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

R. DE MONTESSUS. — **Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités.** — 1 vol. broché in-8°, de VI, 191 p., 17 figures ; 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

S. PINCHERLE. — **Lezioni di Algebra complementare.** — Parte seconda : *Teoria delle equazioni.* — 1 vol. broché in-8° 356 p. ; 10 Lires ; Nicola Zanichelli, Bologne.

J. SCHICK. — **Barytomik.** — 1 vol. broché, in-8°, 78 p. ; 2 M. ; G. Franzscher Verlag, Munich.

JAMES BYRNIE SHAW. — **Synopsis of linear associative Algebra** a report on its natural development and results reached up to the present time. — 1 vol. in-4°, 145 p. ; The Carnegie Institution, Washington.

Thèses de l'Université d'Upsal :

TURE CARLBAUM. — **Contributions à la théorie des mouvements infiniment petits d'un gaz hétérogène.** — 1 fascicule in-4°, 57 p. ; Upsal 1907.

ALBERT CARLSSON. — **Om itererade funktioner** akademisk afhandling. — 1 fascicule in-4°, 70 p. : Upsal 1907.

M. G. TÖRNGUIST. — **Linjära homogena funktionalekvationer med itererade substitutioner i flera Variabler.** — 1 fascicule in 8°, 43 p. ; Upsal 1906.

ERRATA

p 245 5 lignes à partir d'en bas, lire, pour le symbole du produit vectoriel $a \wedge b$.

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES ÉCOLES SECONDAIRES AUX ÉTATS-UNIS[1]

Objet de ce Rapport. — En acceptant l'aimable invitation de votre Comité à présenter à la section d'Enseignement de ce Congrès international un rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires des Etats-Unis, je m'en acquitte en ayant en vue *cinq points de vue principaux* : 1°, Etablir brièvement les influences historiques qui ont contribué à faire de nos mathématiques en Occident ce qu'elles sont actuellement; 2°, Parler de l'état actuel de l'enseignement; 3°, Mentionner les influences actuelles qui tendent à changer les mathématiques secondaires de l'avenir; 4°, Examiner quelques propositions qui en résultent en vue de la transformation du programme actuel; 5°, Proposer quelques questions que des congrès internationaux de ce genre pourraient examiner d'une façon profitable par l'intermédiaire de comités représentant les premiers pays au point de vue éducatif.

I. — Influences historiques

Ce territoire de l'Occident connu à l'heure actuelle sous le nom d'Etats-Unis d'Amérique, et que ses citoyens appellent par prétention injustifiée peut-être et cependant avec une brièveté pardonnable, Amérique, fut principalement colonisée par des Français, des Hollandais, des Espagnols et des Anglais. Cependant, avant que l'instruction se soit établie d'une façon bien définitive, l'esprit dominant anglo-saxon s'y était fixé à un tel degré que la plus grande partie de notre pays était soumise à des règles britanniques et sujette à des influences britanniques. C'est pourquoi les universités d'Harvard, fondée en 1636, de William and Mary en 1693, de Yale en 1701, de Princeton en 1746 et de Columbia en 1754, furent toutes plus ou moins basées sur les modèles anglais du XVII[e] et XVIII[e] siècle. Naturellement les écoles élémentaires et

[1] Rapport présenté au 4[e] Congres international des mathématiciens, Rome, avril 1908, à la section IV (Philosophie, Histoire, Enseignement) par David-Eugène Smith, LL. D., professeur de mathématiques au Teachers College de l'Université de Columbia à New-York.
Traduit par J.-P. Dumur (Genève).

secondaires prirent les mêmes caractères que celles d'Angleterre avec quelques variations dictées par les conditions locales. La première école secondaire projetée en Amérique fut une école de grammaire latine à Virginia, et la première qui s'y développa fut une école analogue à Boston en 1635 ; d'autres suivirent bientôt dans les différentes villes de la Nouvelle Angleterre. Même les colons hollandais de New Amsterdam (le New York actuel) ouvrirent une école du même genre en 1659. On comprendra donc que les premières écoles secondaires étaient de nature classique, profondément influencées par l'humanisme de la Réformation, et peu adonnées au développement des mathématiques. Telle était, d'une façon générale, la situation, lorsque l'Angleterre, par la plus grande faute qu'elle ait jamais commise dans sa politique coloniale, perdit son ascendant sur son territoire le plus important de l'Occident, et les Etats-Unis furent constitués. Elle avait cependant exercé son influence sur les mathématiques et nous ne nous en sommes en aucune façon complètement libérés. En particulier l'Arithmétique américaine se forma sur des modèles anglais, car une réédition du livre de Hodder (1719) fut le premier ouvrage de ce genre qui fit son apparition dans la Nouvelle Angleterre, et le traité de Greenwood (1729), le premier produit vraiment américain, fut basé sur Cocker et Hodder. Il en résulte, d'autant plus qu'il faut tenir compte également de l'influence du langage commun, que les arithmétiques américaines ont eu, jusqu'à très récemment, une ressemblance étroite avec le type anglais.

En Géométrie, la même tendance se manifeste. Adonnées de bonne heure à Euclide, les écoles anglaises ne prêtèrent aucune attention à la Géométrie de l'espace, de telle sorte que même aujourd'hui, et quoique Euclide, en tant que traité, ait été depuis longtemps abandonné en Amérique, aucun des collèges supérieurs de la côte de l'Atlantique n'exige la Géométrie de l'espace pour l'examen d'entrée.

En Algèbre nos traités ont aussi été basés sur des modèles anglais, et ils le sont actuellement malgré toutes les influences continentales ; — on peut en dire autant de la Trigonométrie.

En Géométrie analytique, nos traités contiennent, d'une façon générale, les coniques d'Apollonius, modifiées, il est vrai, par la méthode cartésienne, mais renfermant encore essentiellement les anciens procédés. En ce qui concerne l'Analyse, il y a deux générations, les étudiants de nos collèges parlèrent encore de « fluxions » (dérivées), l'influence newtonienne s'étant fait sentir jusqu'à cette époque.

C'est ainsi que nos mathématiques élémentaires et secondaires subirent l'influence presqu'exclusive de l'Angleterre, et qu'elles prirent ces traits caractéristiques qui, comme toute tendance populaire, ne se transforment pas aisément.

La séparation d'avec l'Angleterre, cependant, et particulièrement la seconde guerre (1812), engagèrent nos jeunes gens à aller poursuivre leurs études supérieures en France, et plus tard en Allemagne, plutôt qu'en Angleterre. Le résultat de tout ceci fut que les mathématiques avancées prirent un aspect continental. Les « fluxions » se transformèrent en Analyse supérieure, Euclide même fut remplacé par Legendre, les coniques devinrent la Géométrie analytique et furent traitées en ce sens, quoique maintenues dans leurs limites d'Apollonius. Au lieu de Mathématiques avancées montrant l'application de l'Analyse à la Mécanique, comme cela semblait être la tendance à Cambridge, ce furent les mathématiques supérieures pures qui commencèrent à appeler les étudiants américains en France et encore davantage en Allemagne. Ce dernier pays ouvrit ses universités à nos jeunes gens plus librement que la France, et beaucoup plus que l'Angleterre, de telle sorte que, pendant ce dernier quart de siècle, les Mathématiques allemandes ont presque dominé les hautes études. Göttingue fut notre Mecque mathématique et Berlin notre Médine, tandis que Paris et Cambridge n'ont exercé qu'une faible influence en Amérique.

Il est inutile de rester plus longtemps sur ces influences historiques de pays et d'écoles. Je désire cependant, avant de quitter le sujet, dire un mot des influences historiques des différents peuples sur les Mathématiques américaines. L'Amérique, il est à peine nécessaire de le dire, est devenue le rendez-vous du monde. Il fut un temps où toutes les routes conduisaient à Rome ; beaucoup mènent en Amérique actuellement. Près d'un million d'immigrants débarquent sur nos côtes, chaque année, et s'assimilent à notre corps politique. En fait d'étrangers, ou de parenté étrangère, nous avons dans les Etats-Unis quatre ou cinq fois autant d'Anglais qu'à Liverpool, cinq ou six fois autant d'Allemands qu'à Berlin, presque deux fois autant d'Irlandais que toute l'Irlande, à peu près autant d'Ecossais qu'Edimbourg et Glasgow réunis, trois fois autant d'Italiens que Rome, et ainsi de suite pour les autres nationalités. Ces immigrants ne sont en général pas de la classe savante, mais ils ont l'énergie, la vitalité, et désirent que leurs enfants reçoivent une instruction. Il est possible qu'ils n'apportent pas avec eux les mathématiques de leurs différents pays, mais ils accomplissent deux choses très importantes pour nous : 1° en contractant des alliances, ils constituent une race cosmopolite d'une énorme énergie ; et 2° ils inspirent à l'Américain d'aujourd'hui une sympathie pour le travail des différents pays, et une tendance mentale à chercher dans d'autres contrées que l'Angleterre des modèles d'instruction. Et ceci m'amène à mon second sujet, l'état actuel des mathématiques secondaires en Amérique.

II. — L'ÉTAT ACTUEL DES MATHÉMATIQUES SECONDAIRES AUX ETATS-UNIS.

On pense souvent que les Etats-Unis, composés d'environ cinquante Etats et Gouvernements, sans puissance centralisée en matière d'instruction, ne doivent présenter aucune uniformité dans les écoles. Cela n'est cependant pas le cas. Sans doute dans les plus anciennes parties du pays les écoles sont plus conservatrices à certains égards, et les Etats les plus riches ont des professeurs mieux préparés et un matériel mieux conditionné en général. Cependant, grâce à l'échange continuel de maîtres et d'idées, et à l'influence exercée par des organisations telles que la *National Educational Association* et par les grandes maisons d'édition publiant les traités scolaires, les traits essentiels de l'enseignement des mathématiques ne varient pas particulièrement d'une partie du pays à l'autre.

En général, les enfants fréquentent les écoles publiques; les écoles publiques élémentaires comptent plus de dix fois autant d'élèves que les écoles privées, et les écoles publiques secondaires quatre fois plus. En outre, les écoles publiques croissent en nombre beaucoup plus rapidement que les écoles privées, et, sauf dans quelques grandes villes, ces dernières peuvent à peine être considérées comme représentant l'éducation américaine.

La *durée habituelle des études* comporte huit ans dans l'école élémentaire précédés souvent, dans les grandes villes, d'un certain temps passé dans les jardins d'enfants), quatre ans dans l'école supérieure ou secondaire, quatre ans dans le collège (permettant d'obtenir le grade de bachelier), et trois ans supplémentaires à l'université pour l'obtention du grade de docteur en philosophie. Sur notre population scolaire totale, seulement le $4\,^1/_4\,^0/_0$ est réparti dans les écoles secondaires, $1{,}4\,^0/_0$ dans les institutions supérieures de tous genres, moins de $0{,}6\,^0/_0$ dans les collèges et universités. Quoique le nombre des personnes fréquentant les écoles dépasse 17,000,000, le nombre de celles qui suivent les collèges est relativement restreint.

D'une manière générale, en prenant le pays dans son ensemble, on peut dire que le travail en mathématiques se répartit comme suit :

Ecole élémentaire. Années I-VIII inclusivement. 5 leçons par semaine; dans les écoles primaires, elles sont d'environ 20 à 30 minutes chacune, dans les années V-VII, 45 minutes. Arithmétique et mesures. Dans les deux dernières années les équations du premier degré à une inconnue sont utilisées pour venir en aide à l'Arithmétique.

Ecole secondaire (High secondary school).

Classe IX	4 ou 5 leçons par semaine		Algèbre.
» X	»	» »	Géométrie.
» XI	»	» »	Algèbre et Géométrie.
» XII	facultatif		Algèbre, Géométrie ou Trigonométrie.

Collège.

Classe XIII	3 leçons par semaine	Algèbre, Géométrie et Trigonométrie.
» XIV	facultatif	Géométrie analytique et Analyse.
» XV	»	Analyse.
» XVI	»	Mathématiques supérieures et appliquées.

Université:

Classe XVII	facultatif	(diplôme de maître).
» XVIII	»	
» XIX	»	(diplôme de docteur).

Plusieurs écoles essayent d'introduire dans les classes élémentaires la Géométrie sous sa forme concrète, mais les efforts n'ont pas eu d'autre résultat jusqu'à présent qu'un enseignement plus rationnel des méthodes de mesure élémentaires qui se trouvaient toujours dans nos programmes.

J'en viens maintenant à la *nature du travail* mathématique dans les écoles secondaires.

a. *Les élèves.* Il ne faut pas oublier que dans une grande majorité des écoles secondaires des Etats-Unis on trouve la coéducation des deux sexes, pratiquement toutes sont dans ce cas, sauf dans quelques écoles des villes. Les garçons et les filles étudient les mêmes mathématiques et dans les mêmes classes. Dans les villes plus grandes de l'Est, et dans les écoles privées, cela n'est pas le cas et il y a une légère tendance en faveur de la séparation des sexes.

b. *Les maitres.* L'absolue liberté donnée à la femme en Amérique, son désir d'être son propre soutien, son consentement à travailler pour un salaire relativement bas et le meilleur gain que rapportent aux hommes les autres professions et vocations, telles sont les causes d'une condition défectueuse en ce qui concerne les maîtres. Dans l'enseignement élémentaire, la femme est en général meilleure que l'homme. De plus, étant donnés les salaires actuellement payés en Amérique, une école secondaire peut se procurer plus facilement une maitresse qu'un maître; par contre les meilleurs professeurs hommes d'Algèbre et de Géométrie valent mieux que les meilleures maitresses. On a reconnu qu'il n'était pas désirable pour les élèves d'avoir des femmes

comme maîtres pendant tout leur temps d'école, et dans les villes les autorités scolaires font tous leurs efforts pour faire entrer des professeurs hommes dans l'enseignement des mathématiques secondaires. Etant donné l'accroissement naturel de la population de notre pays, les hommes trouveront plus tard moins d'occasions d'entreprendre une autre profession, et une réaction, déjà manifeste, contre cette féminisation injustifiée des écoles, se prononcera encore davantage par la suite.

c. *Le programme détaillé.* Voici un bref aperçu du programme pour la ville de New-York qui pourra donner une juste idée du travail qui se fait dans les autres parties du pays.

Année IX. Algèbre. 5 leçons par semaine (45 minutes chacune). Opérations fondamentales ; équations linéaires à une ou plusieurs inconnues ; racines ; puissances ; radicaux ; nombres complexes ; équations du second degré à une et deux inconnues ; représentations graphiques d'équations.

Année X. Géométrie. 4 leçons par semaine. En substance, les 4 premiers livres de la Géométrie d'Euclide ou de Legendre, étudiés d'après les traités modernes. Au minimum 300 exercices de constructions et problèmes de Géométrie plane. Dessin géométrique.

Année XI. Géométrie et Algèbre, 3 leçons. Fin de la Géométrie plane, en substance le champ d'Euclide ou de Legendre, avec exercices. En Algèbre; les proportions, les équations indéterminées, les progressions, les combinaisons, le théorème du binome démontré dans le cas d'un exposant entier et positif et appliqué également pour d'autres exposants.

Année XII. Facultatif. 4 leçons. Trigonométrie plane et logarithmes ; ou un repassage général de Mathématiques, dans le premier semestre. Au second semestre : Géométrie dans l'espace, Algèbre supérieure et Trigonométrie sphérique, ou un repassage de Mathématiques.

d. *L'influence des collèges.* Ce programme représente essentiellement ce qu'on exige pour l'entrée dans les collèges, établissements d'ordre généralement privé, institués par les différents Etats et cherchant tous à exiger sensiblement les mêmes programmes. Tous ces collèges admettent les étudiants après un examen d'entrée, la plupart se contentent des certificats imposés par le *College Entrance Board* (un comité coopératif privé composé de représentants des différents collèges), et un grand nombre reçoivent leurs étudiants sur la présentation de certificats d'écoles secondaires bien connues. Le résultat est absolument le même, car les collèges exigent en pratique le programme ci-dessus mentionné et obligent les écoles à s'y conformer. Quoiqu'il en soit, le champ est celui que nous avons indiqué, bien qu'un très faible pourcentage d'élèves le suivent jusqu'au bout et qu'une plus faible proportion encore entre au Collège.

III. — Tendances actuelles en vue d'une transformation.

Mais cet état de choses ne durera pas chez nous. Si l'on compare nos anciens ouvrages à nos publications actuelles, on se rend compte qu'il n'y a jamais eu en Amérique une telle période de protestations, de discussions concernant les programmes, d'expériences et d'études sur l'histoire de l'enseignement, que l'époque actuelle. L'instruction secondaire du pays est à la veille d'une transformation profonde, et les influences qui sont à l'œuvre actuellement et leurs résultats probables, mériteraient d'attirer notre attention.

a. *Influence des branches élémentaires.* Les dix ou quinze années qui viennent de s'écouler ont vu s'opérer dans le domaine de l'Arithmétique une transformation aussi considérable que celle qui s'était produite lorsque l'influence de Pestalozzi se fit sentir en Amérique, il y a soixante-quinze ans. Ce changement fut occasionné par les deux considérations suivantes : 1° Un intérêt croissant dans le développement psychologique de l'enfant, résultant d'une étude de ses aptitudes mentales dans les années scolaires successives ; 2° un intérêt croissant dans les exigences réelles de la vie commerciale, résultant de la substitution des applications modernes à celles du passé. Cette transformation s'est fait sentir dans les récents programmes et dans les traités qui ont paru dernièrement. Le travail est disposé actuellement d'une façon progressive, de telle sorte que l'enfant rencontre les sujets importants deux ou trois fois, avec des problèmes d'une difficulté croissante. En plus, et sans que pour cela le travail sur les nombres abstraits soit négligé, on lui présente les problèmes concrets qui font plus directement appel à son intérêt ; ils représentent les réelles conditions américaines et se rapportent à la vie de tous les jours. Il en résulte une attitude plus franche vis-à-vis du sujet de la part des élèves, des maîtres et des parents, et la question s'est naturellement posée de savoir s'il est possible d'effectuer une réforme semblable dans les mathématiques secondaires.

b. *Influences étrangères.* L'étude des systèmes étrangers doit avoir également une grande influence dans la discussion actuelle. Le flot continuel de jeunes gens allant dans les universités allemandes, l'étude sérieuse des écoles européennes par nos éducateurs, les études critiques des programmes de toutes les parties du monde qui paraissent dans les rapports annuels du *Commissioner of Education* des Etats-Unis, la dissémination de toutes ces idées par nos institutions supérieures pour la préparation des maîtres, — tout cela nous maintient continuellement en rapport avec ce qui se fait de mieux dans le travail universel. Dans mes propres classes j'ai eu l'année dernière des étudiants qui nous ont

renseigné sur l'excellent programme du gymnase de Bulgarie[1], sur le mouvement Méray en France, sur les derniers programmes de Prusse, sur le travail des gymnases italiens et sur des sujets analogues concernant les autres pays. Aucune transformation importante ne se fait dans les études secondaires en Europe qui ne soit immédiatement discutée dans les associations des maîtres en Amérique, et aucune théorie n'est chaudement appuyée, comme par exemple celle du professeur Perry de Londres, sans éveiller l'attention sérieuse du Nouveau Monde. Le résultat de ces informations continuelles sur tout ce que les autres pays peuvent offrir de meilleur nous oblige à examiner notre propre travail et à chercher en quoi il est susceptible d'amélioration. Cela ne doit pas être attribué particulièrement à nous-mêmes, mais plutôt aux forces nouvelles qu'engendrent un sang nouveau.

c. *Influences commerciales.* L'Américain s'est contenté jusqu'à présent de tirer parti de son propre pays, de récolter les richesses de ses champs et forêts vierges et d'exploiter ses mines productives. Mais à l'heure actuelle le pays se remplit, nous sommes devenus, dans l'espace d'une génération, un peuple industriel et nous commençons à chercher nos marchés ailleurs. L'esprit commercial domine, et dans les écoles l'on se pose constamment la question, *Cui bono ?* C'est pourquoi les mathématiques secondaires devront continuellement se rendre utiles ; leurs droits devront être analysés et leurs résultats comparés (sans unité commune de mesure, il est vrai) avec le temps qui leur est consacré. Cela ne signifie pas que les mathématiques ne doivent être considérées qu'à un point de vue purement utilitaire, car chacun reconnaît qu'elles ont une grande valeur disciplinaire *en soi*, mais cela signifie qu'il faut remplacer ce qui a peu de valeur par ce qui en a davantage. En matière d'applications, cela signifie, pour faire usage d'une phrase que j'ai souvent prêchée à des maîtres, que « ce qui a la prétention d'être pratique doit l'être réellement ; » c'est une idée qui est à la base d'un important mouvement en Amérique.

d. *Influences psychologiques.* Il est une autre influence qui est appelée à jouer un rôle important dans la préparation de l'avenir, je veux parler de l'étude intense de la psychologie pratique. Les maîtres se demandent pourquoi l'on exigerait de l'esprit humain la compréhension de certains principes purement abstraits de Géométrie avant d'avoir acquis les chapitres beaucoup plus aisés de Trigonométrie, pourquoi l'on exige les difficultés de l'Algèbre avancée avant de présenter les parties plus simples de l'Analyse supérieure, et pourquoi, en général, une séparation conventionnelle et fortuite serait maintenue entre l'Algèbre et la Géométrie, la Géométrie et la Trigonométrie, et l'Algèbre et l'Analyse supé-

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, p. 257-270, 1905. *(Réd.)*.

rieure. Je ne veux pas dire que ces questions ne puissent pas être résolues, mais l'on se demande si c'est une réponse suffisante de dire « Laissez faire. »

e. *Influences scientifiques.* Il faut tenir compte aussi de l'influence que les sciences physiques exerceront sur les Mathématiques. Depuis que les Mathématiques sont nécessaires à la Physique, les deux branches sont liées d'une façon spéciale, et il ne manque pas d'esprits extrêmes qui voudraient les réunir d'une façon continuelle. De cette agitation, qui n'en est encore qu'à sa phase embryonnaire, sortira beaucoup de bon.

f. *Le dogme de la rigueur.* Que ce soit l'esprit conservateur britannique ou un désir erroné de traiter à fond chaque point avant d'entreprendre le suivant, il semble parfois que c'est en Angleterre plus qu'en tout autre pays que le dogme de la rigueur est le plus en évidence. Notre Géométrie est beaucoup plus pointilleuse que celle de l'Allemagne, quoique nous ne produisions pas d'aussi bons géomètres; nos livres d'Algèbre renferment beaucoup plus de détails que les traités ordinaires français, et nous ne produisons cependant pas d'aussi bons algébristes; et nos trigonométries sont tout aussi complètes que celles des autres pays sauf l'Angleterre et pourtant nos étudiants ne sont pas particulièrement brillants dans cette partie, sauf lorsqu'ils l'appliquent aux travaux d'ingénieurs. On peut se demander sérieusement si cet état de choses est justifiable. C'est pourquoi les éducateurs se demandent si de meilleurs résultats ne pourraient pas être obtenus par une plus grande surface et moins de profondeur, par l'introduction de Trigonométrie plane au lieu de traiter la Géométrie plane d'une façon si complète; on pourrait donner une petite introduction à l'Analyse à la place de certaines parties de l'Algèbre, dans le même ordre d'idées que les représentations graphiques, actuellement introduites qui fournissent des notions élémentaires de Géométrie analytique.

IV. — Propositions de changements dans les programmes.

De toutes les discussions concernant les mathématiques secondaires aux Etats-Unis résultent de nombreuses propositions relatives aux changements des programmes. Je me propose de les résumer, sans prétendre indiquer ce qui aura lieu dans un avenir immédiat, mais simplement pour montrer quelques tendances actuelles. Je présenterai un projet renfermant beaucoup d'idées courantes, quoique n'ayant été recommandé par aucun corps enseignant, ni adopté par aucune école. Son unique but est de provoquer la discussion et d'indiquer les visées d'un parti assez avancé d'éducateurs en Amérique. Il est conçu pour cinq années,

— la dernière année de l'école élémentaire et les quatre premières de l'école secondaire.

Année VIII. Mathématiques I. Exigé. Garçons et filles ensemble. 5 leçons par semaine.

Plan général. Transition des formes spéciales aux formes générales. Une combinaison de l'Algèbre, de la Géométrie concrète et de l'Arithmétique, l'Algèbre étant la base de cet arrangement.

Programme détaillé.

1. *Formules algébriques :*

a) Application aux mesures, conduisant toujours à une formule devant être traitée comme une équation. (Exercices simples sur les racines carrées vers la fin de l'année.)

b) Applications commerciales comme les questions d'intérêt, d'escompte et de commissions.

c) Application aux statistiques. Représentations graphiques sur papier quadrillé, soit lorsque la formule est donnée, soit lorsque les statistiques seules sont connues.

d) La notion de fonctions simples ; par exemple : l'intérêt d'un capital donné à un taux donné est une fonction du temps ; l'aire d'un cercle est une fonction du rayon, etc.

e) Travail expérimental assez simple, comme celui qui consiste à montrer la loi du levier, avec ses formules. Ceci peut conduire logiquement à l'introduction d'autres formules simples de Physique sans expériences, pour rendre compte de certains usages de l'Algèbre, par exemple la formule donnant la résistance d'une barre d'acier.

f) Dans l'évaluation numérique de fonctions, comme dans $c = 2\pi r$, introduire la règle à calcul et les preuves par 9 et par 11, les principes expliquant ces vérifications pouvant être renvoyés jusqu'au moment où les mathématiques V *(b)* seront étudiées. Usage du système métrique dès maintenant et dans tous les travaux subséquents touchant à des problèmes scientifiques.

2. — *Equations linéaires à une inconnue :*

a) Applications à des problèmes d'arithmétique, avec discussion des avantages ou inconvénients du symbolisme algébrique.

b) Applications aux mesures comme auparavant.

c) Récréations mathématiques, introduisant l'élément amusant.

3. — *Fonctions algébriques et opérations fondamentales :*

a) Application autant que possible aux formules étudiées auparavant.

b) Décomposition en facteurs, en faisant usage de la correspondance géométrique lorsqu'il y a utilité. Comparaison avec l'Arithmétique. Application à la résolution de simples équations du second degré, avec exemples.

c) Fractions, en revisant en même temps les principes et la pratique des fractions numériques.

4. — *Equations linéaires à deux inconnues :*

a) Applications à l'Arithmétique.

b) Applications aux mesures comme avant.

c) Partie récréative.

Année IX. Mathématiques II. Exigé. Garçons et filles dans des classes séparées avec faculté pour les filles de suivre les classes de garçons au cas où elles le désireraient. 5 leçons par semaine.

Plan général. En Algèbre élémentaire, équations du second degré à une inconnue, combinées aussi étroitement que possible avec les trois premiers livres de Géométrie plane ; on se basera sur les Mathématiques I supposées connues. Nous n'indiquons pas pour cette année la distribution des heures à consacrer à chacun de ces domaines, elle doit être réglée par le maître suivant le résultat de l'expérience. Ce serait le dernier programme exigé pour les filles. La Géométrie concrète devient maintenant démonstrative. On appuiera sur la correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie. Les applications pratiques de chaque domaine seront faites d'une façon aussi réelle que possible. Il est reconnu que le succès de ce programme dépend de l'aptitude du maître à se servir des livres d'Algèbre et de Géométrie qu'il a à sa disposition dans le sens prescrit. Des traités combinant l'Algèbre et la Géométrie ne paraîtront probablement pas dans un avenir immédiat, à supposer qu'ils soient désirables (ce qui est encore douteux). Il est probable que le temps sera divisé à peu près également entre l'Algèbre et la Géométrie. Cinq heures pourraient être consacrées à chaque sujet toutes les deux semaines, alternant jour par jour, ou préférablement, chaque leçon renfermerait les deux. Cette façon de procéder est nouvelle et c'est un des points à expérimenter sérieusement.

Programme détaillé.

1. — *Livre I de la Géométrie plane*, les propositions du livre étant limitées à celles exigées dans les récents programmes.

a) Usage du rapporteur ; dessin à l'échelle. Le dessin technique, commencé dans les leçons de travaux artistiques et manuels, pourra dorénavant s'appliquer à ce travail. La construction d'instruments simples pour la mesure des angles. Méthodes primitives pour la mesure des distances, basées sur le livre I.

b) Mesures (dans le champ du programme de Géométrie de l'année).

c) Exercices originaux, avec un commencement de généralisation lorsque c'est praticable. Par exemple, dériver les propriétés du triangle équilatéral de celles des triangles isocèles ; considérer le rectangle en ce qui touche le parallélogramme ; considérer les angles extérieurs des différentes formes de triangles.

d) Expériences sur la relation de la Géométrie de l'espace à la Géométrie plane, guidées par Méray et de Paolis, en ne poussant le travail qu'aussi loin que cela présente un réel avantage.

2. — Il y aurait à faire une revision rapide des opérations sur les fonctions algébriques dans leur rapport au domaine ci-dessus mentionné, avec applications s'il y a lieu, et une revision des équations linéaires à une et à deux inconnues, dans le même esprit. Le graphique d'équations linéaires à deux inconnues, dans le but d'expliquer la signification de « linéaire » et « simultané, » et en même temps de donner l'interprétation des racines. Solutions graphiques de problèmes de trains de chemins de fer comme application.

3. — *Livre II de Géométrie plane* (méthode d'Euclide) traité seulement brièvement pour illustrer des formes algébriques courantes. Par exemple $a(b+c)$, $(a+b)^2$ et d'autres formes semblables. Intentionnellement il ne sera pas fait d'étude géométrique rigoureuse de ce livre.

4. — *Livre III de la Géométrie plane*, en omettant des généralisations qui sont trop difficiles pour cette année. Montrer les rapports de cette étude aux équations du second degré, particulièrement dans les problèmes appliqués.

5. — *Problèmes algébriques* renfermant des équations du second degré, se rapportant à la Géométrie de cette année et (autant que possible) aux autres travaux de cette classe. Par exemple, si les travaux manuels pouvaient fournir quelques problèmes, ou si de simples lois mécaniques pouvaient être illustrées en classe, on en profiterait.

6. — Autant que possible, *les applications de la Géométrie et de l'Algèbre*, devraient être choisies pour les garçons, dans la Mécanique, les mesures et la vie commerciale ; pour les filles ces applications devraient avoir rapport au dessin et au domaine des sciences et arts domestiques, autant que cela peut se faire raisonnablement. Pour les filles en particulier, le travail fourni dans un livre tel que *Geometrisches Zeichnen* de Becker a beaucoup de valeur.

7. — Lorsque les propriétés des exposants auront été entreprises, on introduirait les *logarithmes* et l'on utiliserait dorénavant les tables pour la pratique, comme il avait été fait pour la règle à calcul. Comparaison de ces deux modes de calcul. On devrait se servir de ces deux procédés chaque fois qu'un calcul numérique se présente, comme dans l'évaluation d'expressions renfermant des radicaux.

Année X. Mathématiques III. Exigé pour les garçons ; facultatif pour les filles. Classes séparées. 5 leçons par semaine.

Plan général. Fin de l'Algèbre élémentaire, équations du second degré à deux inconnues ; variations. Fin de la Géométrie plane,

condensée comme dans les Mathématiques II. Continuation du dessin mécanique en rapport avec le travail d'application. La Trigonométrie du triangle plan en rapport avec les figures semblables. Mesures pratiques de figures planes et solides, à l'aide de la Trigonométrie. Usage du théodolite. Géométrie dans l'espace combinée avec la Géométrie plane aussi loin que cela peut se faire raisonnablement.

Programme détaillé.

1. — *Algèbre ;* équations du second degré à deux inconnues. Graphiques permettant d'illustrer ce qui suit :

a) La nature des racines (imaginaires qui sont toujours par paires, etc.).

b) Nombre des racines.

c) Les trois formes des coniques (avec leur nom).

2. — *L'étude de la variation* doit comprendre un nombre pas trop considérable d'expériences simples de physique, avec problèmes de mesures qui s'y rapportent. Le programme régulier de Physique cette année doit être lié aussi étroitement que possible à ce travail.

3. — *Fin de la Géométrie plane.* Rapports et proportions avec applications simultanées à l'Algèbre et la Géométrie. Les limites et les cas incommensurables seront considérés en passant, sans tentatives de preuves rigoureuses.

4. — *Figures semblables* conduisant à la Trigonométrie du triangle plan. Usage d'instruments simples construits par la classe ; par ex., parmi les anciens, les « *riga, baculus, quadrans, speculum, squadro,* » etc., puis, usage du théodolite et de la planchette.

Calculs de mesures et problèmes de Physique à effectuer par la règle à calcul et par les logarithmes.

5. — *Les mesures dans la Géométrie de l'espace.*

6. — Autant que possible les problèmes de garçons toucheront au commerce, à la mécanique, à la Physique, et les applications pratiques à des mesures topographiques et de bâtiments ; les problèmes destinés aux filles (dans leur cours facultatif) rouleront sur l'économie domestique, y compris le dessin, l'hygiène et les questions civiques touchant la maison.

Année XI. Mathématiques V. Facultatif pour garçons et filles. Classes séparées de préférence. 5 leçons par semaine.

Plan général. Un cours conduisant à la Mécanique et à la Cosmographie et introduisant le triangle sphérique, les éléments de Géométrie analytique et le tracé des courbes d'une façon générale.

Programme détaillé.

1. — *Rapport entre ce programme et celui de Physique.* Pendant cette année le travail de la physique est plutôt un travail de labo-

ratoire. Les maîtres de mathématiques devraient se tenir constamment au courant de ce qui se fait dans ce domaine, en vue de se procurer des problèmes et de fournir au bon moment les mathématiques nécessaires.

2. — La Mécanique devrait s'introduire dans les applications d'une façon aussi étendue que possible. Continuation du dessin technique, comme jusqu'à présent. Lectures de dessins.

3. — Le cours de *Cosmographie* qui est souvent donné dans la 12e année serait placé dans cette année-ci et en relation étroite avec les autres branches. Etude de simples projections de cartes et applications de la Trigonométrie et du dessin géométrique à la Cosmographie. Détermination de la latitude par l'observation du soleil et de l'étoile polaire. Calcul du temps local et de la longitude. Calcul d'arcs de grand cercle entre points de latitudes et longitudes données. Tout ceci devrait être la partie objective de l'étude du triangle sphérique.

4. — *Géométrie analytique.* Les théorèmes fondamentaux relatifs aux coniques, ce travail étant condensé autant que possible, comme celui de la Géométrie élémentaire. Etude des courbes utilisées en Mécanique et en Physique, avec applications à des sujets tels que la correction, à l'aide de la chaînette, des mesures fournies par par la chaîne d'arpenteur.

5. — *Revision des principaux théorèmes de Géométrie et de Trigonométrie.* Formules d'approximation, comme la règle de Simpson pour les surfaces.

6. — Travail pratique en plein air avec le théodolite.

Année XII. Mathématiques V (a). Facultatif pour garçons et filles. Classes séparées de préférence. Premier semestre (voir aussi Mathématiques V, (b) plus loin). 4 leçons par semaine. Les mathématiques IV sont supposées connues.

Plan général. Un semestre de travail sur l'Analyse supérieure et ses applications, avec travail pratique dans l'usage du théodolite et de nombreuses applications à la Mécanique. Il est possible d'organiser un cours parallèle pour les filles, comprenant les éléments d'Astronomie mathématique et descriptive.

Programme détaillé.

1. — *Eléments du Calcul différentiel et intégral* avec applications pratiques à la Mécanique. Les problèmes de mesures traités jusque là d'une manière plutôt insuffisante seront examinés maintenant clairement ; par ex., la règle de Simpson.

2. — *Travail en plein air* avec usage du théodolite. Courbes de chemin de fer, problèmes simples de construction de ponts et autres applications de la Trigonométrie et du Calcul infinitésimal.

3. — *Applications* en vue du travail V (b), comme le Calcul des probabilités et la méthode des moindres carrés.

Mathématiques V (b). Exigé pour les garçons, facultatif pour les filles. Classes séparées. 3 leçons par semaine pendant toute l'année. Les Mathématiques III sont supposées connues.

Plan général. Arithmétique commerciale. Un cours complet, 3 leçons par semaine pendant l'année entière, comprenant toute l'Arithmétique commerciale nécessaire à une personne entrant dans le commerce. Introduire autant que possible une revison des mathématiques I, II, III, et traiter de toutes les applications commerciales actuelles.

Eléments de tenue de livres. Toutes les pratiques surannées et non utilitaires doivent être éliminées. Pour les filles, une attention particulière sera portée à l'Arithmétique et aux différentes branches de l'Economie domestique, y compris les comptes et placements, ainsi que la Chimie domestique.

Programme détaillé.

1. — *Calcul*, Revision de la règle à calcul et des logarithmes. Explication et usage des machines à calculer. Les principes de la preuve par 9 et par 11.

2. — *Théorie des placements.* Les questions pratiques d'intérêts composés, annuités et placements en actions et obligations.

3. — *Banque* et *change*.

4. — Parties les plus simples des *Mathématiques de la statistique*. Si possible la méthode des moindres carrés avec applications à la science.

5. — *La construction et l'usage des tables pratiques*, comme celles concernant les intérêts, gages, change, température, longitude, taxe, etc.

6. — Brève étude de la *théorie de l'assurance* contre l'incendie et pour la vie, renfermant les premiers principes des probabilités.

7. — Principes fondamentaux sur la commission, le courtage, l'escompte et autres usages commerciaux.

J'ajouterais qu'on est en train d'examiner un programme analogue à celui qui vient d'être exposé, dans la *Horace Mann School of Observation* au Teachers Collège, Université de Columbia, New-York.

V. — Questions qui pourraient être examinées par des congrès internationaux.

Je terminerai en exprimant le vœu que ces congrès internationaux puissent augmenter encore de valeur par la clarté qu'ils apportent dans les domaines de la pensée, en examinant parfois, par l'intermédiaire de comités, quelques questions concernant l'instruction secondaire. Les différents pays ne peuvent pas être uniformes dans leurs programmes, leurs systèmes scolaires, pas plus

que dans leurs méthodes d'enseignement, mais l'influence d'un congrès de cette nature pourrait être d'une grande utilité à ceux qui cherchent sérieusement à améliorer l'enseignement des mathématiques. Parmi les *questions qui pourraient être discutées profitablement*, j'indiquerai les suivantes :

1. Quels ont été les résultats des tentatives faites en vue de supprimer la séparation entre l'Algèbre et la Géométrie, ou d'enseigner les deux simultanément, et peut-on déjà en déduire une recommandation à cet égard ?

2. Quels ont été les résultats des tentatives d'enseigner la Géométrie démonstrative avant l'Algèbre ? S'ils ont été favorables, quelle est la nature de la Géométrie la mieux adaptée à cette méthode apparemment psychologique ?

3. Quelle est l'opinion d'observateurs impartiaux sur la Géométrie de Méray en France et sur les travaux du genre de ceux de de Paolis en Italie, touchant la fusion de la Géométrie plane et de la Géométrie de l'espace ?

4. Que s'est-il fait dans les différents pays en ce qui concerne la fusion de la Géométrie plane et de la Trigonométrie.

5. Qu'y a-t-il à faire pour faciliter l'introduction des idées élémentaires de l'Analyse supérieure dans l'Algèbre secondaire ?

6. Quel est le minimum convenable de la Géométrie d'Euclide servant de base à la Géométrie analytique, au Calcul infinitésimal et à la Mécanique ?

7. Quels sont les liens appropriés convenables à établir entre les Mathématiques secondaires et la Physique ?

8. Quelle place les Mathématiques secondaires doivent-elles occuper en ce qui concerne la nature des applications et les rapports des Mathématiques appliquées aux Mathématiques pures ?

9. Quelle devrait être la nature relative des cours des écoles secondaires destinés à ceux qui n'ont pas l'intention de continuer à l'université et à ceux qui ont l'intention de le faire ? En d'autres termes, des cours complets et des cours préparatoires ?

Ces questions et d'autres de ce genre attirent l'attention sérieuse des professeurs américains. Comme nous nous sommes toujours tournés du côté de l'Europe pour y chercher des propositions conservatives mais aussi d'une réelle utilité, quelques-uns d'entre nous seraient heureux si le Congrès jugeait bon de former des comités internationaux [1] pour l'étude de sujets de cette nature. Une entente n'est pas d'une importance capitale, mais un échange de vues et des propositions seraient toutefois d'une utilité manifeste.

David-Eugène Smith (New-York).

---

[1] On sait que le Congrès a accepté cette proposition et qu'il a chargé MM. Klein, Greenhill et Fehr de constituer une Commission internationale. *(La Réd.)*

LES MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN SUISSE[1]

1. — Il est réjouissant de constater qu'à l'heure actuelle, dans les principaux pays, l'enseignement scientifique fait l'objet d'études approfondies en vue d'une meilleure adaptation des plans d'études et des méthodes aux besoins de la vie économique et de la science moderne. D'importantes réformes sont proposées ; elles intéressent également les divers degrés de l'enseignement. Les savants ont compris dès le début qu'ils ne devaient pas rester étrangers à ce mouvement dont ils seront les premiers à utiliser les bons résultats. Le comité du Congrès a donc été bien inspiré en provoquant une série d'études similaires sur l'enseignement mathématique dans les principaux pays.

Je veux essayer de donner ici un aperçu très bref de ce qui se fait en Suisse. La tâche n'est pas aussi simple qu'on pourrait l'imaginer à première vue, car on se trouve en présence, non pas d'un type unique d'écoles, mais d'établissements variant d'un canton à un autre. En Suisse l'instruction publique est en effet du ressort des cantons, au nombre de vingt-deux. Si j'ajoute que dans plusieurs d'entre eux l'organisation est municipale, vous comprendrez que la plus grande diversité règne chez nous dans les plans d'études ou tout au moins dans l'organisation des études.

Les inconvénients d'un pareil système sont minimes à côté des avantages qu'offre une organisation qui permet de tenir compte, dans la mesure du possible, des intérêts régionaux. Cette grande indépendance des autorités scolaires facilite considérablement l'étude et l'accomplissement de réformes, d'autant plus qu'une grande liberté d'initiative est généralement laissée au corps enseignant. Moins il y a de rouages purement administratifs, plus les progrès sont faciles à réaliser. On ne sera donc pas surpris de constater que des demandes de réformes faisant encore l'objet de nombreuses démarches dans les grands pays, ont reçu satisfaction depuis longtemps en Suisse. Ainsi, pour ne donner qu'un exemple, je signalerai le fait que dans plusieurs gymnases scien-

[1] Rapport présenté au 4e Congrès international des mathématiciens, Rome, avril 1908. Section IV (Philosophie, Histoire et Enseignement), par H. Fehr, Professeur à l'Université de Genève.

tifiques[1] la première initiation au calcul différentiel figure au programme depuis plus d'un demi-siècle.

Le temps nécessairement très limité accordé à chaque communication m'oblige de restreindre le plus possible le sujet. Je me bornerai à vous montrer la place qui est faite aux mathématiques dans nos gymnases. Toutefois, avant d'aborder cette question, il est indispensable de jeter un coup d'œil très rapide sur l'organisation même des établissements secondaires.

2. — Les écoles moyennes conduisant aux études supérieures, portent des noms divers suivant les cantons : *Collège, Gymnase, obere Realschule, Kantonsschule.* C'est cette dernière dénomination qui est la plus répandue dans les cantons de langue allemande.

Examinés au point de vue de leur organisation extérieure, ces établissements présentent des différences assez notables. On y trouve généralement *deux cycles.* Le premier cycle est de 3 ou 4 ans et forme le *collège ou gymnase inférieur* ; le second cycle comprend 4 ans ou (4 ans $^1/_2$ dans certains cantons) ; les élèves y entrent à l'âge de 14 ou 15 ans.

Les gymnases se divisent en 2 ou 3, quelquefois même *4 sections*, suivant les langues étrangères qui y sont enseignées. Nous laisserons de côté la section commerciale que l'on trouve dans plusieurs établissements. Dans quelques villes l'école de commerce forme en effet une section de l'Ecole cantonale, par exemple à Zurich, Berne, Lucerne, Aarau, Bâle, St-Gall.

Les *deux grandes sections,* communes à tous les gymnases sont : *a) la section classique*, qui conduit à toutes les Facultés universitaires et à l'Ecole polytechnique fédérale moyennant un complément d'études mathématiques) ; les branches spéciales sont le Latin, le Grec et la Philosophie.

b) La section technique ou *industrielle,* qui conduit plus particulièrement aux carrières scientifiques, techniques ou industrielles. Elle porte des noms différents suivant les villes : à Aarau et à Genève, c'est la *section technique*, à Berne l'*école réale (Realschule),* à Bâle l'*obere Realschule),* à Zurich, Frauenfeld et St-Gall l'*Industrieschule,* dans les cantons de Vaud et de Neuchâtel c'est le *Gymnase ou la section scientifique,* etc.

Les élèves qui sortent de cette section sont admis directement aux Facultés des Sciences et des Lettres à la Faculté technique de Lausanne et à l'Ecole polytechnique fédérale.

Le Gymnase de Genève possède encore deux autres sections : *c)* la *section réale*, créée en 1886, qui comprend, à côté de l'étude des lan-

[1] Ainsi à Bâle, l'Ecole réale supérieure a été prolongée d'une classe en 1856-57 avec le programme suivant : Algèbre supérieure, 2 heures ; Géométrie analytique, 2 ; Calcul différentiel et intégral 2 ; Mécanique 4 ; Géométrie descriptive 4 ; Minéralogie 2 : Histoire des découvertes 1 (V. *Geschichte der obern Realschule zu Basel,* 1905).

gues modernes, celle du latin. Elle correspond à peu près à la section *Latin-sciences* en France et au *Realgymnasium* allemand. Une section analogue a été créée à Zurich en 1905. L'examen de sortie donne accès à toutes les facultés universitaires.

d) la *section pédagogique*, qui prépare les candidats à l'enseignement primaire et qui, en outre, conduit aux Facultés des Sciences et des Lettres (pour les lettres modernes et les sciences sociales). L'enseignement scientifique est le même que dans la section réale.

A la fin du Gymnase les élèves obtiennent, après examen, un *diplôme de maturité* qui porte le nom de la section correspondante.

3. — Passons à l'*organisation des études mathématiques*. Dans plusieurs établissements celles-ci se répartissent sur *deux cycles;* le premier cycle correspond au Gymnase inférieur et a pour but de fournir une *première initiation* à l'Algèbre et à la Géométrie. Dans cette première étude, qui est déjà précédée d'une première préparation fournie par l'Ecole primaire, l'enseignement de la Géométrie est basé uniquement sur la méthode intuitive, le maître a recours à la superposition et à la décomposition des figures; les élèves sont appelés à faire des constructions à l'aide des instruments, notamment des exercices simples sur des lieux géométriques.

Le *temps consacré* à l'Arithmétique et à l'introduction à l'Algèbre et à la Géométrie est généralement de 4 heures par semaine.

Sans doute cette période d'initiation n'existe pas dans tous les établissements, d'une manière également complète, mais partout où elle a été appliquée elle a donné d'excellents résultats. Il me paraît inutile d'insister ici sur la nécessité de faire précéder l'étude théorique des mathématiques d'un enseignement intuitif dans lequel on familiarise les jeunes élèves avec les figures géométriques et leurs propriétés les plus simples et avec l'emploi de la règle et du compas dans la résolution des problèmes élémentaires. En procédant ainsi les maîtres n'ont fait que suivre la voie tracée par Pestalozzi, qui devait nécessairement laisser de nombreux disciples parmi ses compatriotes, dont le plus illustre est sans doute le grand géomètre Steiner. Une nouvelle impulsion vient d'être donnée à cet enseignement d'initiation, tout au moins dans les milieux où il n'avait pas encore obtenu son plein développement, par M. Laisant, l'un des fondateurs de nos Congrès, grâce à son récent livre sur l'*Initiation mathématique*[1].

4. — Examinons maintenant quel est le *but* et le *plan d'études de l'enseignement mathématique dans la division supérieure des*

[1] 4me édition, Paris-Genève, 1908, prix : 2 frs.; traduction allemande par Schicht, Leipzig-Wien, 1908; traduction italienne par G. LAZZERI, Firenze, 1908. Il y a aussi une traduction polonaise.

gymnases. Si l'on parcourt les divers programmes, on constate que l'on a généralement reconnu qu'à côté du rôle qu'exercent les mathématiques sur le développement logique de la pensée chez l'élève, il y avait à tenir compte de l'importance des mathématiques dans la vie journalière et dans l'étude des phénomènes de la nature.

Je citerai le texte suivant du but de l'enseignement mathématique de la Kantonsschule de Zurich (Programme 1907, section classique) :

« *Lehrziel.* » « Fertigkeit im numerischen Rechnen, besonders « auch im Kopfrechnen, und Gewandheit in der Auflösung von « Aufgaben des bürgerlichen Lebens. Erziehung zu klarem, lo- « gischem Denken und Ausbildung des räumlichen Anschauungs- « vermögens. Einsicht in die mathematische Behandlungsweise « von Fragen des praktischen Lebens und einfachen gesetzmäs- « sigen Erscheinungen der Natur. »

Dans le programme de la section réale cette dernière partie a été complétée comme suit :

« Erwerbung der Fähigkeit, Aufgaben des praktischen Lebens, « der Natur und der Technik auf mathematischem Wege behan- « deln und lösen zu können. »

Pour atteindre ce but les gymnases accordent une large place aux considérations empruntées aux sciences appliquées. Ainsi dans plusieurs établissements (classiques et industriels) l'enseignement des notions de Trigonométrie sphérique est suivi d'un cours de Géographie mathématique ou de Cosmographie. Dans les sections industrielles des principaux gymnases le dessin technique comprend, dans les dernières classes, une série de leçons de levé de plans avec de nombreux exercices pratiques sur le terrain.

Quant au temps affecté à l'enseignement mathématique, il est généralement de *4 heures*, dans les *sections classiques*, et *de 6 à 8 heures* (quelquefois même dix heures dans la dernière classe) dans les *sections industrielles*.

Le plan d'études des sections classiques comprend l'Algèbre, la Géométrie, la Trigonométrie, la Géométrie analytique, la Cosmographie.

Dans les sections industrielles ces mêmes branches sont étudiées d'une manière plus approfondie ; on y trouve en outre les éléments de l'Algèbre supérieure et du Calcul différentiel et intégral et la Géométrie descriptive.

5. — L'étendue des programmes de ces différentes branches présente quelques différences lorsqu'on passe d'une ville à l'autre. C'est surtout dans le domaine de la Géométrie que l'on trouve une plus grande variété. Les gymnases de la Suisse orientale accordent généralement une place plus grande aux notions empruntées à la Géométrie moderne.

Mais tous les programmes ont nécessairement une partie commune, un minimum, correspondant aux prescriptions de deux commissions fédérales. En effet, bien que les écoles moyennes ne dépendent que de l'administration cantonale ou municipale, le Gouvernement fédéral exerce cependant une certaine influence, et indirectement un contrôle, sur les études secondaires supérieures dans les sections classiques et industrielles. Cela provient de ce qu'en Suisse les carrières médicales sont soumises à un diplôme fédéral. Il a été institué des *examens fédéraux de maturité pour les candidats aux professions médicales*. Les diplômes cantonaux peuvent être jugés équivalents, s'ils sont délivrés par des écoles dont l'organisation et le programme garantissent une bonne préparation aux études universitaires. A cet effet le Conseil fédéral fait dresser une liste des écoles moyennes suisses dont les certificats de sortie sont reconnus comme certificats de maturité.

Le programme fédéral exigeant la connaissance du latin, avec le grec comme branche facultative, les *gymnases classiques ou réaux* doivent nécessairement en tenir compte dans le plan d'études. Il constitue pour eux un minimum qui est généralement dépassé.

Voici le texte du *programme fédéral de maturité pour les candidats aux professions médicales*, en ce qui concerne les Mathématiques et la Physique.

Mathématiques. *a) Algèbre*. Opérations algébriques. Equations du premier et du deuxième degré à une et à plusieurs inconnues. Logarithmes. Progressions arithmétiques et géométriques. Intérêts composés et annuités. Eléments de la théorie des combinaisons et du calcul des probabilités. Binôme de Newton avec exposants entiers.

b) Géométrie. Planimétrie, stéréométrie, trigonométrie plane. Habileté dans la construction de figures géométriques. Géométrie analytique plane : point, ligne droite, cercle; théorie élémentaire des sections coniques (formes d'équations les plus simples). Application de la théorie des coordonnées à la représentation graphique de fonctions analytiques simples et de fonctions élémentaires de quantités physiques et mécaniques.

Physique. — Propriétés générales des corps solides, liquides et gazeux. Lois principales du son, de la lumière, de la chaleur, du magnétisme et de l'électricité.

Eléments de géographie physique.

(Programme du 6 Juillet 1906.)

C'est là le minimum des connaissance mathématiques que fournissent les gymnases classiques en Suisses. Vous constatez qu'il contient la *Géométrie analytique*, qui est du reste enseignée depuis longtemps dans le Gymnase classique avant même que le programme fédéral en fit mention. On y trouve aussi les applications à la représentation graphique de fonction simple. Cette dernière partie a été ajoutée en 1906. Ces notions se trouvaient déjà impli-

citement comprises dans l'enseignement de la géométrie analytique ; il s'agissait surtout de les développer en tenant compte des besoins modernes des sciences appliquées. L'*Association suisse des professeurs de mathématiques* l'a reconnu sans peine en adoptant à l'unanimité les thèses que j'ai eu l'honneur de lui soumettre en Décembre 1904 et dont voici le texte[1] :

I. *En raison de leur importance et de leur portée, la notion de fonction et les problèmes fondamentaux qui s'y rattachent appartiennent au programme de l'enseignement mathématique des écoles moyennes.*

II. *Quant à l'étendue et à la méthode on devra, d'une part, se borner aux notions fondamentales, et à leurs applications typiques les plus simples, et, d'autre part, éviter un exposé purement abstrait.*

Sur la proposition de M. le professeur Suter il a été ajouté un troisième vœu, adopté également à l'unanimité :

III. *Il est désirable que dans l'enseignement secondaire supérieur, notamment dans les gymnases, une plus grande place soit accordée au développement historique des mathématiques.*

6. — Le programme ci-dessus se retrouve donc nécessairement dans le programme des gymnases qui doivent en tenir compte dans l'élaboration de leur plan d'études. Chaque établissement étant libre de fixer son *programme détaillé*, on trouve une grande variété dans les programmes. En général le programme fédéral est dépassé ou tout au moins traité d'une façon très large. Ainsi les uns accordent une place importante aux notions de la géométrie moderne et à l'étude synthétique des sections coniques. La Stéréométrie comprend quelquefois des notions de Géométrie descriptive (par ex. Frauenfeld) et cette façon plus large d'envisager la stéréométrie devrait être adoptée dans tous les établissements n'ayant pas un enseignement proprement dit de Géométrie descriptive. Plusieurs gymnases (par ex. Berne, La Chaux-de-Fonds, St-Gall) font suivre la Trigonométrie plane des éléments de Trigonométrie sphérique et de ses applications simples à la Géographie mathémathique. Quelques programmes mentionnent encore des équations cubiques, les notions sur les nombres complexes et les équations en général, (par ex. Berne, La Chaux-de-Fonds), ou les séries (Berne). La notion de fonction avec représentation graphique figure explicitement dans la plupart des programmes ; quelques-uns ajoutent les premières notions de calcul différentiel et intégral (par ex. Frauenfeld, Schaffhouse).

Nous ne ferons pas ici une étude comparée complète des divers

---

[1] *Der Funktionsbegriff im mathematischen Unterricht der Mittelschule.* Vortrag gehalten in der Vereinigung der Mathematiklehrer an schweizerischen Mittelschulen am 17. Dezember 1904. — Traduction française dans *l'Enseignement mathématique*, 7e année. La notion de fonction dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes, p. 178-187, 1905.

programmes. Ce qui précède montre suffisamment qu'en Suisse les mathématiques occupent une bonne place dans les établissements classiques. Personne ne conteste chez nous que les mathématiques appartiennent à l'ensemble des connaissances qui forment la culture générale indispensable à toutes les carrières libérales et chacun reconnaît que les éléments que l'on enseigne dans les gymnases sont à la portée de tout cerveau normalement constitué. La légende de la bosse des mathématiques, pour ce qui est des éléments, tend de plus en plus à disparaître.

7. — Si nous passons maintenant aux *sections scientifiques* (industrielles ou techniques) nous constatons qu'ici aussi il y a un programme minimum que doivent avoir parcouru les élèves qui entrent à l'Ecole polytechnique fédérale (Zurich). Le Conseil de l'Ecole établit une liste des gymnases scientifiques dont le diplôme de maturité dispense des examens d'admission. Ce programme comprend les objets suivants concernant les mathématiques :

Les éléments d'Algèbre (y compris les notions sur la théorie des équations et les séries), la Géométrie à deux et à trois dimensions, la Trigonométrie plane et sphérique ; la Géométrie analytique à deux dimensions avec des notions sur la Géométrie analytique à trois dimensions, la Géométrie descriptive. Les éléments de la théorie du mouvement et de la mécanique des corps solides, liquides et gazeux.

Voici, à titre d'exemple, comment ces branches ont été réparties dans le plan d'études de quelques gymnases.

Bale : Obere Realschule. (Durée 4 ans 1/2 ; âge d'admission : 14 ans révolus).

Classe I. — Arithmétique et Algèbre jusqu'aux équations du premier degré à plusieurs inconnues (3 h.) — Géométrie : planimétrie et commencement de la stéréométrie (3 h.) — Dessin géométrique (2 h.).

Classe II. — Algèbre : Puissances entières et fractionnaires, logarithmes. Equations du second degré (3 h.) — Géométrie, Stéréométrie (2 h.) — Dessin géométrique (2 h.).

Classe III. — Algèbre : Progressions. Intérêts composés, annuités applications aux calculs des assurances. Analyse combinatoire. Déterminants (3 h.) — Géométrie : Trigonométrie plane et sphérique (3 h.) — Dessin géométrique avec travaux pratiques sur le terrain (2 h.).

Classe IV. — Algèbre : La loi du binôme. Séries. Nombres complexes. Résolutions des équations du degré supérieur, équations transcendantes (2 h.) — Géométrie analytique (2 h.) — Géométrie descriptive (2 h.) — Dessin géométrique, épures de Géométrie descriptive (2 h.).

Classe V. — (1 semestre.) — Algèbre : Eléments du Calcul différentiel avec applications simples à la Géométrie et à la Physique (3 h.) — Géométrie analytique à 3 dimensions (3 h.) — Géométrie descriptive (2 h.) ; épures (2 h.).

Les *éléments de mécanique* font généralement partie du pro-

gramme de Physique (Bâle, Zurich, Genève, etc.); toutefois dans quelques gymnases ils sont enseignés par le professeur de mathématiques et figurent au plan d'études pour 1 à 2 h. par semaine pendant 1 à 2 ans. (Lausanne, La Chaux-de-Fonds), etc.

On retrouve ce programme avec plus ou moins de développement dans les divers gymnases. Pour donner une idée exacte de l'ampleur avec laquelle il est traité, nous reproduisons ici le programme détaillé du *Gymnase de Zurich* (section industrielle) en conservant le texte original.

Zurich; *Industrieschule*. (Durée des études : 4 ans 1/2 ; âge d'admission : 14 ans révolus).

Mathematik — I. Kl. 6 St. *Rechnen*. Repetition der gewöhnlichen und Dezimalbrüche, des Dreisatzes und seiner Anwendung auf die bürgerlichen Rechnungsarten. Teilbarkeit ganzer Zahlen. Ausziehen der Quadratwurzel aus dekadischen Zahlen. Verhältnisse und Proportionen. Übungen im Kopfrechnen. — *Arithmetik*. — Einführung der allgemeinen und der negativen Zahlen. Die vier Grundoperationen mit allgemeinen rationalen Zahlen und Ausdrücken. Sätze über Quadratwurzeln aus Produkten und Quotienten. — *Algebra*. — Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. Textgleichungen, insbesondere aus dem bürgerlichen Rechnen und der Planimetrie. — *Planimetrie*. — Verschiebung, Drehung, Messung. Die Lehre von den Winkeln und den Parallelen, die allgemeinen Sätze über das Dreieck, das Parallelogramm und das Trapez. Zentrale und axiale Symmetrie. Vergleichung, Verwandlung, Teilung und Messung der Flächen. Rechtwinklige Koordinaten. Sätze über Winkel, Sehnen und Tangenten des Kreises, Berechnung der Bogen und Sektoren. Die Lehre von den proportionalen Strecken und der Ähnlichkeit und deren Verwendung zur Untersuchung von Dreieck und Kreis. Teilverhältnis und harmonische Teilung. Die drei Flächensätze des rechtwinkligen Dreiecks, die Winkelhalbierenden, Schwerlinien und Höhen des Dreiecks. Konstruktion fundamentaler algebraischer Ausdrücke (Dimension). Verhältnis ähnlicher Flächen.

II. Kl. 6 St. *Rechnen*. — Überschlagsrechnungen im Kopf. Die Kubikwurzel. Abgekürzte Operationen. Rechnen mit begrenzter Genauigkeit. — *Arithmetik*. — Potenzen und Wurzeln mit positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Exponenten. Begriff der irrationalen, imaginären und komplexen Zahlen. — *Algebra*. — Die linearen Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten. Übungen im Ansetzen und Lösen von Textgleichungen, aus dem bürgerlichen Leben, der Arithmetik, der Geometrie und der Mechanik. — *Ebene Trigonometrie* (im Sommer): Funktionen spitzer Winkel. Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks. Anwendungen auf die regulären Vielecke und die Berechnung von π, auf praktische Geometrie, Stereometrie und Physik. Die einfachsten Sätze zur Auflösung des allgemeinen Dreiecks Funktionen stumpfer Winkel. — *Stereometrie* (im Winter): Einführende Anschauungen. Allgemeine und spezielle Lage der drei Raumelemente. Winkel und Abstände, dreierlei Symmetrie Unendlich ferne Raumelemente. Eigenschaften von Zylinder-, Kegel-, Kugelflächen und ihren Tangentialebenen. Berechnung von Oberfläche und Volumen des geraden Prismas. Das Prinzip der Volumenvergleichung. Volumen von vollständigen und schief abgeschnittenen Prismen und Zylindern, von Pyramiden, Kegeln und ihren Stumpfen, von

Kugeln und Kugelteilen, von Prismatoiden. Gewichtsberechnung bei technisch wichtigen Formen.

III. Kl. 6 St. *Rechnen.* — Interpolierendes Rechnen mit Zahlen- und graphischen Tabellen. Logarithmisches Rechnen mit fünfstelligen Tabellen. — *Arithmetik.* — Potenzen mit irrationalen Exponenten. Die Lehre von den Logarithmen und ihrer Anwendung auf Arithmetik, Geometrie, Physik und Exponentialgleichungen. Arithmetische und geometrische Progressionen. Näherungs- und Grenzwert bei fallenden geometrischen Reihen. Zinseszins-, Amortisations- und Rentenrechnung. Die Elemente der Lebensversicherung. Das numerische und das graphische Rechnen mit komplexen Zahlen. Der Moivresche Lehrsatz. — *Algebra* : Lineare diophantische Gleichungen. — *Ebene Trigonometrie* (im Sommer) : Allgemeingültige Definitionen und Additionstheoreme. Gebrauch der Logarithmen und des Hilfswinkels. Zusammenhang der trigonometrischen Sätze. Anwendungen auf Vermessungen, Stereometrie und Physik. — *Neuere Geometrie* (im Winter) : Potenz und Potenzlinien in bezug auf den Kreis. Harmonische Gruppen und Linealkonstruktionen. Polarität in bezug auf den Kreis. Ähnlichkeitscentra und -Axen von Kreisen. Uebersicht der planimetrischen Konstruktionsmethoden.

IV. Kl. 6 St. im Sommer, 5 St. im Winter. *Arithmetik.* — Die gemeinen Kettenbrüche. Kombinatorik. Binomischer Lehrsatz für positive ganze Exponenten. Mathematische und empirische Wahrscheinlichkeit und Anwendungen. — *Algebra.* — Die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades. Die Zahl der Wurzeln und die Wurzelfaktoren der algebraischen Gleichung. Auflösung numerischer Gleichungen durch Näherung. — *Analysis.* — Begriff, graphische Darstellung und Einteilung von Funktionen. Stetigkeit, Null-, Maximal- und Minimalstellen, Grenzwerte. Das Tangentenverfahren zur Bildung der abgeleiteten Funktion. — *Sphärische Trigonometrie* (im Sommer). — Sphärik. Sphärische und räumliche Koordinaten. Die Auflösung der speziellen Dreiecke. Die Hauptsätze für das allgemeine Dreieck. Die Lösung der Grundaufgaben und die Flächenberechnung. Anwendungen auf Stereometrie, darstellende Geometrie und Geographie. — *Mathematische Geographie.* — Beobachtungen an den scheinbaren täglichen Fixsternbewegungen. Horizont- und Äquator-Koordinaten. Die scheinbare jährliche Bewegung der Sonne. Geographische und nautische Ortsbestimmung. *Koordinatengeometrie* (im Winter). — Recht- und schiefwinklige und polare Koordinaten, Transformationen, Gerade Linie und Kreis.

V. Kl. 6 St. (im Sommer). *Algebra.* — Begriff und Summe von konvergenten Reihen. Die einfachsten Konvergenzkriterien. Die Entwicklung der Elementarfunktionen in Potenzreihen. Berechnung und Zusammenhang dieser Funktionen. — *Koordinatengeometrie.* — Die Parabel. Gemeinsame Definition der Kegelschnitte. Die Zentralkegelschnitte. Die zentralen, fokalen und Flächeneigenschaften. Geometrische Örter zweiten Grades.

Buchhaltung. — I. Kl. 1 St. im Sommer ; 2 St. im Winter. — Zins- und Diskontrechnung. Zahlungsverkehr. Wechsel und Scheck nach dem schweizerischen Obligationenrecht und in ihren wichtigsten volkswirtschaftlichen Funktionen. Bankverkehr und Kontokorrente. Entwicklung der Grundsätze der doppelten Buchhaltung und Erklärung der wichtigsten Bücher. Durchführung eines einmonatlichen Geschäftsganges eines industriellen Betriebes nach der amerikanischen Form.

Alle schriftlichen Arbeiten sind sauber und gefällig auszuführen.

Geometrisches Zeichnen.

Die Zeicheninstrumente, insbesondere die Reisszeuge, unterliegen der Kontrolle des Fachlehrers und werden am besten und am billigsten nach seinem Rate angeschafft.

I. Kl. 2 St. — Übungen im exakten und gewandten Gebrauch der Zeicheninstrumente. Einfache Situationspläne. Konstruktionsaufgaben im Anschluss an den geometrischen Unterricht: Bestimmen von Dreiecken und Vierecken, Flächenverwandlungen und -teilungen. Kreisaufgaben, geometrische Örter, Methoden der Bewegung und Abbildung.

II. Kl. 2 St. — Im Sommer: Konstruktionsaufgaben zur Fortsetzung der Planimetrie, insbesondere der Lehre von der Ähnlichkeit. Graphische Darstellungen von Funktion. Zeichnen von Kurven als Örtern, insbesondere von Kegelschnitten. — Im Winter: Darstellung von einfachen stereometrischen Formen in schiefer Parallelprojektion. Ausführung der Aufgaben der konstruierenden Stereometrie. Herstellung von Schnitten, Netzen, Modellen. Symmetriekonstruktionen. Konstruktion von Ellipsen als schiefen Kreisprojektionen. Konstruktionen geometrischer Örter.

Darstellende Geometrie. — III. Kl. 3 St. im Sommer, 4 St. im Winter.— *Kotierte Normalprojektion.* — Die Lösung von Aufgaben mittelst des umgelegten Differenzdreiecks. Darstellung von Raumgebilden, besonders von ebenen Figuren. Schichtenlinien. Um- und Aufklappungen um Hauptgeraden. Lehre vom Dreikant und von den Polyedern. Normale und schiefe Affinität. Die Ellipse als affine Figur des Kreises. — *Konjugierte Normalprojektionen.* — Die Zweitafelprojektion der Raumelemente einfacher Objekte im ersten Quadranten. Ableitung neuer Projektionen mittelst Transformation und Drehung. Schnitt- und metrische Aufgaben. Raumelemente in allen vier Quadranten.

IV. Kl. 3 St. im Sommer, 4 St. im Winter. — Die Lösung der Grundaufgaben durch Transformation und Drehung. Die Darstellung der Zylinder-, Kegel- und Kugelflächen und ihre Benutzung als Örter. Hyperboloid, Schraubenlinien und -Flächen, Rotationsflächen. Das Dreitafelsystem. Querschnitte und Durchdringungen von Polyedern. Selbstschatten und ebene Schlagschatten. Durchdringungen von Polyedern, Zylindern, Kegeln und Kugeln. Abwickelungen. Technische Anwendungen. Schattenkonstruktionen.

V. Kl. 3 St. im Sommer. — Ebene Schnitte von Pyramidenmänteln und kollineare Verwandtschaft. Kollineare Konstruktion von Kegelschnitten. Hauptbegriffe der geometrischen Perspektive. Perspektivische Darstellung nach Massen.

Physik. — Der Unterricht wird sowohl experimentell als mathematisch durchgeführt. — II. Kl. 2 St. im Sommer, 3 St. im Winter. Einleitendes über Aufgabe und Methode der Physik. Längen- und Zeitmessung. Mechanik der festen Körper: Begriff von Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Masse, Gewicht, Arbeit und Energie. Bewegung bezw. Gleichgewicht unter dem Einflusse einer oder mehrerer Kräfte. Der Wurf. Die Maschinen. Die Wage. Bewegung unter dem Einflusse einer beliebigen Zentralkraft. Das Sonnensystem.

III. Kl. 2 St. im Sommer, 3 St. im Winter. — Energie rotierender Körper. Der Kreisel. Das Pendel. Elastizität. Der Stoss. Mechanik der flüssigen Körper. Das spezifische Gewicht. Kapillarität. Diffusion Osmose. Hydrodynamik. Wasserkräften. Wasserräden. Mechanik der gasförmigen Körper: Kinetische Gastheorie. Der Luftdruck. Anwendungen des Luftdruckes.

Pumpen. Molekularerscheinungen in Gasen. Wellenlehre : transversale und longitudinale Schwingungen. Interferenz. Reflexion und Brechung. Stehende Schwingungen. Resonanz. Akustik : Die Erregung, Fortpflanzung und Wahrnehmung des Schalles. Optik : die Ausbreitung des Lichtes im Raume. Die Reflexion des Lichtes.

IV. Kl. 3 St. im Sommer, 2 St. im Winter. Die Brechung des Lichtes. Die Dispersion. Achromasie. Die optischen Erscheinungen der Atmosphäre. Spektralanalyse. Fluoreszenz und Phosphoreszenz. Das Auge und das Sehen. Die optischen Instrumente. Interferenz und Beugung. Polarisation und Doppelbrechung. Wärme : Thermometrie. Ausdehnung der festen, flüssigen und gasförmigen Körper. Kalorimetrie. Aenderung des Aggregatzustandes. Hygrometrie. Wärmeleitung und Wärmestrahlung. Wärmequellen. Wärme und Arbeit. Die Grundgesetze der Elektrostatik. Das elektrische Potential. Kapazität. Kondensatoren. Das elektrostatische Masssystem. Der Magnetismus : Magnetische Feldstärke und Kraftlinien. Das magnetische Kraftfeld der Erde.

Physikalisches Praktikum im Winter : 2 St. in Halbklassen alle 14 Tage : Längenmessungen. Prüfung einer Wage. Dichtebestimmungen. Elastizitätsmodul. Schallgeschwindigkeit aus Staubfiguren. Krümmungsradius und Brennweite einer Linse. Brechungsexponent. Spektralanalyse und Wellenlänge eines Lichtstrahles.

V. Kl. 2 St. Die galvanischen Elemente. Der elektrische Strom. Das magnetische Feld eines elektrischen Stromes. Elektromagnetismus. Das Biot-Savart'sche Gesetz. Das Ohm'sche Gesetz und die Kirchhoff'schen Sätze. Das elektromagnetische Masssystem. Elektrolyse. Die Polarisation und die Akkumulatoren. Stromenergie und Wärme. Glühlicht und Bogenlicht. Thermoelektrizität. Die Induktionsströme. Das Gesetz von Lenz. Selbstinduktion. Foucaultströme. Induktionsapparate. Entladungserscheinungen in verdünnten Gasen. Die dynamoelektrischen Maschinen. Telephon und Mikrophon. Elektrische Schwingungen. Teslaströme. Elektrische Wellen. Funkentelegraphie.

8. — Il y aurait maintenant encore une série de questions à développer ici en vue de donner un tableau complet de l'organisation des études mathématiques dans les gymnases suisses. Il serait intéressant d'avoir quelques indications sur les méthodes d'enseignement et tout particulièrement sur l'enseignement de la Géométrie, sur l'emploi des modèles mathématiques, sur l'usage des manuels, sur la part accordée aux exercices et aux problèmes dans les leçons et dans les examens, etc. Ici encore la plus grande liberté est laissée au corps enseignant et l'on constate de grandes différences lorsqu'on passe d'un gymnase à un autre.

Je me suis borné à faire un tableau de la place accordée aux mathématiques. Ce n'est pas le lieu ici de l'accompagner d'une étude critique qui s'adresserait plutôt à quelques établissements qu'à l'ensemble des écoles moyennes. Car il y a évidemment des lacunes plus ou moins grandes dans quelques gymnases. Ainsi, en Géométrie, on n'accorde pas toujours une place assez large à la Stéréométrie et à la Géométrie pratique, tandis que la Trigo-

nométrie est quelquefois trop développée. Dans plusieurs gymnases on néglige par exemple l'étude du prismatoïde, dont la formule du volume donne lieu à des généralisations remarquables. D'autre part il serait désirable de donner une courte étude synthétique des sections coniques, en partant du cône de révolution, en la plaçant avant l'étude analytique.

Quant à la préparation du corps enseignant, elle varie d'un canton à un autre; il en est de même des exigences de l'Etat, qui ne sont pas toujours assez élevées. L'organisation des études pour les candidats à l'enseignement est encore insuffisante aussi bien dans les universités qu'à l'Ecole polytechnique fédérale. Sous ce rapport il conviendrait d'examiner avec soin les conseils que donne le rapport [1] de MM. Klein et Gutzmer (Dresde 1907).

Cette diversité dans la préparation est peut-être même une force stimulante, car le corps enseignant, dans son ensemble, est à la hauteur de sa mission. Il a conscience que l'enseignement mathématique est perfectible. Aussi est-ce avec le plus grand intérêt qu'il suit les discussions et les efforts qui se font dans les pays voisins.

H. Fehr.

LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE [2]

CHAPITRE III

Encore quelques propriétés du triangle. Angles trièdres et polyèdres. Le théorème du parapluie.

Comparaison des longueurs droites. (Sans figure.) — Deux droites étant données, si on porte l'une sur le prolongement de l'autre et bout à bout, la nouvelle droite formée sera dite *la somme* des deux premières ; des deux modes de superposition des droites égales il résulte que la somme de deux droites est indépendante de l'ordre dans lequel elles ont été ajoutées l'une à l'autre ; on définira de même la somme de plusieurs droites et cette somme jouira des propriétés suivantes : 1° la somme est indépendante de l'ordre de *jonction* des parties ; 2° dans la somme de plusieurs droites, un ensemble quelconque des portions de la somme peut être remplacé par leur somme partielle.

---

[1] Reproduit dans l'*Enseign. math.* du 15 janv. 1908; p. 5-49.
[2] Voir *L'Enseign. math.* du 15 mai, 1908; p. 185-207.

On résume les propriétés qui précèdent en disant que l'addition des droites est une opération *commutative* et *associative*.

Signes d'égalité et d'inégalité. — Plusieurs barres étant rangées par ordre de taille croissante, de taille égale, ou de taille décroissante, donnent à l'œil les trois groupements suivants (Fig. 20) : de là est né l'emploi des signes d'inégalité et d'égalité : $a < b$, $a = b$, $a > b$, qui signifient respectivement :



Fig. 20.

a plus petit que b, a égale b, a plus grand que b.

Quelques remarques évidentes. 1° Dire qu'une droite a est plus grande qu'une autre b, ou supérieure à une autre b, veut dire que la droite a = la droite b *augmentée* de quelque chose ; l'addition étant une opération commutative, il résulte de la remarque précédente que si l'on a :

$$\left\{\begin{array}{l} a < b \\ a' < b' \end{array}\right. \quad \text{on devra aussi avoir: } a + a' < b + b' .$$

2° Quand on ajoute une droite A un certain nombre de fois à elle-même, si par exemple on forme la droite égale à $A + A + A$, la nouvelle droite est dite égale à l'ancienne multipliée par 3 ; en général si m est un nombre entier, et si on forme la droite égale à $A + A \ldots + A$, réunion de m droites égales à A, on dit qu'on a formé la droite A *multipliée* par m, ce que l'on écrit $A . m$.

3° L'addition étant une opération commutative et associative on voit immédiatement que $(A + B + C + D) . m = (A . m) + (B . m) + (C . m) + (D . m)$.

4° On admet comme évident qu'une droite A étant donnée et un nombre entier m étant également donné, il existe toujours une droite X (qui multipliée par m reproduira A ; on appelle cette droite la $m^{ème}$ partie de A ; on dit encore que X dérive de A par l'emploi *du nombre sectionnaire* $\frac{1}{m}$.

Ainsi, *par définition*, les égalités :

$$A = X . m . \quad \text{ou} \quad X = A . \frac{1}{m}; \text{ sont complètement équivalentes.}$$

5° On définira de même *le produit* d'une droite par plusieurs nombres entiers ou sectionnaires envisagés dans l'ordre de l'écriture. Exemple : $A . 3 . \frac{1}{4} . 5$ signifiera : longueur droite A que l'on multiplie par 3 : résultat dont on prend le quart : résultat que l'on multiplie par 5 ; et l'on démontrera sans peine que l'ordre des facteurs entiers ou sectionnaires n'exerce aucune influence sur le résultat.

6° Si p désigne un nombre entier ou sectionnaire on a :

$$(A + B + C) \cdot p = (A \cdot p) + (B \cdot p) + C \cdot p)$$

et par conséquent aussi, si l'on a : $A \cdot p > A' \cdot p$ on peut conclure : $A > A'$.

Les principes qui précèdent contiennent toute l'arithmétique et toute l'algèbre.

I. — Angle d'un triangle.

Deux demi-droites OX et OY peuvent former (Fig. 21) *soit un angle creux, soit un angle pointu, l'un supérieur, l'autre inférieur à 2 droits.*

Lorsqu'on admet, comme nous l'avons admis jusqu'ici, que *par deux points absolument quelconques* ne passe jamais qu'une seule droite on peut affirmer que tout angle engagé dans un triangle est un angle pointu. Démontrons le :

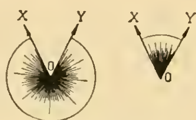


Fig. 21.

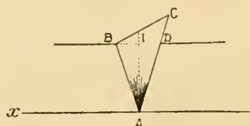


Fig. 22.

Soit $\widehat{BAC}$ (Fig. 22) un angle engagé dans un triangle BAC, sur le plus grand des deux côtés de cet angle prenons une *longueur* égale à celle du plus petit soit D le point ainsi obtenu sur AC, nous obtenons un triangle isocèle BDA ; soit I le milieu de BD, joignons I à A, nous obtenons une droite perpendiculaire à BD, menons A perpendiculaire à AI cette droite ne saurait pénétrer dans l'intérieur du triangle BDA, car elle couperait BD, ce qui n'est pas possible, donc l'angle $\widehat{BAC}$ engagé dans le triangle est formé de droites toutes situées d'un même côté de AX, donc l'angle considéré ne peut atteindre 2 droits.

II. — Propriété de l'angle extérieur d'un triangle.

Définition. — On appelle angle extérieur d'un triangle, l'angle formé en un sommet par l'un des côtés du triangle et par le prolongement de l'autre. (C'est aussi un angle pointu).

Théorème. — *L'angle extérieur d'un triangle est supérieur à tout angle intérieur qui n'a pas même sommet que lui.*

Faisons voir par exemple que : (Fig. 23) $\widehat{XAC} > \widehat{ACB}$. Joignons le troisième sommet B au milieu D de AC et prolongeons BD d'une longueur égale en DB′, joignons B′ à A, la droite AB′ sera située dans l'angle extérieur $\widehat{DAX}$; les angles opposés par le sommet BDC et ADB′ valent chacun 2 droits diminués de l'angle $\widehat{ADB}$ ils sont donc égaux ; alors les deux triangles ADB′ et BDC ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux ; et par suite les angles opposés respectivement à DB′ et BD côtés égaux, seront égaux ; ainsi $\widehat{B'AD} = \widehat{DCB}$: mais B′AD est portion de l'angle extérieur $\widehat{CAX}$, donc enfin on a bien :

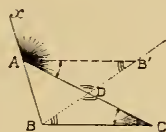


Fig. 23.

$$\widehat{XAC} > \widehat{ACB}.$$

III. — Comparaisons simultanées de 2 côtés d'un triangle et de leurs angles opposés.

Théorème. — *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux les angles opposés à ces côtés sont inégaux dans le même ordre de taille.*

Comparons (Fig. 24) les deux côtés AB et AC du triangle ABC ; soit le côté AC > AB. Prenons sur AC un segment AD = AB et joignons BD ; l'angle $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ (puisque le triangle ABD à deux côtés égaux) ; l'angle $\widehat{ADB}$ extérieur est plus grand que l'angle $\widehat{DCB}$ du triangle partiel BDC ; l'angle $\widehat{ABD}$ portion de l'angle $\widehat{ABC}$ est donc plus grand que l'angle ACB, donc à plus forte raison l'angle total ABC dépassera-t-il ACB.

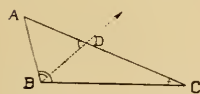


Fig. 24.

Théorème (réciproque du précédent). — *Si deux angles* d'un triangle sont inégaux, les côtés opposés à ces *angles* sont inégaux et dans le même ordre de taille.

Soient (sans figure) $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ deux angles d'un triangle et soient : a et b les côtés respectivement opposés à ces angles ; je dis que l'inégalité $\widehat{A} > \widehat{B}$ entraînera comme conséquence l'inégalité $a > b$.

En effet, en comparant a et b, trois cas peuvent seuls se présenter ; ou bien 1° : $a < b$, ou bien 2° : $a = b$; ou bien 3° : $a > b$; or le cas de $a < b$ entraînerait, d'après le théorème précédent A < B et le cas de $a = b$ entraînerait comme nous l'avons vu, au début de ces leçons A = B. Ces deux suppositions provisoires $a < b$ et $a = b$ entraîneraient donc des conséquences contradictoires avec l'hypothèse : on aura donc bien $a > b$ tout comme on avait d'abord A > B.

Remarque. — Ce genre de raisonnement est ce qu'on nomme un raisonnement *par l'absurde*.

IV. — Un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres.

Il n'y a lieu à démonstration que si le côté considéré n'est pas le plus petit de tous, soit alors (Fig. 25) AB > AC. Prolongeons AC d'une longueur CD, de manière que AD = AB, joignons BD ; envisageons d'une part le triangle isocèle ABD et d'autre part le triangle CBD. Dans ce dernier, l'angle CBD portion de ABD sera plus petit que celui-ci ou que son égal CDB ; on a donc un triangle CBD dans lequel $\widehat{CDB} > \widehat{CBD}$; on peut donc affirmer, d'après le théorème précédent, que CD < CB ; ABAD se composant de AC et de CD sera donc moindre que AC + CB.

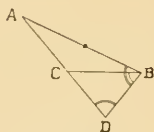


Fig. 25.

V. — Comparaison de deux triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant deux angles inégaux.

Théorème. — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant un angle inégal, les côtés opposés à cet angle dans les deux triangles seront inégaux et dans le même ordre de taille.*

Portons (Fig. 26) le triangle A′B′C′ vers le triangle ABC, de manière à juxtaposer deux côtés égaux A′B′ sur AB et à placer les deux triangles dans une même région de leur plan commun, par rapport à ce côté coïncidant; soit ABD la nouvelle venue du triangle A′B′C′, soit AX la bissectrice de l'angle formé par les deux autres côtés après ce transport.

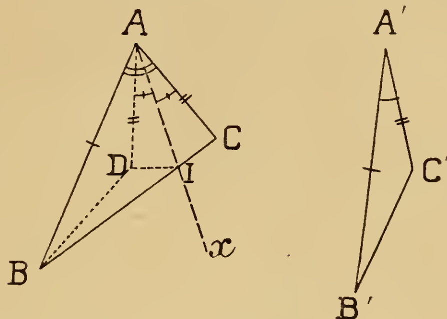


Fig. 26.

Cette bissectrice intérieure au plus grand angle BAC va couper le côté BC en I, joignons ID; nous formons ainsi deux triangles ADI, AIC, égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, puis de l'égalité de ces triangles nous concluons DI = IC.

D'autre part, dans le triangle BDI nous avons, si D n'est pas sur BI,

$$BD < DI + IB \quad \text{ou} \quad BD < BI + IC \quad \text{ou} \quad BC.$$

Si D était sur BI, il serait forcément entre B et I et on aurait BD = BI — ID et à plus forte raison BD < BI + ID.

Théorème (réciproque du précédent). — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, mais si leurs troisième côtés sont inégaux, les angles opposés à ces côtés seront aussi inégaux et dans le même ordre de taille.*

Nous démontrerons cette réciproque par la réduction à l'absurde; soient : b, c, a, les côtés du premier triangle, b', c', a', les côtés du second; soient A et A′ les angles de ces triangles respectivement opposés aux côtés a et a'.

Nous supposons donnés les renseignements suivants :

$$b = b' \quad c = c' \quad a < a' \ \ldots \ \text{(hypothèses données)}$$

voulant comparer les angles A et A′, nous ne pouvons que faire les suppositions suivantes :

1° A > A′; 2° A = A′; 3° A < A′; (hypothèses provisoires).

Or, d'après le théorème direct la supposition : $A > A'$ entraînerait : $a > a'$, ce qui n'est pas : la supposition $A = A'$ entraînerait : $a = a'$, ce qui n'est pas non plus ; la seule supposition qui reste donc possible est : $A < A'$.

VI. — Définition et propriétés de l'angle trièdre.

On appelle angle *trièdre* la figure 27 formée par 3 demi-droites et par les trames angulaires qui les réunissent deux à deux.

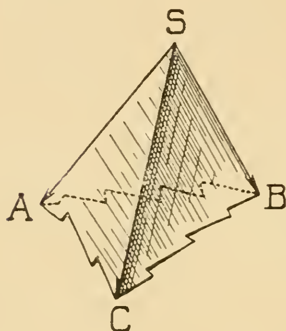


Fig. 27.

Ces trames angulaires portent encore le nom de *faces* du trièdre, leurs intersections ou les demi-droites déjà considérées se nomment les *arêtes* du trièdre.

Deux faces forment sur leur arête commune un angle *dièdre* que l'on nomme : un dièdre du trièdre. Le trièdre, sorte de capuchon, n'est pas une figure fermée ; mais un angle trièdre présente néanmoins certaines analogies avec un triangle ; nous allons par exemple démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout angle trièdre une face est plus petite que la somme des deux autres.*

Il n'y a lieu à démonstration que pour la face qui n'est pas la plus petite ; dans le plan de cette face qui prolonge le triangle ASB (Fig. 28) reproduisons donc un angle égal à la face adjacente plus petite, à partir de l'arête commune aux deux faces et dans une portion de la plus grande des deux faces ; nous obtenons ainsi l'angle ASD portion de ASB et reproduction de la face ASX ; sur l'arête SX prenons une longueur $SC = SD$.

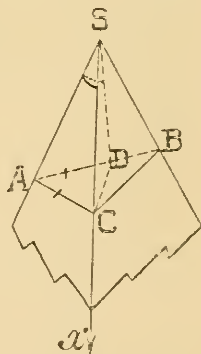


Fig. 28.

Menons CA, CB, CD ; grâce à notre choix des points C et D, les deux triangles ASD et ASC,

déjà réunis par le côté commun SA seront égaux, et leur égalité nous apprendra ensuite que AD = AC ; d'autre part le triangle ABC nous donne

$$AB = AD + DB < AC + CB$$

et comme AD = AC, nous concluons

$$DB < CB .$$

Mais alors les deux triangles CSD et DSB qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, ont leurs troisièmes côtés inégaux dans un ordre de taille que nous connaissons ; donc, d'après le théorème précédent, nous concluons :

$$\widehat{DSB} < \widehat{CSB} ,$$

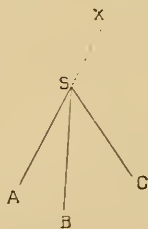
ainsi, quand dans la plus grande face on a enlevé une portion égale à une face voisine on trouve un résidu plus petit que l'autre face voisine ; c'est donc que la première face était plus petite que la somme des deux autres.

VII. — Théorème du parapluie.

Théorème. — *La somme des faces d'un trièdre est moindre que 4 droits.*

Soit (Fig. 29) un trièdre de sommet S et soient SA, SB, SC ses 3 arêtes.

En prolongeant l'arête SA en SX nous formons un autre trièdre d'arêtes SB, SC, SX. Dès lors, en appliquant le théorème précédent au nouveau trièdre, et en remarquant que deux des faces du nouveau trièdre sont des suppléments de faces du premier trièdre, nous aurons :



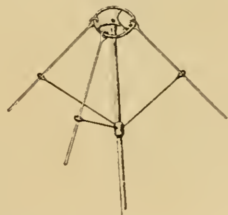


Fig. 29.

$$BSC < \widehat{BSX} + \widehat{CSX} ,$$

ou :

$$\widehat{BSC} < 2^{\text{d}} - \widehat{ASB} + 2^{\text{d}} - \widehat{ASC} ,$$

d'où on conclut immédiatement :

$$\widehat{ASB} + \widehat{ASC} + \widehat{BSC} < 4^{\text{droits}} .$$

Remarque— Concevons trois tiges rectilignes, (Fig. 27) appuyées comme les baleines d'un parapluie sur un cercle perpendiculaire à un axe et soutenues par trois autres tiges égales qui s'appuient à leur tour sur l'axe par l'intermédiaire d'une glissière qui peut s'élever sur cet axe.

Cette figure représente la membrure d'un parapluie rudimentaire, les trois tiges analogues aux baleines du parapluie forment par leurs axes un trièdre dont les faces augmentent quand le parapluie s'ouvre et diminuent quand le parapluie se ferme. Quand le parapluie s'est ouvert jusqu'à ce que les faces soient dans un même plan, les trois faces forment trois angles d'un plan, contigus et réunis autour d'un point sur trois droites, ces trois angles ont une somme égale à quatre droits.

Avant que le parapluie ne fût ouvert, la somme des trois faces du trièdre mobile était moindre que quatre droits ; comme désignation mnémonique l'énoncé du théorème précédent peut être retenu sous le nom de théorème du parapluie.

VIII. — Autre remarque.

Cette comparaison nous suggère une nouvelle démonstration du théorème. Prenons, (Fig. 30) sur les trois arêtes, des longueurs égales SA = SB = SC.

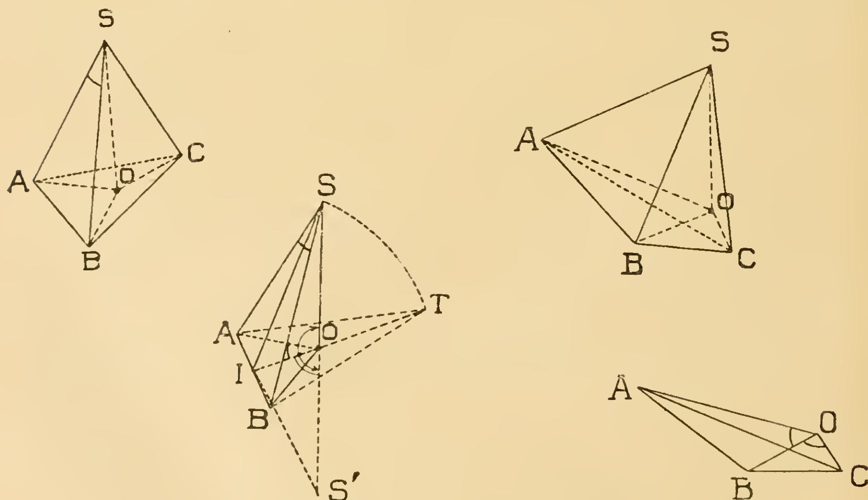


Fig. 30.

Et sur le plan déterminé par les trois points ABC abaissons une perpendiculaire SO, démontrons que l'angle ASB est plus petit que sa projection AOB. Soit I le milieu de AB.

Joignons I à O et à S par deux droites. SI étant perpendiculaire à AB, OI l'est aussi; d'autre part, prolongeons SO d'une quantité égale en OS′ au-dessous du plan AOB ; si l'on rabattait la figure SIO dans son plan autour de IO, S se rabattrait en S′ d'où on conclut SI = S′I, or dans le triangle SS′I on a :

$$SS' < IS + IS' \quad \text{ou} \quad 2SO < 2SI \quad \text{d'où} \quad SO < SI \;;$$

la perpendiculaire SO est moindre que l'oblique SI ; on montrerait de même que IO < IS, on conclut de là que si on rabat la distance SI sur IO le point S se rabattra en T, au-delà de O.

L'angle $\widehat{AOI}$ est donc un angle extérieur du triangle AOT ; on conclut de là

$$\widehat{AOI} > \widehat{ATI} \quad \text{ou} \quad 2\widehat{AOI} > 2\widehat{ATI} \quad \text{ou} \quad AOB > ATB$$

et comme ATB est la reproduction par rabattement de l'angle ASB on conclut AOB > ASB.

Dès lors, en revenant aux figures du trièdre dont le sommet est projeté en O sur le plan ABC, la somme des trois faces du trièdre est plus petite que la somme de leurs projections sur le plan ABC.

Dès lors si le point O est à l'intérieur du triangle la somme des projections des angles est précisément quatre droits.

Si au contraire le point O est hors du triangle ABC, chacun des trois angles en O reste cependant un angle pointu et l'un d'eux contient les deux autres, AOC par exemple contient AOB et BOC ; la somme des trois angles en O est donc moindre que deux fois l'angle AOC et comme l'angle AOC est moindre que deux droits la somme des triangles en O est ici moindre que quatre droits.

Donc dans tous les cas la somme des faces du trièdre est moindre que quatre droits.

IX. — Angles polyèdres. Théorème du parapluie, applicable aux angles polyèdres convexes.

On appelle *angle polyèdre* la figure 31 formée par plusieurs demi-droites envisagées dans un certain ordre ; les *faces* de l'angle polyèdre sont les trames angulaires formées par les divers groupes de deux demi-droites consécutives.

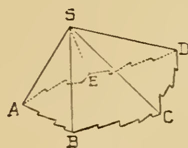


Fig. 31.

Les demi-droites sont les *arêtes* de l'angle polyèdre.

Un angle polyèdre est dit *convexe* si toutes ses arêtes demeurent d'un même côté par rapport au plan de chacune de ses faces; cette définition est satisfaite d'elle-même pour un angle trièdre.

Nous allons montrer que le théorème du parapluie s'étend aux angles polyèdres convexes ; il suffit pour le voir nettement de faire la *remarque suivante :*

Etant donnés (Fig. 32) deux demi-plans T_1 et T_2 comptés à partir de leurs intersections respectives OY et OZ avec un même

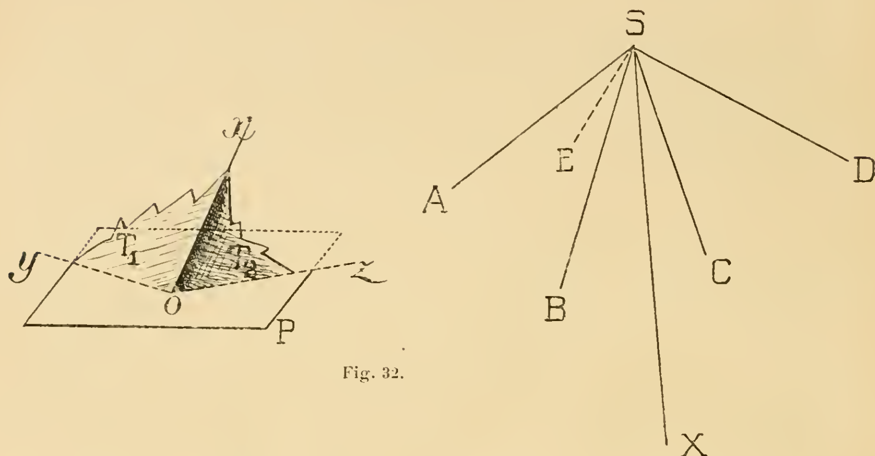


Fig. 32.

plan P, et tous deux comptés d'un même côté de P, les deux demi-plans auront toujours une demi-droite commune, située de ce même côté.

Considérons dès lors un angle polyèdre convexe et trois faces consécutives ; envisageons la face intermédiaire BSC, les prolongements des deux autres à partir des arêtes SB et SC se couperont en dehors des angles faces extrêmes suivant une demi-droite SX, si on remplace alors dans l'angle polyèdre les arêtes SB et SC par l'arête unique SX on forme un nouvel angle polyèdre convexe comme le premier mais ayant une arête de moins. En répétant cette réduction un assez grand nombre de fois on parviendra évidemment à un trièdre ; d'ailleurs par cette réduction, si le nombre des faces diminue, en revanche la somme de leurs *valeurs augmente.* Cela tient à ce que dans l'angle trièdre, dont les arêtes sont SB, SX, SC, la face BSC est moindre que la somme des faces BSX et XSC.

Ainsi par la réduction considérée, la somme des angles des faces augmente plus qu'elle ne diminue par la suppression d'une face. La somme des faces augmente donc jusqu'à l'obtention du

trièdre, or ainsi augmentée elle est moindre que quatre droits, à plus forte raison la somme des faces de l'angle polyèdre primitif était-elle donc plus petite que quatre droits.

CHAPITRE IV

Les cercles du plan et de la sphère. Analogies du plan et de la sphère.

I.

Définitions. Considérons (sans figure), les points N, R, M de l'espace qui sont à une *distance* donnée d'un même point O également donné, tous ces points en nombre infini forment ce que l'on appelle une *surface sphérique ;* le point O est le centre de la sphère, les divers segments OM, OR, ON... sont des *rayons* de la sphère.

Ligne d'intersection d'une surface sphérique et d'un plan. Considérons (fig. 33) une surface sphérique de centre O et un plan P; soit M un point appartenant à cette surface sphérique et au plan P; soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan P, joignons les points M et H par une droite, celle-ci sera perpendiculaire a HO; donnons à la droite MH envisagée comme une barre rigide liée à l'axe HO envisagé comme un pivot rigide, un mouvement de révolution autour de l'axe HO; dans ce mouvement le point M, nous l'avons vu, ne quitte pas le plan P, il ne quitte pas non plus la surface sphérique puisque pendant ce mouvement la distance OM ne varie pas : *il existe donc une ligne commune au plan P et à la surface sphérique* et cette ligne peut-être *définie dans le plan P l'ensemble des points de P dont chacun est à une distance fixe du point H*, cette ligne est appelée *circonférence de cercle.* H est son centre. Ainsi une surface sphérique et un plan P ont une ligne commune qui est une circonférence de cercle.

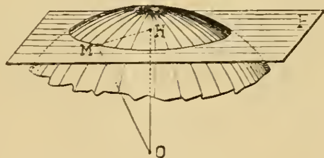


Fig. 33.

Il nous reste à établir que le plan P et la surface sphérique ne peuvent avoir d'autre point commun en dehors de la ligne précédente.

En effet soit (fi. 34) X un point commun à la surface de la sphère et au plan P déjà considérés ; soit toujours H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan P.

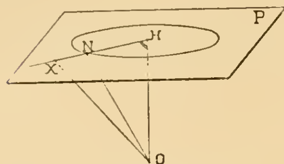


Fig. 34.

Parmi les différents points de la ligne que nous savons déjà commune au plan et à la surface sphérique, il y en aura certainement un, situé sur le segment HX ou sur son prolongement au delà de X ; il suffit en effet pour obtenir un pareil point N de porter sur la droite HX et *du même côté que* X un segment HN égal à la longueur HM de la figure précédente.

Or, si le point X différait de N, la droite joignant le point O au milieu de XN serait perpendiculaire à XN et devrait se confondre avec OH ; il y aurait donc contradiction, à moins que les points N et X ne se confondent.

Remarque. Si (fig. 33) les points H et M coïncidaient, le cercle d'intersection s'évanouirait sur le point H qui serait alors le seul point commun au plan et à la sphère.

II. — Remarques.

Cas d'égalité de 2 triangles rectangles. La manière dont nous venons d'utiliser ainsi les propriétés des perpendiculaires et des obliques mérite d'être retenue pour elle-même ; c'est ce que nous ferons par les deux théorèmes suivants qui nous donnent deux cas d'égalité propres aux triangles rectangles, et dans l'énoncé desquels on appelle *hypoténuse* le côté du triangle qui est opposé à l'angle droit de ce triangle.

1° *Deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal sont égaux.*

2° *Deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un angle autre que l'angle droit, égal, sont égaux.*

Le premier théorème se démontre en essayant (fig. 35) le

commencement de la superposition par l'angle droit égal et en juxtaposant les 2 sommets C et C′ où se croisent deux côtés égaux chacun à chacun ; on aura soin de rabattre les deux triangles d'un même côté par rapport au segment sur lequel sont déjà venus se confondre les côtés de l'angle droit; les hypoténuses devront alors coïncider en position, sans quoi on aurait des obliques égales s'écartant inégalement du pied de la perpendiculaire ce qui, nous venons de le voir, n'est pas possible.

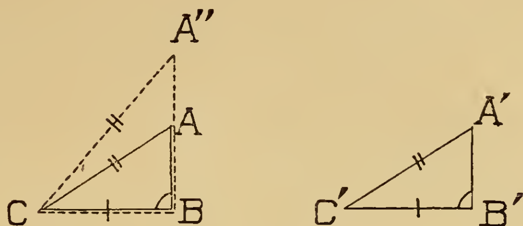


Fig. 35.

Le second théorème se démontre en essayant (fig. 36) le commencement de la superposition par l'hypoténuse égale et par l'angle non droit égal $\widehat{A} = \widehat{A'}$. L'angle B′ droit ne variant pas pendant le trajet, et son sommet étant venu en B″, la superposition commencée doit s'achever d'elle-même sans quoi on pourrait, d'un même point C, abaisser sur une même droite 2 perpendiculaires, CB et CB″.

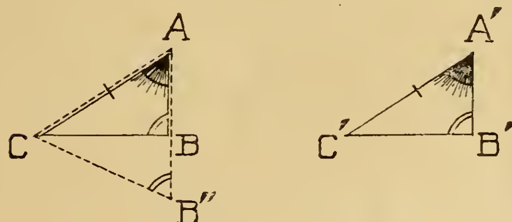


Fig. 36.

Autre remarque. Tout angle d'un triangle rectangle autre que l'angle droit donné est *aigu,* c'est-à-dire moindre qu'un angle droit.

En effet, article VIII, chapitre III, la perpendiculaire (fig. 37) CB sur AB tirée de C est plus courte que l'oblique CA tirée du même point C. Or nous avons vu que, si dans un triangle quelconque deux côtés sont inégaux les angles opposés sont inégaux et dans le même ordre de taille que ces côtés. De l'in-

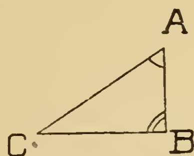


Fig. 37.

égalité CA > CB, nous tirons : angle B > Angle A ; et comme l'angle B est droit, l'angle A est bien aigu.

III. — Situations mutuelles des droites et des circonférences d'un même plan ; situations des plans et d'une sphère.

En raisonnant exactement comme pour la sphère on verra que *dans un même plan :*

1° Si une droite DD' (fig. 38) et une circonférence de centre O ont en commun un point M, distinct du pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite DD', elles auront encore en commun, un autre point M', mais nul autre point commun hors des deux précédents et de plus le point H sera le milieu du segment MM'.

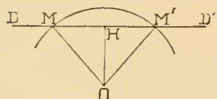


Fig. 38.

2° Si une droite DD' et une circonférence de centre O ont en commun un point H qui est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite, elles n'ont aucun autre point commun. On dit alors que la droite est tangente à la circonférence.

Remarque. — Désignons par d la distance du centre O à la droite DD' c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée sur la droite et soit R la longueur du rayon de la circonférence. Trois cas sont à distinguer, suivant qu'auront lieu l'une ou l'autre des circonstances suivantes, qui s'excluent mutuellement :

1° $d < R$. 2° $d = R$. 3° $d > R$.

On voit de suite que le cas $d > R$ empêche la droite et la circonférence de se couper ; que le cas de $d = R$ fait la droite et la circonférence mutuellement tangentes.

Il nous reste à établir que dans le cas de $d < R$ la droite et la circonférence se coupent toujours.

Rappelons-nous à cet effet que les longueurs a, b, c de trois côtés d'un triangle sont assujetties aux inégalités :

$a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$,

d'où on conclut aussi, si par exemple $a > b$, $c > a - b$.

Ainsi un côté d'un triangle est compris entre la somme et la différence de deux autres côtés ; soit alors (fig. 39) H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur DD'. Portons sur DD' et à partir de H une longueur HK égale à 2R et joignons O à K par une droite. Nous aurons OK > KH — HO, ou OK > R + (R — HO), donc OK est > R.

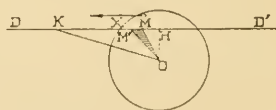


Fig. 39.

Imaginons alors un point M, mobile de H vers K d'une manière continue, soit M′ une position du point voyageur, voisine de la position M.

Le triangle OM′M nous donne $OM - MM' < OM' < OM + MM'$; si donc le chemin MM′ est pris suffisamment petit; la variation de la longueur OM sera aussi petite qu'on le voudra; en d'autres termes la longueur OM est *une fonction continue* de la longueur MH: or quand le point voyageur va de la position H à la position K, c'est-à-dire quand la longueur variable MH varie de zéro à HK la longueur variable OM a varié depuis la valeur OH moindre que R jusqu'à la valeur OK supérieure à R, d'ailleurs OM est allé toujours en augmentant, *donc la valeur variable de* OM *a* PASSÉ UNE ET UNE SEULE FOIS *par la valeur fixe* R, c'est-à-dire que le point voyageur a passé par une position X appartenant à la fois à la droite et à la circonférence.

Le principe que nous admettons ici est le suivant: Si une quantité y varie d'une *manière continue* en même temps qu'une quantité x dont la première dépend, et si, pour deux valeurs de x distinctes (savoir pour $x = a$ et pour $x = b$) y prend deux valeurs distinctes savoir c et d, il existera au moins une valeur de x comprise entre a et b pour laquelle la fonction y prendra une valeur m quelconque mais comprise entre c et d. La démonstration de ce principe appartient à l'enseignement de l'algèbre et nous ne la reproduirons pas ici.

Remarque. — Cette discussion peut être appliquée à la sphère; elle nous montre que tout plan dont la distance au centre de la sphère est moindre que le rayon de cette sphère coupera effectivement la sphère suivant une circonférence.

IV. — Situations mutuelles de deux circonférences d'un plan.

L'étude rigoureuse des situations mutuelles de deux circonférences deviendra très facile si nous nous reportons encore au principe de continuité, mais nous aurons quelques faits préliminaires à établir.

Premier fait préliminaire. Si (fig. 40), deux droites OA et OB sont obliques sur une même droite AB mais d'un même côté de la perpendiculaire OH tirée de O sur AB, la bissectrice OC de l'angle AOB partage le segment AB en deux portions inégales, la portion CB qui est la plus voisine du point H est la plus petite des deux portions. Le triangle ABO dont l'angle en B

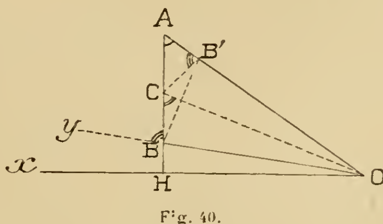


Fig. 40.

est obtus donne : $AO > OB$; portons *l'oblique la plus courte* OB sur la plus grande; joignons CB', le triangle CB'O est égal au triangle CBO, d'où on conclut que l'angle CBY = l'angle $\widehat{AB'C}$; or l'angle CBY est *extérieur* au triangle CBO et l'angle $\widehat{BCO}$ est intérieur; on a donc $\widehat{CBY} > \widehat{BCO} > \widehat{CAO}$; on a donc dans le triangle ACB' ; angle $\widehat{AB'C} >$ angle $\widehat{CAB'}$.

Donc, en considérant les côtés opposés à ces angles :

$AC > CB'$; et comme $CB' = CB$, on a bien :

$AC > CB$, comme nous voulions le démontrer.

Deuxième fait préliminaire. Considérons (fig. 41), une circonférence de centre O, et un angle au centre TOA, constituant l'angle d'un triangle rectangle ayant le rayon OA comme côté d'un angle droit dont le sommet est en A ; soit OT l'hypoténuse de ce triangle rectangle. Partageons l'angle TOA en n parties égales, la corde AP qui sous tend les arcs correspondants à ces angles au centre sera moindre que la $n^{ème}$ partie du côté AT.

Fig. 41.

En effet soit AQ la première des portions de AT détachées par ces angles, d'après le fait établi tout à l'heure on a :

$$AQ < QR < \ldots < RT, \text{ d'où } AQ < \frac{AT}{n}.$$

Or l'angle QPA étant obtus, et l'angle $\widehat{AQP}$ aigu, on aura $AP < AQ < \dfrac{AT}{n}$.

THÉORÈME. — Soit (fig. 42), M un point voyageur sur l'arc AB d'une circonférence de centre O, soit O' un autre point du plan. *La longueur* O'M *varie d'une manière continue quand le rayon* OM *tourne lui-même d'une manière continue autour de* O.

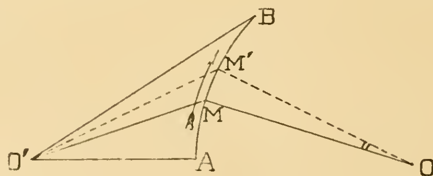


Fig. 42.

En effet, quand le rayon OM tourne d'un angle $\widehat{MOM'}$, moindre que $\dfrac{\widehat{TOA}}{n}$ de la figure 41, MM' sera moindre que $\dfrac{TA}{n}$, et comme $O'M - MM' < O'M' < O'M + MM'$, on voit qu'on a pu rendre $\widehat{M'OM}$ assez petit pour que la variation $O'M' - OM$ ou $OM - O'M'$ soit

aussi petite qu'on voudra. *La variation de la longueur* O'M *est donc bien continue.*

Première conséquence. Si (sans figure), un arc AB de circonférence réunit un point A intérieur à une autre circonférence C et un point B extérieur à cette même circonférence, l'arc considéré doit traverser la circonférence C en quelque point X.

La démonstration se fait d'elle-même en rapprochant le fait précédent du principe de continuité, car si O est le centre de la circonférence C de rayon R, la longueur OM varie depuis une quantité OA moindre que R jusqu'à une quantité OB supérieure à R, elle doit donc prendre *dans l'intervalle* la valeur R lorsque le point M est en un certain point X de l'arc AB, mais ce point X étant à distance R de O appartient évidemment à la circonférence C.

Théorème. — *Si deux circonférences* (fig. 43), *ont en commun un point* M *situé hors de la droite qui réunit leurs centres, elles ont encore en commun un point* M′ *tel que la droite* OO′ *passe par le milieu de* MM′ *et est perpendiculaire à* MM′.

La démonstration s'achève par un simple rabattement autour de OO′.

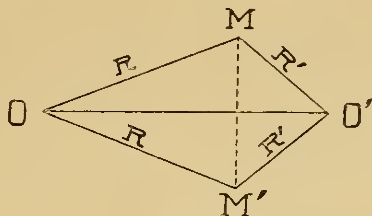


Fig. 43.

Remarque. — Si deux circonférences ont deux points communs M et M′, les deux centres de ces circonférences se trouvent sur la perpendiculaire élevée au milieu de MM′, de là il résulte évidemment que deux circonférences de centres distincts ne peuvent avoir plus de deux points communs et que lorsqu'elles ont un seul point commun, ce dernier point appartient à la droite qui joint les centres.

Criterium des situations mutuelles de deux circonférences. Par la remarque précédente on voit que si deux circonférences se coupent on doit pouvoir construire un triangle tel que OMO′ dans les figures précédentes; on conclut de là que, si d est la distance des centres et que si R est le plus grand des rayons R et e' on aura $R - R' < d < R + R'$.

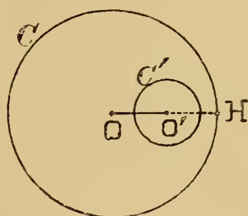


Fig 44.

Nous allons démontrer la *réciproque,* mais auparavant supposons que l'on ait : $d < R - R'$, ou $d = R - R' - e$.

Soit (fig. 44) H l'extrémité du rayon de C issu de O vers O′, un point de la circonférence C′ est alors intérieur à C, aucun autre point ne saurait alors

être extérieur, puisqu'alors, comme on l'a vu, les circonférences se couperaient et l'on devrait avoir $d > R - R'$.

On démontrerait de même que si $d > R + R'$ les circonférences ne se coupent point mais sont toutes deux extérieures l'une à l'autre.

Supposons maintenant : $R - R' < d < R + R'$: si $d > R - R'$ il y a des points de C' en dehors de C, si $d < R + R'$ il y a des points de C' en dedans de C, donc d'après un théorème déjà signalé C' et C se coupent.

V. — La notion d'orientation.

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent encore s'énoncer sous une forme plus claire en disant : Un point M (fig. 45), d'une figure solide *plane* est défini par ses deux distances r et r' à deux points particuliers A et B de la figure. En effet :

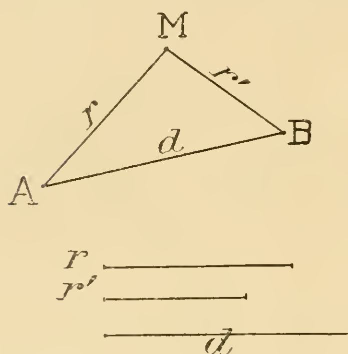


Fig. 45.

1° Quand le point M est fixé en position en même temps que les deux points A et B, il suffit de joindre M à A, M à B et de *mesurer* les distances r et r' ; celles-ci seront représentées soit par des fiches, soit par des nombres.

2° Quand les *fiches* r et r' sont données, ainsi que la fiche d de la distance AB, la figure est reconstructible au moyen d'une règle, d'un compas et d'une feuille *plane*.

Si l'on a à la fois $r - r' < d < r + r'$ la construction du point M sera possible, au moyen de l'intersection de deux cercles.

Il y a toutefois une réserve à faire ; le tracé du point M défini par les seules distances d, r, r', conduit en réalité à deux points M et M'. D'ailleurs les deux triangles AMB, et AM'B qui répondent à la question sont superposables, l'un peut être amené sur l'autre par une rotation d'un demi-tour autour de la charnière AB.

L'assemblage solide de trois points ne peut donc pas être défini dans l'espace d'une manière absolument complète par la connaissance de deux des points A et B et par celle du plan passant par A et B dans lequel la figure doit être donnée.

Passons à un assemblage solide plan de quatre points et demandons-nous si cet assemblage est complètement défini et en forme et en position par les connaissances des distances r et r' de M aux deux points de repère A et B, et par les distances s et s' de N aux deux mêmes points de repère.

Si les données précédentes étaient les seules, on aurait le choix entre les quatre assemblages suivants :

$$\left\{\begin{matrix}M\\N\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}M\\N'\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}M'\\N\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}M'\\N'\end{matrix}\right. \qquad \text{(fig. 46)},$$

l'ambiguïté serait donc accrue, puisque non seulement on pourrait hésiter entre quatre assemblages différant tout au moins par la position, mais encore, les divers assemblages ne seraient pas tous superposables. Si le nombre des points augmentait, l'embarras pour reconstruire la figure serait encore accru.

Fig. 46.

Cet exemple montre nettement que les longueurs des distances des divers points de la figure à deux d'entre eux constituent des données insuffisantes si l'on n'a pas soin d'y ajouter des renseignements *purement qualitatifs* de situations relatives.

Par exemple nous ajouterons aux renseignements des fiches, et pour chaque point nouveau N, un *renseignement de situation* qui sera de l'une ou l'autre espèce suivante :

1° ou bien M et N sont d'un même côté de AB ;

2° ou bien M et N sont de part et d'autre de AB ;

— nous nommerons ces renseignements des renseignements *d'orientation ;* — avec ces renseignements ajoutés à la connaissance des distances, l'assemblage solide plan devient complètement défini, et on n'a plus à hésiter qu'entre deux situations ; on passe d'ailleurs de l'une de ces situations à l'autre par un demi-tour exécuté autour de AB.

Enfin, on pourra même faire cesser toute hésitation entre les deux situations du même solide en se préoccupant des trois dimensions du solide.

Nous pourrons par exemple, dans un solide déterminé, associer à tout plan une poupée invariablement liée au solide, nous pourrons par exemple placer la poupée en A (fig. 47), perpendiculairement au plan considéré du solide, visant le point B de ce plan ; la situation du point M sera alors complètement définie ; si une fois données les distances MA, MB, on ajoute de quel côté (gauche, ou droite) le point M se trouve par rapport à la poupée.

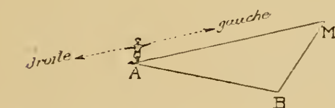


Fig. 47.

Nous allons retrouver ces notions sur la sphère.

VI. — Les cercles de la sphère.

Grands cercles et petits cercles. Analogies des triangles sphériques et des triangles plans.

Toute section plane de la sphère est un cercle, nous l'avons vu, dont le centre est la projection du centre de la sphère sur le plan de la section ; si ce plan passe déjà par le centre de la sphère la ligne d'intersection des deux surfaces sera une circonférence du plus grand rayon possible, c'est une circonférence de grand cercle.

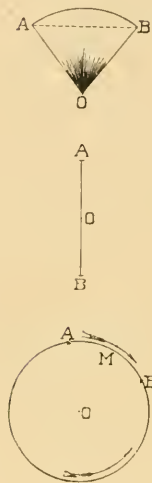
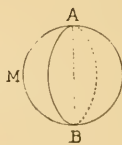


Fig. 48.

Par deux points, A et B (fig. 48), donnés sur la surface sphérique passe toujours un grand cercle, et un seul lorsque du moins les points A et B ne sont pas aux extrémités de deux rayons égaux et directement contraires ; en effet, hormis ce cas d'exception, les droites OA, OB déterminent un plan et un seul, et ce plan va couper la surface sphérique en une circonférence et une seule.

Par contre si la circonférence est unique, *l'arc* qui réunit les deux points n'est pas complètement déterminé, on peut hésiter entre deux arcs AMB et APB.

Nous considérons plus particulièrement l'arc *réduit* c'est-à-dire celui des deux arcs qui est moindre qu'une demi-circonférence ; cet arc est l'image sphérique de l'angle pointu déterminé par les deux rayons dans la trame triangulaire formée par les 3 points O, A, B.



Deux arcs de grand cercle issus d'un point A vont se réunir en un autre point B nommé l'*antipode* du premier (fig. 49).



Fig. 49.

Il y a plus : deux grands cercles étant donnés se coupent toujours (fig. 49), en un point X ; en effet les plans des deux grands cercles sont deux plans distincts qui ont déjà en commun le centre O de la sphère, ces deux plans auront

donc une droite commune, or, un point X, situé sur cette droite commune, à une distance de O égale au rayon, est un point de la surface sphérique, commun aux deux arcs.

Les arcs de grand cercle sur une surface sphérique ont évidemment une grande analogie avec les droites du plan, mais la propriété précédente va être un élément de simplification de la géométrie de la sphère. Nous allons poursuivre l'exposé des analogies.

Les deux régions de la surface sphérique par rapport à un grand cercle, sont les analogues des deux régions d'un plan par rapport à une droite ; si (fig. 50), deux points A et B sont, par rapport à un grand cercle de la sphère, dans une même région (1), l'arc de grand cercle *moindre qu'une demi-circonférence* qui les réunit ne traverse pas la circonférence de grand cercle donnée ; au contraire deux points C, D, appartenant à deux régions opposées (1) et (2) par rapport à la circonférence complète considérée étant réunis par un arc moindre qu'une demi-circonférence, cet arc réduit *coupera* cette demi-circonférence ; ces faits peuvent d'ailleurs s'interprèter comme traduisant, par images sphériques, les faits correspondants qui se rattachent à la distinction des deux régions de l'espace par rapport à un plan.

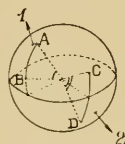


Fig. 50.

Cette notion conduit sans peine (fig. 51), à la trame triangulaire sphérique ; si celle-ci est bordée par deux *côtés* réduits, en vertu des propriétés de l'angle trièdre, le troisième sera aussi réduit et deux points quelconques de l'intérieur du triangle seront aussi à distance réduite sur un arc de grand cercle situé à l'intérieur du triangle.

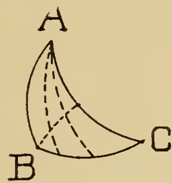


Fig. 51.

Nous nommerons triangle spérique *propre* un pareil triangle ; c'est l'image d'un trièdre dont le sommet est au centre de la spère.

Nous avons ici un renseignement immédiat sur ces triangles, ceux-ci en effet étant l'image d'un trièdre, nous voyons que dans un triangle propre un côté est plus petit que la somme des deux autres.

On remarquera que les longueurs d'arcs de cercle de rayons égaux sont comparables entre elles au même titre que des longueurs de droites ou des étendues angulaires.

Angles d'un triangle spérique. La génération (fig. 52), d'un *fuseau spérique* sphérique par une rotation convenable continue d'une demi-circonférence tournant autour d'un diamètre est absolument analogue à la rotation du plan autour d'une perpendiculaire au plan; elle permet de définir les angles sphériques par une trame de grands cercles; l'angle sphérique peut d'ailleurs être mesuré par l'angle des tangentes rectilignes à ses deux côtés qui sont tirées du sommet A; cet angle est encore un angle rectiligne du dièdre formé par les demi-plans dont les arcs de cercle sont les images sphériques.

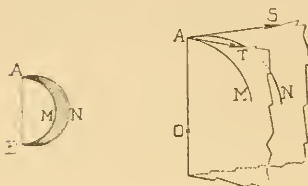


Fig. 52.

J. ANDRADE (Besançon).

(*A suivre.*)

SUR L'ÉQUIVALENCE DES ÉQUATIONS

LEMME. — La somme des n fractions $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ étant représentée par la fraction

$$\frac{a_1 b_2 b_3 \ldots b_n + a_2 b_1 b_3 \ldots b_n + \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}, \qquad (1)$$

pour que cette dernière fraction soit irréductible, il faut et il suffit que les n fractions données le soient aussi et que leurs dénominateurs soient premiers entre eux deux à deux.

DÉMONSTRATION. 1° *La condition est nécessaire.* En effet, si deux des dénominateurs *au moins*, b_1 et b_2 par exemple, ou si le numérateur et le dénominateur de l'une des fractions,

a_1 et b_1 par exemple, admettaient un facteur premier commun, ce facteur diviserait le numérateur et le dénominateur de la fraction (1) : en sorte que cette fraction ne serait pas irréductible.

2° *La condition est suffisante.* En effet, si le numérateur et le dénominateur de la fraction (1) admettaient un facteur premier commun : ce facteur, divisant le produit $(b_1 b_2 b_3 \ldots b_n)$, diviserait l'un de ses termes, b_1 par exemple ; ce facteur, divisant aussi la somme :

$$(a_1 b_2 b_3 \ldots b_n + a_2 b_1 b_3 \ldots b_n + \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1})$$

et divisant les $(n-1)$ dernières parties de cette somme, diviserait la première partie $(a_1 b_2 b_3 \ldots b_n)$ et par suite diviserait a_1 puisque b_1 est premier avec $b_2, b_3, \ldots b_n$, donc premier avec le produit $(b_2 b_3 \ldots b_n)$: en sorte que la fraction $\frac{a_1}{b_1}$ ne serait pas irréductible.

Observation. Ce lemme est applicable tant aux fractions algébriques rationnelles qu'aux fractions numériques. Nous entendons par *facteur premier commun* à des polynomes entiers en x, un binome de la forme $k(x - a)$ divisant chacun d'eux, le nombre k n'étant ni nul ni infini, a étant un nombre fini et déterminé, positif, nul ou négatif; nous entendons par *polynomes premier entre eux*, des polynomes n'admettant pas de facteur premier commun.

Théorème. — *Lorsqu'une équation est formée de fractions rationnelles et de termes entiers en* x : *l'équation obtenue, en multipliant ses deux membres par le plus petit commun multiple des dénominateurs est équivalente à la proposée.*

Démonstration. — Premier cas : *toutes les fractions sont irréductibles et leurs dénominateurs sont premiers entre eux deux à deux.*

La fraction qui représente la somme des fractions de l'équation proposée, le dénominateur commun choisi étant le plus petit commun multiple des dénominateurs, est aussi irréductible et l'équation affecte la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} + F(x) = 0 \qquad (1)$$

Si nous multiplions par $\varphi(x)$, nous obtenons l'équation entière

$$f(x) + F(x) \cdot \varphi(x) = 0 . \qquad (2)$$

Nous allons prouver que les équations (1) et (2) sont équivalentes :

1° *Toute solution $x = a$ de l'équation* (1) *est une solution de l'équation* (2). En effet, $x = a$ étant une solution de l'équation (1), transforme cette équation en l'identité

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} + F(a) \equiv 0 . \qquad (1')$$

La fonction $F(x)$ étant entière en x, $F(a)$ est fini et déterminé ; il en est donc de même de $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ et par suite $\varphi(a)$, qui est fini et déterminé, est aussi différent de zéro. En multipliant par $\varphi(a)$ tous les termes de l'égalité (1'), nous obtenons :

$$f(a) + F(a) \cdot \varphi(a) \equiv 0 . \qquad (2')$$

et cette identité prouve que $x = a$ est une solution de l'équation (2).

2° *Toute solution $x = \alpha$ de l'équation* (2) *est une solution de l'équation* (1). En effet, $x = \alpha$ étant une solution de l'équation (2), transforme cette équation en l'identité

$$f(\alpha) + F(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) \equiv 0 . \qquad (2'')$$

Mais $\varphi(\alpha)$, fini et déterminé, est aussi différent de zéro : car si $\varphi(\alpha)$ était nul, $f(\alpha)$ le serait également à cause de l'identité (2'') ; les polynomes $\varphi(x)$ et $f(x)$ seraient divisibles par $(x - \alpha)$ et la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ne serait pas irréductible .

En divisant par $\varphi(\alpha)$ tous les termes de l'égalité (2''), nous obtenons

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} + F(\alpha) \equiv 0 . \qquad (1'')$$

et cette identité prouve que $x = \alpha$ est une solution de l'équation (1).

Deuxième cas : *certaines fractions (une au moins) ou toutes*

les fractions sont réductibles et leurs dénominateurs sont premiers entre eux deux à deux.

Les valeurs de x qui annulent les deux termes de l'une ou l'autre des fractions réductibles, sont racines de l'équation proposée ; car, pour ces valeurs, l'équation se transforme en l'identité[1] :

$$\frac{0}{0} + A \equiv 0 ,$$

A étant un nombre fini et déterminé, nul ou non. Après avoir supprimé les facteurs communs aux deux termes de chaque fraction réductible, facteurs dont les racines représentent des solutions de l'équation, nous retombons sur le premier cas : il en résulte que, en multipliant les deux membres de l'équation considérée par le plus petit commun multiple des dénominateurs, l'équation transformée est équivalente à la proposée.

Observation. Il est possible de déterminer le nombre des racines égales de la façon suivante : si le numérateur de l'une des fractions réductibles est divisible par $(x - a)^p$ et son dénominateur par $(x - a)^q$, cette fraction prend la forme $\frac{(x - a)^p \cdot f_1(x)}{(x - a)^q \cdot \varphi_1(x)}$; si nous représentons par $(x - a)^r \cdot F_1(x)$ l'ensemble de tous les autres termes, entiers ou fractionnaires, r pouvant être nul et chacune des fonctions $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $F_1(x)$ n'étant plus divisible par $(x - a)$, l'équation devient

$$\frac{(x - a)^p \cdot f_1(x)}{(x - a)^q \cdot \varphi_1(x)} + (x - a)^r \cdot F_1(x) = 0$$

et possède autant de racines a que son équivalente

$$(x - a)^p \cdot \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} + (x - a)^{q+r} \cdot F_1(x) = 0 .$$

[1] Le nombre *indéterminé* $\frac{0}{0}$ représente tous les nombres et, parmi eux, se trouve le nombre $- A$; donc parmi toutes les valeurs que prend $\frac{0}{0} + A$, se trouve la valeur $- A + A \equiv 0$. Par exemple, si nous considérons la fonction $y = \frac{3(x - 2)}{x - 2} + x + 1$: pour $x \neq 2$, elle devient $y = 3 + x + 1$ ou $y = x + 4$ et s'annule pour $x = - 4$; pour $x = 2$, elle devient $y = \frac{0}{0} + 3$ et parmi ces valeurs indéterminées de y, se trouve le nombre *nul* 0. L'équation $\frac{3(x - 2)}{x - 2} + x + 1 = 0$ a par suite pour racines $x = - 4$ et $x = 2$.

Par conséquent, si $p \leqslant q + r$, cette équation admet p racines égales à a ; si $p > q + r$, cette équation admet $(q + r)$ racines égales à a.

Troisième cas : *les dénominateurs des fractions, irréductibles ou non, ne sont pas premiers entre eux deux à deux.*

Additionnons[1] toutes les fractions en prenant pour dénominateur commun, le plus petit commun multiple des dénominateurs ; l'équation prend la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} + F(x) = 0 \cdot$$

Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont des racines communes, racines qui sont les solutions de l'équation obtenue en égalant à zéro leur plus grand commun diviseur, celles-ci sont des solutions de l'équation et nous rentrons dans le deuxième cas considéré ; si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont premières entre elles, nous retombons sur le premier cas.

Représentation graphique. La fonction

$$y = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x - a)^p \cdot f_1(x)}{(x - a)^p \cdot F_1(x)} \cdot$$

$f_1(x)$ et $F_1(x)$ n'admettant plus de diviseur commun $(x - a)$ prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = a$; parmi tous les nombres que représente $\frac{0}{0}$, les mathématiciens n'ont considéré que celui auquel ils ont donné le nom de *vraie valeur*[2] et qui, géométriquement, représente l'ordonnée du point d'intersection des lignes dont les équations sont

$$(x - a)^p = 0 \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$$

c'est-à-dire l'ordonnée $\frac{f_1(a)}{F_1(a)}$ du point d'intersection de p droites

[1] Nous pourrions aussi grouper les fractions, puis additionner celles constituant chaque groupe (en prenant pour dénominateur commun, le plus petit commun multiple des dénominateurs), de telle sorte que les dénominateurs de tous les groupes ainsi formés soient premiers entre eux deux à deux : nous retomberions sur le premier cas considéré si toutes les fractions résultantes étaient irréductibles, et sur le deuxième si certaines de ces fractions (une au moins) ou toutes étaient réductibles.

[2] Ce nom de *vraie valeur* sonne faux ! Cette vraie valeur n'est autre que la *limite* de la fonction y, la variable x tendant vers a.

confondues, parallèles à l'axe des y découpant le segment a sur l'axe des x, et de la ligne y_1.

La représentation graphique de y montre que cette fonction est réellement indéterminée pour $x = a$ et par conséquent que, parmi les valeurs correspondantes de y variant de $-\infty$ à $+\infty$, se trouvent non seulement la vraie valeur $\frac{f_1(a)}{F_1(a)}$, mais aussi la valeur 0.

Dans la résolution d'une équation, les facteurs communs entrant dans la composition des deux termes d'une fraction, ne peuvent être supprimés que si nous *convenons* de ne regarder comme solutions de l'équation, non pas les racines qui rendent la fonction identiquement nulle, *mais celles pour lesquelles cette fonction ne peut avoir d'autre valeur que zéro.* Suivant les conditions du problème que nous nous proposons de résoudre ou du théorème que nous voulons démontrer, telle ou telle autre valeur du nombre $\frac{0}{0}$ sera à prendre : dans la détermination du coefficient angulaire de la tangente en un point d'une courbe, par exemple, nous en prendrons la limite ; peut-être, dans une des théories que réserve l'avenir, devrons-nous en prendre une autre valeur ; mais dans la résolution *brute* des équations, le nombre $\frac{0}{0}$ *ne satisfaisant à aucune condition,* est réellement indéterminé.

Exemple 1. Les nombres a, b, c étant finis et déterminés, résoudre l'équation

$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} + 3 = 0 \cdot \qquad (1)$$

en supposant : A) a, b et c distincts ; B) $a \neq b$ et $b = c$; C) $a = b = c \neq 0$; D) $a = b = c = 0$.

Solution. A) *a, b et c sont distincts.* L'équation proposée est équivalente à la suivante :

$$(x+a)(x-b)(x-c) + (x-a)(x+b)(x-c) +$$
$$(x-a)(x-b)(x+c) + 3(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

ou

$$3x^3 - 2(a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x = 0 \ .$$

Cette équation se décompose en deux autres :

$$x_1 = 0 .$$

et

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$$

d'où

$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = \frac{a + b + c \pm \sqrt{a^2 - a(b + c) + b^2 - bc + c^2}}{3} .$$

B) $a \neq b$ et $b = c$. L'équation proposée devient

$$\frac{x + a}{x - a} + 2 \cdot \frac{x + b}{x - b} + 3 = 0. \qquad (2)$$

et est équivalente à la suivante:

$$(x + a)(x - b) + 2(x - a)(x + b) + 3(x - a)(x - b) = 0 .$$

ou

$$3x^2 - (2a + b)x = 0 .$$

Cette équation a pour solutions :

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{2a + b}{3} .$$

Observons qu'en faisant $c = b$ dans les solutions x_2 et x_3 de l'équation (1), résolue dans l'hypothèse A, nous obtenons:

$$x_2 = \frac{2a + b}{3} \quad \text{et} \quad x_3 = b .$$

La solution $x_3 = b$ est une solution étrangère à l'équation (2): en effet, le plus petit commun multiple des dénominateurs de l'équation (1) est $(x - a)(x - b)(x - c)$, expression qui devient $(x - a)(x - b)^2$ si $c = b$, tandis que le plus petit commun multiple des dénominateurs de l'équation (2) est $(x - a)(x - b)$.

C) $a = b = c \neq 0$. L'équation proposée devient

$$\frac{x + a}{x - a} + 1 = 0 . \qquad (3)$$

et est équivalente à la suivante:

$$x + a + x - a = 0\ ,$$

d'où

$$x_1 = 0\ .$$

Observons qu'en faisant $a = b = c$ dans les solutions x_2 et x_3 de l'équation (1), résolue dans l'hypothèse A, nous obtenons:

$$x_2 = a \quad \text{et} \quad x_3 = a\ .$$

Ces deux solutions sont étrangères à l'équation (3); en effet, le plus petit commun multiple des dénominateurs de l'équation (1) est $(x - a)(x - b)(x - c)$, expression qui devient $(x - a)^3$ si $a = b = c$, tandis que le dénominateur de la fraction qui intervient dans l'équation (3) est simplement $(x - a)$.

D) $a = b = c = 0$. L'équation proposée devient

$$\frac{x}{x} + 1 = 0\ . \tag{4}$$

et est équivalente à la suivante:

$$x + x = 0$$

d'où

$$x_1 = 0\ .$$

Observons qu'en faisant $a = b = c = 0$ dans les solutions x_2 et x_3 de l'équation (1), résolue dans l'hypothèse A, nous obtenons:

$$x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = 0\ .$$

Ces deux solutions sont étrangères à l'équation (4): en effet, le plus petit commun multiple des dénominateurs de l'équation (1) est $(x - a)(x - b)(x - c)$, expression qui devient x^3 si $a = b = c = 0$, tandis que le dénominateur de la fraction qui intervient dans l'équation (4) est simplement x.

Exemple 2. Résoudre l'équation.

$$\frac{1 + x^3}{(1 + x)^2} + \frac{1 - x^3}{(1 - x)^2} = 4\ .$$

Solution. Divisons les deux termes de la première fraction par $(1 + x)$ et les deux termes de la seconde par $(1 - x)$; l'équation proposée se décompose en trois autres:

$$1 + x = 0 \quad \text{d'où} \quad x_1 = -1\ ;$$
$$1 - x = 0 \quad \text{d'où} \quad x_2 = 1\ ;$$
$$\frac{1 - x + x^2}{1 + x} + \frac{1 + x + x^2}{1 - x} = 4 \qquad \text{d'où} \qquad 0x^3 + 8x^2 - 2 = 0\,.$$

Cette dernière équation a pour racines:

$$x_3 = \infty\ ; \qquad x_4 = \frac{1}{2}\ ; \qquad x_5 = -\frac{1}{2}\,.$$

EXEMPLE 3. Résoudre l'équation

$$\frac{7}{3(x - 3)(2x + 1)} - \frac{2}{(2x + 1)(x - 1)} - \frac{2}{3(x - 1)(x - 3)} = 1\,.$$

Solution. L'équation proposée est équivalente à la suivante:

$$\frac{7(x - 1) - 6(x - 3) - 2(2x + 1)}{3(x - 3)(2x + 1)(x - 1)} = 1$$

ou

$$\frac{x - 3}{(x - 3)(2x + 1)(x - 1)} = -1\,.$$

Divisons les deux termes de la fraction par $(x - 3)$; l'équation se décompose en deux autres :

$$x - 3 = 0 \quad \text{d'où} \quad x_1 = 3\,,$$

et

$$\frac{1}{(2x + 1)(x - 1)} = -1 \quad \text{d'où} \quad 1 = -2x^2 + x + 1\,.$$
$$x(2x - 1) = 0$$

en sorte que

$$x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{1}{2}\,.$$

EXEMPLE 4. Les nombres α et x' étant finis et déterminés, résoudre l'équation

$$\frac{x^2 - x'^2 - 3(x - x')}{x - x'} = \frac{\alpha}{\alpha} \cdot (2x' + \alpha - 3)\,,$$

en supposant A) α *constant*, puis successivement : 1°) α différent de zéro ; 2° α égal à zéro ; B) α *variable* et ayant a pour

limite, puis successivement : 1° a différent de zéro ; 2° a égal à zéro.

Solution. Quelle que soit la valeur de α, l'équation proposée admet la solution $x_1 = x'$. L'autre solution est donnée par l'équation suivante, obtenue en divisant les deux termes de la fraction du premier membre par $(x - x')$:

$$x + x' - 3 = \frac{\alpha}{\alpha} \cdot (2x' + \alpha - 3) \qquad (1)$$

A) *α est constant :*

1° $\alpha \neq 0$. L'équation (1) est équivalente à l'équation :

$$x + x' - 3 = 2x' + \alpha - 3$$

d'où

$$x_2 = x' + \alpha.$$

2° $\alpha = 0$. De l'équation (1), nous déduisons

$$x_2 = \frac{0}{0} \cdot (2x' - 3) - x' + 3.$$

La racine x_2 est, par suite, indéterminée.

B) *α est variable et* a *est sa limite :*

1° $a \neq 0$. L'équation (1) est équivalente à l'équation :

$$\text{Limite } x + x' - 3 = 2x' + a - 3$$

d'où

$$\text{Limite } x \quad \text{ou} \quad x_2 = x' + a.$$

2° $a = 0$. L'équation (1) est équivalente à la suivante:

$$\text{Limite } x + x' - 3 = 2x' - 3$$

d'où

$$\text{Limite } x \quad \text{ou} \quad x_2 = x'.$$

E. Barbette (Liège).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur la nature des axiomes de la géométrie.

A propos des récents articles de M. Richard.

I. Lettre de M. Combebiac.

I. — Les récents articles de M. Richard sur la nature des axiomes de la Géométrie (*L'Ens. math.* IX[e] année, p. 463-473, X[e] année, p. 60-65) m'inspirent quelques réflexions, que je soumets à ceux qui s'efforcent, nouveaux Saint-Augustin, de pénétrer le mystère de la droite idéale.

Tout d'abord, les difficultés que soulèvent les représentations numériques ne s'appliquent pas plus aux lignes droites qu'aux autres notions physiques susceptibles de telles représentations et, s'il y a là matière à préoccupations subtiles, la constatation que la ligne droite n'y échappe pas ne fait que confirmer son classement parmi ces notions physiques. Mais je n'insiste pas sur ce point [1] parce qu'il ne me paraît pas intéresser le fond du débat, si du moins je comprends bien la pensée des géomètres idéalistes.

Pourquoi tient-on, en effet, aux notions géométriques idéales ? Simplement, semble-t-il, parce qu'on les croit indispensables à la Géométrie rationnelle. *Or il n'en est rien* [2]. Celle-ci, sous sa forme actuelle, met bien en jeu, il est vrai, les lignes droites, par exemple, mais ses raisonnements s'appliquent, en réalité, à des lignes de forme quelconque pourvu qu'elles constituent un ensemble possédant les propriétés attribuées à l'ensemble des lignes droites, et c'est là l'essentiel, puisque ces raisonnements s'appliquent alors approximativement aux objets qui jouissent approximativement des dites propriétés. Le besoin de la droite idéale n'existe donc pas — pas plus d'ailleurs que la notion elle-même (rien n'est déconcertant comme une notion qui n'existe pas).

Quant à une prétendue différence de nature entre la Géométrie et la Physique, elle repose sur une confusion entre la Géométrie

---

[1] Cf. F. Klein, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, Leipzig 1902 ; voir notamment les paragraphes ayant pour titres : Empirische und abstrakte Genauigkeit ; Präcisions- und Approximationsmathematik ; die abstrakte und die empirische Festlegung, einer Funktion ; von der Genauigkeit der Naturgesetze ; Ungenauigkeit aller praktischen Messungen ; etc.

[2] Qu'on imagine une théorie des fonctions se développant entièrement sur un cas physique. Cela n'a rien d'absurde en soi mais serait dépourvu d'intérêt et choquerait par sa dysharmonie due à ce que la portée du raisonnement dépasserait les notions mises en jeu ; on aurait pourtant là un modèle de la Géométrie actuelle. *On n'a pas plus besoin de la notion de droite pour établir la doctrine géométrique que l'on n'a besoin d'une fonction déterminée pour établir la héorie des fonctions.*

rationnelle et la Géométrie physique. La première (si tant est que l'on doive donner le nom de Géométrie à la théorie des continus) *doit ignorer aussi bien la droite idéale que la droite physique* (j'y insiste) et il est clair, dès lors, que ses concepts, qui sont, non pas idéaux, mais purement rationnels[3], ce qui n'est pas la même chose, ne peuvent être mis en parallèle avec les notions de la Physique. Mais qu'est-ce qui nous empêche de concevoir, pour un avenir plus ou moins éloigné, l'édification d'une *Physique rationnelle* (si l'on peut s'exprimer ainsi)? Le parallélisme serait alors complet, et la conclusion, c'est que la Géométrie (physique) est la seule des sciences naturelles qui soit, pour le moment, parvenue au stade rationnel. Mais ce n'est pas une raison pour que ses concepts (j'entends les concepts[1] proprement géométriques, et non les concepts d'ensemble, d'ordre, de métrique, etc.) ne soient pas uniquement empiriques.

Le principe de raison suffisante par lequel M. Richard justifie la rectilinéarité des rayons lumineux dans le vide n'est autre que le principe de l'isotropie et de l'homogénité du vide, c'est-à-dire l'expression d'un fait expérimental. Ce sont également des faits expérimentaux qui, en Statique, en Dynamique et dans les divers domaines de la Physique, nous fournissent la notion de ligne droite (ne fût-ce qu'à titre de limite) et nous fournissent *la même.* Il n'y a dans tout cela rien de rationnellement nécessaire, mais seulement des faits, qui sont sans doute reliés entre eux par des causes générales, que l'on découvrira peut-être, l'unité du mécanisme naturel se manifestant davantage de jour en jour.

Il resterait peut-être un phénomène à expliquer — et je ne m'en charge pas — c'est celui par lequel une notion d'origine manifestement matérielle se transforme en notion idéale selon la révélation kantienne ; c'est d'ailleurs le phénomène en lequel se résume la genèse de tous les concepts métaphysiques (si souvent contradictoires en soi); c'est, en définitive, le *processus métaphysique.*

II. — M. Richard, à la fin de son article (p. 64), développe des considérations tendant à établir, si j'ai bien compris, que le postulatum d'Euclide appartient au domaine métrique et non au domaine projectif. C'est, je crois, une erreur. Elle tient à ce qu'on néglige le fait qu'il n'existe pas de transformation projective (c'est-à-dire conservant les lignes droites) faisant correspondre l'espace entier à un volume borné. C'est pour cela qu'une métrique projective ne peut pas être à la fois archimédienne et hyperbolique, comme je l'ai indiqué dans un article récent publié dans cette revue (p. 183).

G. Combebiac (Bourges).

---

[1] Les concepts qui sont à la base de l'Analyse mathématique (nombre entier, ensemble, inclusion, correspondance) ne sont pas des concepts idéaux; ils suffisent d'ailleurs pour établir la Géométrie rationnelle.

2. Réponse de M. J. Richard.

Entre les assertions de M. Combebiac et les miennes la contradiction n'est souvent qu'apparente.

Ainsi, selon M. Combebiac, il n'est pas besoin de notion de droite pour faire de la Géométrie. Les propriétés de la ligne droite s'appliquent à des lignes de forme quelconque.

C'est ce que j'ai dit moi-même en montrant que les axiomes ne sont pas des définitions au sens ordinaire du mot.

Il peut y avoir, dit M. Combebiac, une physique rationnelle. C'est précisément ce que j'ai dit dans mon article.

Le postulatum d'Euclide appartient au domaine métrique. Voici ce que je veux dire par là. Le groupe des transformations ponctuelles changeant les droites en droites, contient des sous-groupes. J'appelle groupe métrique un de ces sous-groupes ayant six paramètres et possédant un invariant. Parmi ces sous-groupes il y a des groupes euclidiens, des groupes non-euclidiens. Le postulatum exprime une propriété d'un de ces groupes, et non une propriété du groupe linéaire général.

L'isotropie du vide n'est pas un fait expérimental. Comment vérifier cette propriété pour les espaces interplanétaires ? La propagation de la lumière en ligne droite n'est pas bien démontrée par l'expérience ; il en est de même des lois de la reflexion et de la réfraction. Toutes ces lois sont des conséquences de la théorie ondulatoire de la lumière. Elles font partie de la physique rationnelle dont parle M. Combebiac.

Je termine par deux observations générales :

I°. — On peut envisager la Géométrie en elle-même, ou dans ses applications à l'étude du monde extérieur. Pour étudier la Géométrie en elle-même il suffit de remarquer que les axiomes forment un système exempt de contradictions. (M. Hilbert l'a démontré.) Il n'est pas nécessaire d'avoir une idée quelconque de ligne droite ou de point, ni même l'idée d'espace.

C'est là une sorte de Géométrie bien abstraite. Dans la pratique, on a toujours une représentation sensible sur le papier, mais la Géométrie ainsi comprise est indépendante de cette représentation. Du reste, comme le dit M. Combebiac, les droites peuvent être des lignes de forme quelconque. Le mot *droite*, le mot *distance* et même le mot *point* ont dans cette géométrie un sens hypothétique, non un sens catégorique.

Il en est tout autrement pour les applications. Les mots doivent avoir un sens catégorique. Les axiomes sont vrais ou faux ; celà ne dépend plus de ce qu'on nomme point, ou droite, ou distance. Or c'est sur cette Géométrie appliquée seulement que porte ma discussion. Elle serait inutile à la Géométrie abstraite.

II. — Les mots du langage philosophique ont souvent un sens

bien flou, et celà est très gênant. Cette phrase : « Les axiomes viennent de l'expérience » n'a pas un sens net, il me serait facile de le montrer, mais celà m'entrainerait trop loin. C'est une raison, et il y en a bien d'autres, pour être très modéré dans les discussions philosophiques et pour ne pas avoir peur de changer d'avis. Il faudrait trouver un moyen d'exprimer sa pensée d'une façon bien nette, sans ambiguïté. Je ne désespère pas d'y arriver, mais je n'y suis pas encore complètement parvenu en ce qui concerne la question des axiomes.

J. Richard (Dijon).

3. Réplique de M. Combebiac.

Ainsi que le fait remarquer M. Richard, il est fort difficile de s'entendre sur certaines questions parce que les mots n'ont que la signification que chacun leur donne. Je crois toutefois pouvoir constater notre accord sur les deux points essentiels, savoir : 1° les mêmes lignes ne peuvent pas servir d'axes à une métrique hyperbolique et à une métrique parabolique ; 2° les difficultés incontestablement fort délicates que soulève la question des relations de la Géométrie et de l'expérience sont du même ordre que celles que l'on rencontre pour les diverses branches de la physique, de sorte que l'on se trouve ramené à la grosse question du réalisme *scientifique* et non plus *géométrique*.

Sur les sommes de sinus et de cosinus dont les arguments sont en progression arithmétique.

Ces sommes donnent lieu à d'intéressants exercices de transformations dans les applications de la formule de Moivre. En raison du rôle qu'elles jouent dans les Mathématiques supérieures, leur sommation mérite d'être examinée, à titre d'exercice déjà dans les éléments.

Posons

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\alpha + k\beta) , \qquad B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\alpha + k\beta)$$

et formons la somme

$$A + Bi = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \cos(\alpha + k\beta) + i \sin(\alpha + k\beta) \right\} .$$

Cette expression peut se transformer successivement comme suit :

$$A + Bi = (\cos\alpha + i \sin\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \cos k\beta + i \sin k\beta \right\}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}(\cos\beta + i\sin\beta)^k$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{1-(\cos\beta + i\sin\beta)^n}{1-(\cos\beta + i\sin\beta)}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{1-(\cos n\beta + i\sin n\beta)}{1-(\cos\beta + i\sin\beta)}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{2\sin^2\frac{n\beta}{2} - 2i\sin\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\beta}{2} - 2i\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{\sin\frac{n\beta}{2} - i\cos\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2} - i\cos\frac{\beta}{2}}\,\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

ou

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{\cos\frac{n\beta}{2} + i\sin\frac{n\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2} + i\sin\frac{\beta}{2}}\,\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \left\{\cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\right\}\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \left\{\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)\right\}\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha + k\beta) &= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},\\ \sum_{k=0}^{n-1}\sin(\alpha + k\beta) &= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.\end{aligned}\right\}$$

C. Brandenberger (Zurich).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Le Comité de trois membres chargé par le Congrès de Rome de former une Commission internationale pour l'étude des réformes de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires des différentes nations, s'est constitué comme suit : *Président,* Prof. F. Klein (Gœttingue) ; *Vice-président,* Prof. Sir Alfred-E. Greenhill (Londres) ; *Secrétaire,* Prof. H. Fehr (Genève). Il compte organiser la Commission sur une base très large en faisant appel aux principaux pays généralement représentés dans les Congrès internationaux des mathématiciens. La liste des membres sera sans doute établie d'ici à l'automne, afin que la Commission puisse se mettre à l'œuvre dès l'hiver prochain.

Comme l'a très bien dit M. Smith, à qui l'on doit l'initiative de la constitution de la Commission (v. plus haut, p. 283-284), il va sans dire qu'il ne s'agit nullement pour la Commission de tendre à une uniformisation des méthodes et de l'organisation des études, mais d'obtenir d'une étude d'ensemble des réformes réalisées au cours de ces dernières années ou qui sont encore à l'ordre du jour. C'est là un travail considérable qui exigera une collaboration active et dévouée de tous les membres.

L'Enseignement mathématique servira d'organe à la Commission, dont la tâche se rattache très intimément à celle que poursuit notre revue internationale depuis dix ans. Dès le premier volume nous avons fait établir des rapports sur l'état actuel de l'enseignement mathématique dans les divers pays et, sur ce point, comme sur bien d'autres, la Revue fournit à la Commission un ensemble de documents d'une grande utilité.

Association internationale pour la propagation de l'étude des quaternions et autres systèmes.

Nous avons sous les yeux le rapport de l'*International Association for promoting the study of Quaternions and allied systems of mathematics,* March, 1908 (51 p.). Le nouveau président, A. Macfarlane (Chatham, Canada), consacre une notice à son prédécesseur Ch.-J. Joly, décédé, et examine la part qu'il a prise dans le développement des méthodes vectorielles.

Dans son rapport général M. Macfarlane estime qu'il serait utile d'avoir une étude d'ensemble sur les différentes notations

vectorielles et d'en dégager une notation uniforme. Il cite à ce propos la série des articles que MM. Burali-Forti et Marcolongo consacrent précisément à cette importante question dans les *Rendiconti di Palermo* (1907-1908), et présente quelques critiques aux propositions des deux savants italiens. Nos lecteurs connaissent le principe même des notations proposées par le résumé que nous en avons donné dans notre compte rendu du Congrès de Rome. A l'heure actuelle cette question est d'une grande importance pour le progrès des méthodes vectorielles, en raison même de l'emploi de plus en plus fréquent qu'on en fait dans plusieurs branches des mathématiques pures et appliquées. Nous reproduirons, dans un prochain numéro, le tableau des notations vectorielles proposées et nous mettrons notre Revue à la disposition de ceux qui auront des observations ou critiques à formuler.

Le rapport de l'Association contient en outre la suite de la *bibliographie de l'Analyse vectorielle ;* il fournit des renseignements très précieux à tous ceux qui font usage de ces méthodes, qu'il s'agisse de disciples de Hamilton, de Grassmann ou d'autres, car, il est bon de l'ajouter, l'Association a pour but de s'occuper de l'ensemble des méthodes du Calcul vectoriel. C'est en réalité une *association pour la propagation des méthodes vectorielles*, et sous cette dénomination plus simple le nombre de ses adhérents eut sans doute augmenté encore plus rapidement.

H. Fehr.

Nominations et distinctions.

M. M. Abraham, professeur extraordinaire à l'Université de Gœttingue, a été appelé à l'Université de l'Illinois en qualité de professeur de Physique mathématique.

MM. Baillaud et Deslandres sont nommés membres du Bureau des Longitudes.

M. P. Burgatti, professeur de Mécanique rationnelle à l'Université de Messine, est transféré à la même chaire à l'Université de Bologne.

M. G. Boggio, privat-docent à l'Université de Turin, est nommé professeur extraordinaire de Mécanique rationnelle à l'Université de Messine, à partir du prochain semestre.

M. Cosserat, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, professeur de Calcul différentiel, est nommé professeur d'Astronomie.

M. Drach, professeur à la Faculté de Poitiers, est nommé professeur de Calcul différentiel et intégral à l'Université de Toulouse.

M. Dullac, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Grenoble, est nommé chargé de cours pour le Calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de Poitiers.

M. P. Epstein, privat-docent, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Strasbourg.

M. M. de Franchis, professeur de Géométrie projective et descriptive à l'Université de Parme, et M. M. Pieri, professeur des mêmes branches à l'Université de Catane, échangeront leurs résidences à partir du prochain semestre.

M. F. Gerbaldi, professeur de Géométrie analytique et projective à l'Université de Palerme, sera transféré à la chaire d'Algèbre et de Géométrie analytique à l'Université de Pavie, à partir du prochain semestre.

M. H. Kobold est nommé professeur d'Astronomie à l'Université de Kiel.

M. H. Mitchel, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Columbia à New-York.

M. Petz, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire à l'Université bohème de Prague.

M. Pieri passe à l'Université de Parme (v. ci-dessus).

M. A. de Saint-Germain, professeur de mécanique, a été admis à la retraite et nommé professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Caen.

M. W. Schlink, professeur extraordinaire de Mécanique technique à l'Ecole technique supérieure de Braunschweig, est nommé professeur ordinaire.

M. Tauber, privat-docent, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Vienne.

M. Herb.-Hall Turner, directeur de l'Observatoire d'Oxford et M. G. Hale, directeur de l'Observatoire de Mount-Wilson (Californie) sont nommés membres correspondants de l'Académie des Sciences de Paris.

M. N. Vanecek, privat-docent à l'Ecole technique supérieure bohème de Prague, est nommé professeur ordinaire.

M. Zoretti, professeur au Lycée de Rochefort, est nommé maître de conférences pour les mathématiques à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Privat-docents. — Sont admis en qualité de privat-docents :

M. A. Antoniazzi, pour l'Astronomie, à l'Université de Padoue.

M. F. Contarino, pour l'Astronomie, à l'Université de Naples.

M. G. Sannia, pour l'Algèbre et la Géométrie analytique, à l'Université de Turin.

M. G. Scorza, pour la Géométrie projective et descriptive, à l'Université de Bologne.

M. B. Viaro, pour l'Astronomie, à l'Observatoire de Arcetri (Florence).

Nécrologie.

M. Henry Joly, professeur à l'université de Lausanne, est décédé à l'âge de 48 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

ANGLETERRE

Cambridge; *University*. — List of Lectures proposed for Mathematics, 1908-1909. The courses of lectures will begin as follows: ***Michaelmas Term* (*M. T.*)**, Oct. 15; ***Lent Term* (*L. T.*)**, January 18; ***Easter Term* (*E. T.*)**, April 26. — Prof. Forsyth: Differential Equations, 3, *M. T.*; Functions of two (or more) Complex variables, 3, *M. T.*; Algebraic Functions and their Integrals, 3, *L. T.*; Elementary Differential Geometry, 3, *E. T.* — Prof. Sir G. H. Darwin: Celestial Mechanics (Attractions and Potential), 3, *M. T.*; Dynamical Astronomy, 3, *L. T.* — Prof. Sir R. S. Ball: Planetary Theory, 3, *M. T.*; Spherical Astronomy, 3, *L. T.* — Prof. Larmor: Electricity and Magnetism 3, *M. T.* Conf. in math. Physics, *M. T.*; Electrodynamic and Optical Theory, 3, *L. T.*; Thermodynamics and Theory of Gases. (Short Course.) 3, *E. T.* — Dr Hobson: Harmonic Analysis, 3, *M. T.*; Vibrations and Sound, 3, *L. T.* — Dr Baker: Introduction to Theory of Functions, 3, *M. T.*; Indroduction to Theory of Groups, 3, *M. T.*; Theory of Functions, 3, *L. T.*; Curves and Surfaces, 3, *L. T.* — Mr Herman: Hydrodynamics (for Part II), 3, *M. T.*; Geometrical Optics, Hydromechanics (for Schedule A), *L. T.*; Hydrodynamics and Sound (for Schedule A), *E. T.* — Mr Richmond: Algebraic Geometry (for Schedule B), 3; Solid Geometry (for Schedule A), *M. T.* et *L. T.*; Synthetic Geometry (methods and applications) *E. T.* — Dr Whitehead: Synthetic Geometry: systematic development (for Schedule B) *M. T.*; Principles of Mathematics (Number and Magnitude) *L. T.*; Principles of Mathematics (Symbolic Logic) *E. T.* — Dr Barnes: Linear Differential Equations (for Schedule B), 3, *M. T.* — Mr Webb: Dynamics and Vibrations, *L. T.* — Mr Mollison: Attractions and Theory of Potential (for Part I), *E. T.* — Mr Berry: Elliptic Functions and Elementary Theory of Functions, *L. T.*; Elliptic Functions (for Schedule B) *L. T.*; Elliptic Functions (Th. of Transformation), *E. T.* — Mr Bennett: Line Geometry, 3, *L. T.* — Mr Munro: Hydrodynamics and Sound, *M. T.* — Mr Bromwich: Elementary Theory of Limits (for Schedule B), *M. T.*; Theory of Potential (for Schedule B), *L. T.*; Calculus of Variations, *E. T.* — Mr Grace: Invariants and Geometrical Applications, *M. T.* — Mr Hardy: Integral Functions, *E. T.* — Mr Bateman: Integral Equations (Long Vocation 1908). — Mr Stratton: Analytical Dynamics, *E. T.* — Mr Hinks: Demonstrations in Practical Astronomy. *M. T.* et *L. T.* — Mr Bevan: Mathematics for Students of Physics, 3, *M. T.*

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Cours annoncés pour l'année universitaire 1908-1909.

Columbia University (New-York). — Prof. P.-S. Fiske : Advanced calculus; Introduction to the theory of functions of a real variable, 3 ; Functions defined by linear differential equations, 3. — Prof. F.-N. Cole : Introduction to the theory of functions, 3 ; Theory of plane curves, 3. — Prof. James Maclay : Elliptic functions, 3 ; Application of the calculus to the theory of surfaces and curves in space, 3. — Prof. D. E. Smith : History of mathematics, 2. — Prof. C.-J. Keyser : The principles of mathematics, 3 ; Modern theories in geometry, 3. — Prof. H.-B. Mitchell : Differential equations, 2 ; Geometrical analysis, 3. — Prof. Edward Kasner : Geometry of dynamical systems, 2. — Dr. G.-H. Ling : Theory of numbers, 3 ; first half year ; Advanced theory of numbers, 3 ; second half year.

Cornell University (Jthaca, New-York). — Prof. McMahon : Hydrodynamics, 2 ; Electricity, 2. — Prof. J. I. Hutchinson : Theory of functions of a complex variable, 3. — Prof. V. Snyder ; Higher geometry, 3. — Prof. W. B. Fite : Theory of groups, 3. — Dr. F. R. Sharpe : Theory of potential and Fourier's series, 3 ; Elliptic functions, 2 (first half year, I). — Dr. W. B. Carver : Projective geometry, 3. — Dr. A. Ranum : Differential equations. 2 ; Higher algebra, 2. — Dr. D. C. Gillespie : Advanced calculus, 3 ; Integral equations, 2 (II). — Dr. C. F. Craig : Advanced analytic geometry, 3 ; Partial differential equations, 2 (I). — Dr. F. W. Owens : Solid analytic geometry, 2 ; The Oliver mathematical club will meet weekly.

Harvard University (Cambridge, Mass.) — Prof. W. E. Byerly : Introduction to the modern geometry and modern algebra, 3 ; Trigonometric series (with Prof. Peirce), 3. — Prof. B. O. Peirce : Methods in mathematical physics, Elasticity, 2. — Prof. W. F. Osgood : Differential and integral calculus (second course), 3 ; Infinite series and products (first half year), 3 ; Galois's theory of equations (second half year), 3 ; Theory of functions (advanced cours). — Prof. M. Bôcher ; Theory of functions (introductory course), 3 ; The linear differential equations of physics, 3. — Prof. C. L. Bouton : Hydromechanics (second half year), 3 ; Differential equations, Lie's theory of continuous groups, 3. — Prof. J. K. Whittemore : Elements of mechanics, 3 ; Differential geometry of curves and surfaces (first half year), 3. — Prof. E. V. Huntington : The fundamental concepts of mathematics, 3. — Dr. J. L. Coolidge : Line geometry (first half year), 3. — Dr. H. N. Davis : Dynamics of a rigid body, 3.

Courses of reading and research ore offered by Professors, Byerly, Osgood, Bôcher, Bouton, and Whittemore ; and a seminary in geometry will be conducted by Prof. Bouton, Prof. Whittemore, and Dr. Coolidge during the second half year.

Indiana University (Bloomington). — Prof. R. J. Aley : Advanced calculus, 3 (*a, w, s*) ; Higher algebra, 2 (*a, w*) ; Algebra of quantics, 3 *(s)*. — Prof. S. C. Davisson : Ordinary differential equations, 3 *(a, w)*, Functions of a complex variable, 3 *(s)* ; Fourier's series and integrals 3 *(a)* ; Modern analytic geometry, 2 *(w s)*. — Prof. D. A. Rothrock : Quaternion, 3 *(a)* ; Partial differential equations, 3 *(w, s)*. — Prof. U. S. Hanna : Elliptic inte-

grals and functions, 2 (*a*, *w*); Infinite series and products 3 (*s*). — Dr. C. HASEMAN : Mathematical theory of elasticity, 3 (*a*. *w*); Theory of potential, 3 (*s*). — [*a*. *w*, *s*, above indicate autumn, winter, and spring terms.]

Yale University (New-Haven, Conn.). — Prof. J. PIERPONT : Introduction to the theory of functions, 2 ; Projective geometry, 2 ; Advanced mechanics, 2 ; Advanced theory of functions, 2. — Prof. P. F. SMITH : Advanced analytic geometry, 2 ; Continous groups of transformations, 2. — Prof. E. W. BROWN : Mechanics, 2 ; Advanced calculus, 3 ; Celestial mechanics, 2. — Prof. H. E. HAWKES : Algebra and analytic geometry, 2; Theory of equations, 2. — Prof, M. MASON : Linear differential equations, 2 ; Calculus of variations, 1. — Dr. L. J. HEWES : Differential equations, 1 ; Graphical and numerical computation, 1. — Dr. W. A. GRANVILLE : Differential geometry, 2.

Princeton University. — (All courses are three hours a week. The Roman numerals refer to the first (I) and second (II) term. — Prof. H. B. FINE : Theory of algebraic functions, I. — Prof. H. D. THOMPSON : Historical readings in infinitesimal geometry, I. — Prof. G. A. BLISS ; Linear differential equations, I ; Partial differential equations, II. — Prof. L. P. EISENHART : Differential geometry, I, II. — Prof. W. GILLESPIE : Theory of substitutions, I ; Theory of invariants, II. — Prof. O. VEBLEN : Projective geometry, I, II. Prof. J. W. YOUNG : Theory of functions of a complex variable, I, II ; Theory of numbers, I. — Prof. BLISS or VEBLEN : Theory of functions of a real variable, I, II. — Dr. J. G. HUN : Analytic projective geometry, I, II. — Dr. C. R. MACINNES : Elliptic functions, II. — Dr. R. L. MOORE : Foundations of geometry, II. — Dr. C. E. STROMQUIST : Calculus of variations, II. — Dr. E. SWIFT : Theory of capillarity, II.

ITALIE [1]

Année universitaire 1908-1909.

Bologna ; *Università.* — ARZELA : Principio di Dirichlet ; calcolo delle variazioni, 3. — DONATI : Teoria dell' elasticità ; ottica, 3. — PINCHERLE : Funzioni algebriche e loro integrali ; funzioni ellittiche ; funzioni analitiche rappresentate da integrali definiti, 3.

Catania ; *Università.* — DE FRANCHIS : Geometria sopra le curve algebriche, superficie di Riemann ed integrali abeliani, problema di inversione, $4^1/_2$. — LAURICELLA ; Ottica, $4^1/_2$. — PENNACCHIETTI : Funzioni ellittiche e loro applicazioni alla meccanica, $4^1/_2$. — SEVERINI : Applicazione della teoria dei gruppi continui finiti alle equazioni differenziali ; estensione della teoria di Galois secondo Picard e Vessiot, $4^1/_2$.

Genova ; *Università.* — FUBINI : Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe, 3. — LORIA : Geometria infinitesimale, 3. — TEDONE : Teoria dei fenomeni elettrici e magnetici secondo le idee di Maxwell, 3.

Messina ; *Università.* — BAGNERA : Equazioni a derivate parziali di secondo ordine, 3. — BOGGIO : Equazioni integrali e loro applicazioni alla fisica mate-

---

[1] Les cours généraux (tels que ceux d'Algèbre, Géométrie analytique, Géométrie descriptive, Calcul infinitésimal, Mécanique rationnelle) ne sont pas indiqués dans la liste.

matica, 3. — MARTINETTI : Teoria delle curve piane e delle superficie algebriche ; curve e superficie di terz'ordine, 3.

Napoli ; *Università.* — AMODEO : Storia delle Scienze matematiche : Il secolo XVIII, 3. — CAPELLI : Teoria delle forme algebriche, $4^1/_2$. — MARCOLONGO : Teoria del potenziale ed equazioni integrali ; teoria dell' elasticità, $4^1/_2$. — MONTESANO : Geometria della retta ; teoria delle trasformazioni birazionali nel piano e nello spazio, $4^1/_2$. — PASCAL : Equazioni a derivate parziali di secondo ordine, 3. — PINTO : Ottica fisica, $4^1/_2$.

Padova ; *Università.* — D'ARCAIS : Gruppi discontinui di sostituzioni lineari ; funzioni ellittiche ; funzioni modulari, $4^1/_2$. — FAVARO : Storia dell'ottica con particolare riguardo alla invenzione del telescopio, 3. — GAZZANIGA : Teoria dei numeri, 3. — LEVI-CIVITA : Idrodinamica, $4^1/_2$. — RICCI . Teorie introduttorie alla fisica matematica ; elasticità con speciale riguardo alle applicazioni all'ottica, 4. — SEVERI : Teoria dei gruppi, 2 ; Funzioni algebriche di due variabili, 2. — VERONESE : Geometria iperspaziale, 3.

Palermo ; *Università.* — GEBBIA : Meccanica dei sistemi continui ; attrazione newtoniana ; idrostatica ed idrodinamica, $4^1/_2$. — GUCCIA : Teoria generale delle curve e delle superficie algebriche, $4^1/_2$. — VENTURI : Moderne vedute riguardo ai metodi della meccanica celeste, $4^1/_2$.

Pavia ; *Università.* — ALMANSI : Idrostatica e idrodinamica, 3. — BERZOLARI : Curve e superficie algebriche, 3. — VIVANTI : Calcolo delle variazoni, 3.

Pisa ; *Università.* — BERTINI : Geometria iperspaziale ; rappresentazione di una forma per combinazione lineare di altre e formule di postulazione ; applicazioni, 3. — BIANCHI : Funzioni di variabile complessa ; funzioni automorfe, $4^1/_2$. — DINI : Complementi di analisi infinitesimale : integrali definiti, equazioni differenziali, funzioni sferiche, funzioni di Bessel, $4^1/_2$. — MAGGI : Teoria dei fenomeni elettromagnetici con particolare riguardo alle nuove ipotesi, $4^1/_2$. — PIZZETTI : Generalità di astronomia sferica ; teoria della figura dei pianeti. 3.

Roma ; *Università.* — CASTELNUOVO : Funzioni algebriche di una variabile complessa e loro integrali, 3. — CERRUTI : Equazioni alle derivate parziali del prim ordine, 3. — ORLANDO : Integrali definiti e loro applicazioni alla fisica matematica, 3. — VOLTERRA : Teoria dell' elasticità, $4^1/_2$. — Teoria della rotazione dei corpi ed applicazioni alla meccanica celeste, 3.

Torino ; *Università.* — D'OVIDIO : Teoria delle funzioni di variabili complesse ed integrali abeliani, 3. — MORERA : Teoria del potenziale newtoniano ; attrazione degli ellissoidi ; figure di equilibrio di una massa fluida ruotante, 3. — SEGRE : Rassegna di concetti e metodi della geometria moderna, 3. — SOMIGLIANA : Teoria generale dell'elasticità. 3.

RUSSIE [1]

Cours annoncés pour l'année 1907-1908.

Dorpat (Jurjew) ; *Université.* (1er semestre : septembre-décembre 1907). — ALEXEJEW : Applications du Calcul différentiel à la Géométrie, 4 ; Détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles, 2. — GRAVÉ : In-

[1] M. Bobynin a bien voulu nous adresser ce tableau des cours de mathématiques annoncés dans quelques universités russes pour les deux semestres écoulés.

troduction à l'Analyse, 4 ; Intégrales indéfinies, 4 ; Travaux pratiques de Géométrie analytique, 2 — Kolossoff : Cinématique, application à la théorie des mécanismes, 3 ; Intégration des équations et compléments de la Mécanique analytique, 3 ; Théorie des fonctions de variables imaginaires, 4. — Zewitzky : Astronomie théorique, 4 ; Chapitres complémentaires de l'astronomie sphérique, 2. — Pokrowsky : Mathématiques élémentaires, 2 ; Cours général d'astronomie, 4 ; Connaissance du ciel.

2e *semestre :* janvier-mai 1908. — Alexejew : Algèbre sup., 4 ; Calcul intégral (II), 3. — Gravé : Géométrie analytique (II), 4 ; Calcul différentiel (I), 4. — Kolossoff : Mécanique du point, 3 ; Théorie des nombres, 4. — Zewitzky : Travaux pratiques d'Astronomie sphérique, 2 ; Mécanique céleste, 4. — Pokrowsky : Cours général d'astronomie, 4 ; Travaux pratiques d'astronomie sphérique, 2 ; Connaissance du ciel ; Astronomie (colloquium) ; Eléments de l'Analyse supérieure pour les étudiants-chimistes, 4.

Kiew ; *Université.* — *1er semestre.* — Khandrikoff : Calcul intégral, 2. — Boukrejeff : Introduction aux mathématiques sup., 4 ; Applications du Calcul différentiel à l'Analyse et à la Géométrie, 3 ; Intégration des fonctions, 2. — Pfeiffer : Intégration des équations différentielles, 3 ; Calcul des différences, 2 ; Travaux pratiques de Calcul différentiel, 2. — Bielankin : Cours complémentaire de la Géométrie analytique, 2 ; Travaux pratiques de Géométrie analytique ; 3. — Souslow : Cinématique d'un système invariable, 2 ; Dynamique des solides, 2 ; Théorie du potentiel et statique, 2. — Woronetz : Introduction à la Mécanique, 2 ; Calcul des variations, 2 ; Théorie de l'élasticité (cours complémentaire), 1 ; Travaux pratiques de mécanique du point, 2. — Vogel : Astronomie sphérique, 2 ; Astronomie descriptive, 2 ; Travaux pratiques de théorie des instruments astronomiques, 3. — Tcherny : Mécanique céleste, 1.

2e *semestre :* Khandrikoff : Calcul différentiel et ses applications analytiques, 4. Boukrejeff : Calcul différentiel, 4 ; Intégrales définies et intégrales multiples, 4. — Pfeiffer : Intégration des équations aux dérivées partielles, 1 ; Calcul des probabilités, 1 ; Travaux pratiques d'application du Calcul différentiel à la Géométrie, 2 ; Travaux pratiques de Calcul intégral, 2 ; Travaux pratiques d'intégration des équations différentielles, 2. — Souslow : Dynamique d'un système, 4 ; Dynamique des solides, 2. — Woronetz : Mécanique du point, 3 ; Théorie de l'élasticité (cours complémentaire), 2 ; Travaux pratiques de mécanique d'un système, 2. — Vogel : Astronomie sphérique, 2 ; Astronomie descriptive, 2 ; Travaux pratiques de théorie des instruments astronomiques, 3. — Tcherny : Mécanique céleste, 2.

Moscou ; *Université.* — *1er semestre :* Andreeff : Algèbre sup. (théorie des déterminants, propriétés des polynomes, propriétés fondamentales des équations algébriques et de leurs racines), 3 ; Géométrie projective, 2. — Mlodziejowski : Géométrie analyt. du plan, 4 ; Géométrie différentielle (cours spécial), 3. — Lakhtine : Introduction à l'Analyse, 4 ; Calcul intégral, 4. — Egoroff ; Géométrie différentielle, 4 ; Equations différentielles, 2. — Bobynin : Histoire des mathématiques dans l'antiquité, 1 ; Histoire des mathématiques modernes, 1. — Winogradoff : Travaux pratiques d'intégration des équations différentielles, 2. — Bogoiawlenski : Algèbre sup. (résolution des équations par radicaux), 2. — Wlassoff : Cours abrégé des mathématiques supérieures pour les étudiants-naturalistes, 3 ; Travaux pratiques, 2. — Dmitrowsky : Courbes planes des ordres supérieurs, 2 ; Travaux prati-

ques de géométrie analytique du plan, 2. — Gegalkin : Travaux pratiques d'introduction à l'Analyse, 1 ; Travaux pratiques de calcul intégral, 2 ; Ensemble infini, 1 ; Nombres imaginaires, 1. — Wolkoff : Travaux pratiques de géométrie différentielle, 2. — Poliakoff : Chapitres choisis de la théorie des fonctions (surfaces de Riemann, fonction gamma, fonctions sphériques), 2. — Joukowsky : Cinématique et statique, 3 ; Travaux pratiques, 2 ; Dynamique des solides (cours spécial), 2. — Tchaplyguin : Mécanique d'un système et Hydromécanique, 3 ; Travaux pratiques, 2 ; Cours abrégé de Mécanique pour les étudiants-naturalistes, 3. — Kowalensky : Résistance des matériaux, 4. — Bolotoff : Théorie du choc des corps solides, 2. — Mertzaloff : Géométrie descriptive, 2 ; Théorie des mécanismes, 2 ; Travaux pratiques, 1 ; Dessin linéaire, 2. — Stankiewitch : Intégration des équations différentielles de la mécanique, 3. — Appelroth : Résolutions périodiques dans le problème des trois corps, 2. — Zerassky : Astronomie sphérique, 2 ; Introduction à l'Astronomie théorique, 2 ; Travaux pratiques d'astronomie sphérique, 2. — Sternberg : Géodésie supérieure (théorie générale de la figure de la Terre), 2 ; Travaux pratiques de Géodésie, 2. — Kasakoff : Mécanique céleste, 2 ; Calcul des orbites, 1. — Oumoff : Cours complet de physique (mécanique, physique moléculaire, chaleur, acoustique et éléments de l'optique), 4 ; Travaux pratiques de physique, 8. — Zinger : Calcul vectoriel et son application aux questions de la Physique, 2.

2e *semestre*. — Andréeff : Algèbre supérieure (Théorie des équations numériques, fonctions symétriques, résolutions algébriques), 3 leçons par semaine ; Géométrie projective, 2. — Mlodzieiowski : Géométrie analyt. de l'espace, 3 ; Travaux pratiques, 2 ; Théorie des fonctions à variables réelles, 2. — Zakhtine : Calcul différentiel, 4 ; Calcul intégral, 3 ; Calcul des différences, 2. — Egoroff : Equations différentielles, 1, 3 ; Calcul des variations, 2 ; Théorie analytique des équations différentielles, 3. — Bobynin : Histoire des mathématiques dans l'antiquité, 1 ; Histoire des mathématiques modernes, 1. — Winogradoff : Travaux pratiques d'intégration des équations différentielles, 2. — Bogoiawlensky : Equations du cinquième degré, 2. — Wlassoff : Cours abrégé des mathématiques supérieures pour les étudiants-naturalistes, 3 ; Travaux pratiques, 2, Théorie synthétique des sections coniques, 2. — Dmitrowski : Courbes planes du troisième ordre, 2. — Gegalkine : Travaux pratiques de Calcul différentiel, 2 ; Travaux pratiques de Calcul intégral, 2 ; Ensemble infini, 1 ; Nombres incommensurables ; Théorie de la puissance, 1. — Wolkoff : Théorie des lignes géodésiques, 2. — Poliakoff : Fonction hypergéométrique, 2. — Joukowsky : Dynamique du point, 3 ; Travaux pratiques, 2 ; Théorie des régulateurs, 2. — Tchaplyguine : Mécanique d'un système et Hydromécanique, 3 ; Travaux pratiques. — Kowalensky : Hydraulique, 4. — Bolotoff : Théorie de l'élasticité, 3. — Mertzaloff : Travaux pratiques de Géométrie descriptive, 2 ; Théorie générale des machines, 2 ; Dessin linéaire, 2 ; Travaux pratiques de mécanismes, 1. — Stankiewitch : Intégration des équations différentielles de la Mécanique, 1. — Appelroth : Sur les travaux de M. Painlevé relatifs à l'intégration des équations différentielles, 2. — Zerasski : Astronomie sphérique, 2 ; Introduction à l'Astronomie théorique, 2 ; Astronomie pratique et travaux pratiques à l'Observatoire, 3. — Sternberg : Géodésie supérieure (théorie générale de la figure de la Terre), 2 ; Travaux pratiques de Géodésie, 2. — Kasakoff : Mécanique céleste, 2. — Oumoff : Cours complet de physique (suite). — Zinger : Calcul vectoriel et son application aux questions de la Physique, 2.

BIBLIOGRAPHIE

W. AHRENS. — **Mathematische Spiele** (« Aus Natur u. Geisteswelt », Sammlung wiss.-gemeinverständlicher Darstellungen). Mit einem Titelbild u. 69 Figuren. 1 vol. cart. VI, 118 p.; 1 M. 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce petit volume contient un choix de *jeux mathématiques* tirés d'un ouvrage très complet que l'auteur a publié sous le titre de *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (Teubner, 1901). On y trouve, entre autres les jeux des traversées, du solitaire, de Boss-Puzzle, du Baguenaudier, du cavalier, et les carrés magiques. L'auteur a joint au texte un certain nombre de questions dont les réponses sont placées à la fin du volume.

Suivant le but de la collection, ce petit opuscule est à la portée de ceux qui n'ont pas de préparation mathématique ; ils y trouveront des notions à la fois instructives et récréatives.

E. KALLER (Vienne).

W. W. Rouse BALL. — **Histoire des Mathématiques.** *Edition française* revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par L. FREUND. T. II — 1 vol. gr. in-8°, 271 p. Hermann, Paris.

Ainsi que nous l'avons déjà dit en rendant compte du Tome I (voir l'*Enseignement mathématique* VIII N° 3, p. 242-244), cet ouvrage n'est pas à proprement parler, une histoire du développement des idées et vérités mathématiques, mais plutôt une histoire des Mathématiciens.

Les *chapitres* que renferme l'ouvrage sont les suivants : XVI, La vie et les travaux d'Isaac Newton. — XVII, Leibniz et les Mathématiciens de la première moitié du XVIIIme siècle, avec deux subdivisions : Développement de l'analyse sur le continent. Les Mathématiciens anglais du XVIIIme siècle. — XVIII Lagrange, Laplace et leurs contemporains de 1740 à 1830, avec les quatre subdivisions : Développement de l'analyse et de la mécanique, Création de la Géométrie moderne, Développement de la physique mathématique, Introduction de l'analyse en Angleterre. — XIX, Les mathématiques au XIX siècle, avec les subdivisions : La théorie des nombres ou arithmétique supérieure. La théorie des fonctions de périodicité double et multiple, Fonctions elliptiques et abéliennes, La théorie des fonctions, Algèbre supérieure, Géométrie analytique. Analyse, Géométrie synthétique, La Géométrie infinitésimale, La Géométrie non-euclidienne, Mécanique, L'Astronomie théorique, Physique mathématique.

Nous ne voulons pas critiquer les subdivisions des trois premiers chapitres ; mais il aurait mieux valu laisser complètement de côté celles du dernier chapitre, le livre n'étant conçu qu'à un point de vue biographique ; en procédant comme il l'a fait, l'auteur a été obligé d'introduire dans telle subdivision toute une série d'œuvres qui n'y avaient en réalité rien à faire, car, en faisant l'histoire des Mathématiciens mentionnés dans cette subdivision, on s'occupe de l'ensemble de leurs œuvres et non pas seulement de celles qui rentreraient effectivement dans le domaine que la division comporte. Ainsi Cauchy est traité complètement dans la division « Algèbre supérieure »

et pourtant sa principale activité s'est portée sur un autre domaine que celui de l'Algèbre supérieure ; Weierstrass est traité dans la division « Fonctions elliptiques et abéliennes, » pourquoi pas dans la division générale « La théorie des fonctions » ? Casorati est placé dans la division « Algèbre supérieure » quoiqu'on lise à la p. 188 : « Les travaux de Casorati se rapportent presque uniquement à l'Analyse ». Voici encore un exemple du défaut d'une bonne division de l'Ouvrage : Le chapitre XIX commence par un court aperçu, servant d'introduction, sur l'histoire des mathématiques au XIXme siècle, et traite ensuite les deux mathématiciens Gauss et Dirichlet, le premier d'une façon assez détaillée, le second rapidement ; ensuite, nous trouvons la division « La Théorie des nombres ou Arithmétique supérieure ». Gauss et Dirichlet ne font-ils pas partie des principaux représentants de ce domaine ? Pourquoi ne pas placer la division « Théorie des nombres » immédiatement après l'aperçu d'introduction ? Nous aurions également désiré que l'on mît plus de soin à l'impression correcte des titres, aussi bien dans l'original anglais que dans la traduction ; à la façon dont elles sont indiquées ici, les parties : La théorie des fonctions (p. 161), Algèbre supérieure (p. 162), Géométrie analytique (p. 198), Analyse (p. 202), etc. semblent n'être que des subdivisions de la théorie des fonctions de périodicité double et multiple (p. 149) ; par contre les parties : Méthodes graphiques (p. 221), Mécanique analytique (p. 224), qui ne sont que des subdivisions de la Mécanique (p. 221), sont prises pour des divisions indépendantes.

Il est regrettable en outre de ne pas avoir placé une table des noms de tous les mathématiciens cités dans la traduction française, on cherche parfois en vain tel ou tel mathématicien auquel on n'a pas consacré de paragraphe spécial, comme par exemple : Appel, Picard, Lerch, Kowalewski, Darboux, Goursat, Schwarz, Christoffel, Poincaré, Painlevé, Pringsheim, Mittag-Leffler, Peano, Liouville, et beaucoup d'autres.

La traduction française est cependant de beaucoup supérieure à l'original anglais, spécialement en ce qui concerne l'exposé des progrès du XIXme siècle. Nous devons particulièrement à M. de Montessus une série d'additions, qui ont parfois une grande importance ; par exemple les articles sur Weierstrass, Cauchy, Galois, Hermite et d'autres, ont été augmentés, comme il convenait du reste. La partie « Analyse » dans laquelle R. Ball fait rentrer le Calcul différentiel et intégral et les équations différentielles, ne contient dans l'original anglais que 14 lignes ! (p. 489) ; il ne renferme qu'une simple énumération de noms ; mais M. de Montessus à consacré au moins 9 pages à cet important domaine des mathématiques (p. 202-210), dans lesquelles il nous donne une idée d'ensemble sur les progrès de l'Analyse supérieure, sans insister spécialement sur la partie biographique. C'est de cette façon qu'on aurait dû traiter chaque domaine mathématique, mais il était impossible de le faire sans remanier complètement le livre anglais.

M. de Montessus s'est en outre occupé, dans des articles spéciaux, de plus de 40 mathématiciens importants qui manquent dans le livre de R. Ball, ou qui ne sont mentionnés que très sommairement ; nommons parmi ceux-ci : Lhuilier, Lacroix, Malfatti, Waring, Poinsot, Delambre, Lamé, Cournot, Genocchi, Betti, Puiseux, Faà di Bruno, Brioschi, Stieltjes, Möbius, Clebsch, Halphen, Chasles, Cremona, Beltrami, etc.

Il faut également signaler dans la traduction française l'intéressant article de M. Darboux *sur le développement des méthodes géométriques* (Extrait du

Bull. des Sciences math. 1904), d'autant plus que dans l'ouvrage de Ball, la Géométrie, à l'exception de la Géométrie nouvelle (synthétique), n'est guère traitée avec l'ampleur qu'elle mérite.

Les personnes qui désirent savoir à quel domaine tel ou tel mathématicien s'est surtout consacré, trouveront d'assez bons renseignements dans ce livre. Pour les étudiants en mathématiques, ce serait un ouvrage d'une réelle utilité, s'il renfermait des indications bibliographiques un peu plus nombreuses ; par exemple l'article sur Hermite ne renferme qu'une seule indication de ce genre sur ses différents mémoires ; sans doute l'on renvoie à l'article de M. E. Picard : *L'œuvre scientifique de Ch. Hermite (Acta mathem.* t. XXI) ; mais il serait bien préférable d'indiquer la bibliographie pour chaque mémoire.

Nous avons encore trouvé par ci par là des erreurs dans les notices biographiques, de même les titres des ouvrages cités ne sont pas toujours exacts. Nous ne pouvons cependant pas signaler ici toutes les inexactitudes que nous avons rencontrées, nous nous bornerons à celles qu'il nous semble le plus nécessaire de rectifier.

p. 4. — « Le calcul de C suppose en effet la connaissance du rayon et de la densité moyenne de la terre, nombres que ne connaissait pas Newton ». Newton connaissait bien le rayon de la terre, seulement avec une exactitude moindre que celle fournie par les mesures du XIXme siècle.

p. 13, ligne, 11. — Il faut lire $(1 - x^2)^{\frac{0}{2}}$ au lieu de $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

p. 14, ligne 2 depuis en bas. — Il faut lire à la première et à la troisième expression x^{mn-1} à la place de x^{m-n-1} et dans la deuxième expression $x^{\left(m+\frac{1}{2}\right)n-1}$ à la place de $\left(x^{m+\frac{1}{2}}\right)^{n-1}$

p. 57. — « Il (de Montmort) fut le premier à résoudre complètement le problème des partis ». Ce problème avait été déjà résolu par Pascal et Fermat en 1654, comme on le lit dans le premier volume (p. 292-293 et 307-308). Fermat l'a également étendu au cas de trois joueurs. On aurait dû également mentionner ici le principal ouvrage de Montmort, *Essai d'analyse sur les jeux de hasard* (1708).

p. 58. — Le principal ouvrage de Cramer ne s'appelle pas « Traité sur les courbes algébriques », mais *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.*

p. 59. — Le principal ouvrage géométrique de Clairaut est intitulé *Recherches sur les courbes à double courbure*, et non « Traité sur etc. »

p. 68. — Il est vrai de dire que Halley a reconstitué le livre 8 des sections coniques d'Apollonius qui avait été perdu, mais c'est incomplet, il a également traduit en latin les livres 5, 6 et 7 qui n'avaient paru qu'en arabe.

p. 80. — « Il (Laplace) créa également le calcul des probabilités » n'est pas correct ; les fondateurs du calcul des probabilités sont Pascal, Fermat, Huygens et Jacob Bernoulli ; il est vrai que Laplace a présenté ce domaine des mathématiques en lui donnant la forme d'un tout et en lui fournissant une base analytique plus profonde, mais il ne doit pas pour cela en être considéré comme le fondateur.

p. 81. — S'il s'agit de l'*Introductio* d'Euler : « ouvrage composé pour servir d'introduction aux mathématiques pures », il faudrait plutôt dire « aux mathématiques supérieures ».

p. 84. — Le traité d'Euler *Curvavum maximi minimive proprietate gau-*

dentium inventio nova et facilis n'a pas paru en 1744, mais en 1741 (dans les *Commentar. Acad. Scient.* Petrop. T. VIII ad annum 1736); le traité plus général imprimé à Lausanne en 1744 s'appelle *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.*

Ibid. — L'ouvrage d'Euler publié en 1770 a comme titre *Vollständige Anleitung zur Algebra* « et pas » Einleitung zur Algebra ». La traduction française de ce livre parut à Lyon en 1774 et non en 1794 ; une autre parut également à Lyon en 1795 (an III de la républ.).

p. 87. — L'ouvrage de Lambert *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* n'a pas 4 volumes, mais 4 parties en 3 volumes.

p. 99. — « Il (Lagrange) créa le Calcul des variations » n'est pas tout à fait exact; Euler a déjà établi les bases théoriques du Calcul des variations dans son excellent ouvrage déjà mentionné *Méthodus inveniendi lineas curvas* etc.; Lagrange a simplement généralisé ce sujet, et l'a traité d'une façon plus analytique dans son traité : *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies* (*Mélanges de philos, et de mathém. de la Soc. royale de Turin* pour les années 1760-1761, Sect. II, p. 173 etc.), titre qui n'a pas été mentionné une seule fois dans l'ouvrage.

p. 136. — Il est bien vrai de dire que Gauss a démontré « que toute équation algébrique a une racine de la forme $a + bi$ », à condition d'ajouter: dans laquelle b peut aussi être égal à 0. Mais le théorème de Gauss aurait été certainement exprimé d'une façon plus correcte de la manière suivante : Toute fonction algébrique entière rationnelle d'une variable peut être décomposée en facteurs réels du premier et du second degré.

p. 142. — Le titre que l'on a donné ici du traité de Gauss : *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung* n'est pas du tout complet, les mots *wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte* manquent.

p. 114. — « Mais il était réservé à Riemann.... de résoudre vraiment la question » (savoir du nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée); il n'est cependant pas tout à fait exact que cette question ait été réellement résolue ; les formules de Riemann n'en donnent qu'une solution approchée ; du reste on lit plus loin : « Plus tard H. Poincaré, Sylvester et Hadamard la reprirent et poussèrent l'approximation plus loin encore que ce dernier ».

p. 152. — « Les premiers mémoires d'Abel concernant les fonctions elliptiques furent publiés dans le *Journal de Crelle* ». Mais il aurait été très désirable pour les étudiants en Mathématiques de savoir dans quels volumes.

p. 154, ligne 27. — Lisez « Amplectatur » au lieu de « Ampletactur ».

Ibid., ligne 31. — Lisez « inesse » au lieu de « inessi ».

p. 155. — « Il (Riemann) étudia à Göttingue avec Gauss, et ensuite à Berlin avec Jacobi, Dirichlet, Steiner et Eisenstein ». Il faudrait plutôt dire « sous » que « avec ».

p. 172. ligne 1. — Il faut supprimer « en Saxe » et ajouter « et mourut à Berlin en 1847 ».

p. 198. Note (2) — Lisez « Haughton » au lieu de « Haugton ».

p. 211. — Il s'agit ici des travaux de Steiner « Les plus importantes de ses autres recherches sont contenues dans des notes parues à l'origine dans le *Journal de Crelle*, et sont comprises dans sa *Synthetische Geometrie* ». La première partie de la phrase est correcte, quant à la seconde il faut

remarquer que les *Vorlesungen über Synthetische Geometrie* n'ont pas été publiées par Steiner lui-même, mais par Geiser (1re partie 3 édit. 1887) et Schroeter (2me partie, 3 édit. 1898), d'après des conférences universitaires et en se servant de manuscrits. Elles contiennent la théorie des sections coniques au point de vue élémentaire et comme projections, mais pas les propriétés des courbes algébriques et des surfaces, des polaires et des roulettes, des maxima et minima.

p. 232. — Nous ne voyons pas très bien pourquoi de M. Montessus compte Riemann, Christoffel, Klein parmi les grands *physiciens modernes*.

H. Suter (Zürich).

H. Bouasse. — **Cours de Physique** conforme aux programmes des certificats et de l'Agrégation de Physique. Fascicule II. — *Thermodynamique. Théorie des ions*. 1 vol. gr. in-8° de 262 p. 7 fr. Ch. Delagrave, Paris.

Ce volume est le second du *Cours* dont M. Bouasse a entrepris la publication[1]. Il est consacré à la Thermodynamique. Ce que doit être un tel cours, dit l'auteur dans sa préface, est véritablement effrayant. Si l'on songe en effet que la Thermodynamique était uniquement au début une étude de l'énergétique des gaz et qu'aujourd'hui on est conduit à considérer les solutions salines comme jouissant de propriétés analogues, que l'étude de ces solutions ne va pas ensuite sans l'introduction de la notion d'ionisation, ce qui conduit alors dans le domaine de l'électricité, on se demande comment les principes viendront à bout de questions si complexes et surtout si la physionomie simpliste qui leur avait été donnée par leurs créateurs se retrouvera dans les champs nouveaux où il a bien fallu les transporter. La tâche devait sembler ici particulièrement dure. M. Bouasse l'aborde dans un chapitre consacré surtout aux deux principes fondamentaux (principe de l'équivalence et principe de Carnot). Dans ces premières pages on trouve une charpente qui suffira à supporter tout le reste du volume sauf peut être le dernier chapitre, consacré à la conduction thermique, dans lequel on trouvera des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, ce qui d'ailleurs n'aura rien de bien embarrassant, le tome précédent nous ayant déjà familiarisés avec lesdites équations.

Mais revenons à la Thermodynamique et à ses principes.

Si un corps est défini par des variables a, b, c,... on ne pourra en général écrire une relation de la forme

$$dQ = Ada + Bdb + Cdc + \dots$$

mais si toutes les transformations sont *réversibles* la chose devient possible. On a alors *l'équation thermique* du corps. Si les variables ne sont qu'au nombre de deux, à savoir la pression p et le volume v, des relations identiques à la précédente ont des coefficients qui, par définition, sont les *chaleurs spécifiques*, soit *à pression constante*, soit *à volume constant*.

La notion d'*énergie interne*, le fait que cette énergie U ne dépend que de l'état initial et de l'état final du corps, (dU étant une différentielle exacte) permettent de se faire une idée très simple du principe de l'équivalence.

Le principe de Carnot consiste en ce que $\frac{dQ}{T}$ est la différentielle exacte

[1] Voir l'analyse du premier volume dans *L'Enseign. mathém.* T. IX. 1907, p. 329.

d'une fonction S qui est *l'entropie*. Cela compris, nous sommes armés pour tout édifier. Ainsi on verra facilement que, dans le cas de deux variables, dQ puisse contenir symétriquement les chaleurs spécifiques dont nous parlions il y a un instant. Appliquant alors les deux principes précédents on a immédiatement la formule de Clapeyron dont de nombreux cas particuliers se rencontrent dans les divers chapitres du livre. On obtient par un raisonnement presque analogue une expression de l'énergie interne due à Kirchhoff et M. Bouasse termine ces préliminaires par un fort intéressant paragraphe sur la définition de la température absolue T. Que l'on conçoive seulement qu'un corps puisse être défini par T ou, ce qui revient au même, par une fonction quelconque de T et par une autre variable, soit le volume. Les principes conduisent à écrire des différentielles exactes avec les conditions analytiques bien connues, d'où l'on peut tirer inversement non pas T mais $\frac{T}{T_0}$. *Et la température absolue est ainsi définie, indépendamment de tout thermomètre, à un facteur constant près.* C'est là un résultat d'une clarté et d'un intérêt bien séduisants si l'on songe à ce je ne sais quoi de vague que l'on jette souvent sur la notion de température sous prétexte qu'elle n'est pas une grandeur mesurable au sens élémentaire de cet adjectif.

La place limitée dont je dispose dans ce journal m'interdit évidemment d'analyser les dix chapitres qui suivent avec autant de détails que le premier mais l'importance donnée à celui-ci semble bien être, je le répète, dans la pensée de M. Bouasse ; en une vingtaine de pages on fait connaissance avec tout l'outillage analytique qui interviendra ultérieurement. Les propriétés des gaz (Ch. II) et d'abord des gaz parfaits permettent d'appliquer d'une manière particulièrement simple les principes fondamentaux ; mais de l'étude du gaz parfait qui n'existe pas il faut passer à l'étude du gaz réel. L'équation idéale $pv = RT$ demande alors à être modifiée ; nous arrivons aux équations plus générales dues notamment à Clausius et à Van der Waals. Quant aux systèmes formés de plusieurs gaz, leur théorie reste très simple toutes les fois qu'on peut s'appuyer sur l'hypothèse fondamentale d'après laquelle l'énergie interne et l'entropie sont des sommes des énergie interne et entropie des composants. Signalons aussi l'étude des anomalies de densité présentées par certaines vapeurs.

Nous entrons maintenant dans la Chimie physique avec la *Règle des phases* (Ch. III). Il y a bien longtemps qu'on a considéré une vapeur en présence du liquide qui lui donnait naissance ou encore des dissolutions avec ou sans excès du sel dissous et cependant la notion précise de *phase* est récente. Les conditions d'équilibre des corps sous les différentes phases qu'ils peuvent présenter sont maintenant rattachées aux principes généraux de l'énergétique ; les créateurs de ces principes ont sans doute profondément ignoré la possibilité des merveilleuses applications qu'une science nouvelle en ferait

M. Bouasse part d'un système de c composants sous φ phases distinctes d'où il résulte $c\varphi$ potentiels différents. Dans la phase α de masse M_α, le premier composant entre dans le rapport $s_{1\alpha} = M_{1\alpha} : M_\alpha$. On définit ainsi des s à deux indices appelés *concentrations* dont le nombre est aussi égal à $c\varphi$. Si le système est en équilibre le potentiel de chaque composant a la même valeur dans toutes les phases. Chaque phase fournit donc $\varphi - 1$ éga-

lités entre potentiels d'où en tout, $c(\varphi - 1)$ équations. Comme d'autre part on a φ identités du type

$$M_{1\alpha} + M_{2\alpha} + \cdots + M_{c\alpha} = M_\alpha$$
ou
$$s_{1\alpha} + s_{2\alpha} + \cdots + s_{c\alpha} = 1,$$

on a finalement $c(\varphi - 1) + \varphi$ équations entre $c\varphi$ concentrations, la pression et la température. La différence $v = 2 + c - \varphi$ est la *variance* du système. Il y a des systèmes *invariants*, *univariants*, *bivariants*, *plurivariants* qui, ces définitions posées, vont être examinés en détail. Le chapitre IV est consacré tout entier au système univariant formé par un liquide et sa vapeur. Le chapitre V a trait aux dissolutions. C'est intentionnellement que je rapproche immédiatement ces parties. Sous des rubriques fort diverses on retrouvera l'unité à laquelle j'ai déjà fait allusion. On admirera la merveilleuse élasticité des formules initiales et des principes. Les équations de Van der Waals, de Clapeyron, etc..., serviront aussi bien dans les dissolutions que dans les gaz ; on s'enrichira d'innombrables faits physiques, les généralités mathématiques restant toujours les mêmes. Ce qu'il faut remarquer aussi c'est l'élégance et l'extrême utilité des méthodes graphiques. Suivre les corps sous leurs phases différentes, c'est parcourir un plan où deux axes représentent la température et la pression et où sont tracées des courbes que l'on franchit lorsque la phase change ; aux singularités des phénomènes physiques correspondent les singularités géométriques des courbes en question.

Quand au chapitre VI nous arrivons à l'hypothèse de la dissociation en *ions* et à la notion de pression osmotique l'analogie des gaz et des solutions apparaît déjà comme parfaite et définitive. Sans doute il semble que ce soit là le domaine de l'électricité mais, comme le fait bien remarquer M. Bouasse, un courant électrique ne crée pas d'ions ; il les met en mouvement et les oriente, rien de plus. Dès lors, si au point de vue historique on peut soutenir que l'idée d'ionisation soit née de l'interprétation de phénomènes d'électrolyse, n'est-il pas plus naturel d'étudier maintenant les solutions ionisées indépendamment de toute excitation électrique extérieure. Et ensuite on passera sans à-coup, sans discontinuité de la solution ionisée à la solution électrolysée ou à la pile. Que de choses curieuses se trouvent aussi révélées à propos de la pression osmotique, c'est-à-dire de la pression que subit une paroi perméable à un dissolvant mais imperméable à un corps dissous qui ne se trouve que d'un seul côté de la paroi. Je rappelle simplement que dans le cas où la solution est très étendue il existe une relation due à Van t'Hoff analogue à l'équation des gaz parfaits $pv = RT$ à un coefficient i près ; c'est là le coefficient *isotonique* qui d'ailleurs ne diffère de *1* que pour les électrolytes.

Voici maintenant en deux pages les formules fondamentales de la tonométrie et de la cryocospie ; il y a encore là une application fort simple de la formule de Clapeyron. Les chapitres VII et VIII se rapportent, comme je l'ai fait pressentir tout à l'heure, aux piles présentées d'abord comme des machines thermiques. Nous trouverons là un paragraphe très intéressant quant à l'influence de la pression sur la force électromotrice. L'idée générale qui intervient dans ces chapitres est celle de *force électromotrice de contact*. Envisagée d'abord dans les piles thermo-électriques elle conserve sa physionomie dans un circuit où toutes les parties ne sont pas mé-

talliques. Sans doute certaines hypothèses, comme celle de Nernst sur l'ionisation des métaux placés dans un liquide, peuvent sembler d'une trop grande hardiesse, mais, comme on peut appliquer des considérations analogues aux chaînes thermo-électriques, on se trouve, en fin de compte, en présence de généralités que M. Bouasse a eu grandement raison de signaler.

Le chapitre IX est consacré à la théorie cinétique des gaz. Il me semble inutile de rappeler en quoi elle consiste. Les questions relatives à la répartition des vitesses des molécules sont particulièrement captivantes ; la détermination d'une unité naturelle d'électricité ne l'est pas moins. C'est la charge que transporte un atome d'hydrogène, charge déduite de celle transportée par un gramme de ce gaz et de l'idée approximative que l'on peut se faire de la répartition des atomes dans un volume connu du même corps. M. Bouasse parle brièvement de la théorie cinétique des liquides, à peine ébauchée sans doute, mais à laquelle les mouvements browniens donnent cependant une saisissante réalité.

Dans la théorie des explosifs (ch. X) la notion de température d'inflammation est soigneusement précisée. Dans la mesure des hautes pressions dues aux explosifs solides nous retrouvons une des formules des gaz réels simplifiée pour le cas d'une pression et d'une température considérables ; la vitesse de propagation d'une onde est étudiée par la méthode de Hugoniot avec rappel des expériences de vérification dues à Vieille.

Quant à la conduction thermique (ch. XI), outre les problèmes classiques tels ceux du mur et de la sphère, elle donne lieu à un paragraphe remarquable sur la variation de l'entropie du fait de la conductibilité et surtout à des conclusions relatives aux corps anisotropes qui feront désirer vivement l'apparition du troisième volume consacré à l'Electricité. Les conductibilités thermique et électrique des cristaux se présentent sous les mêmes apparences analytiques ; c'est une nouvelle raison justifiant la présence de théories électriques dans un livre qui doit apparaître comme lié de façon intime à celui où se continuera cette belle et grande œuvre.

A. Buhl (Montpellier).

G.-H. Chandler. — **Elements of the Infinitesimal Calculus.** — 1 vol., in-12. relié, 319 p., 146 fig. ; 3e édit. ; $ 2; John Wiley and Sons, New-York.

Osw. Veblen and N. J. Lennes. — **Introduction to Infinitesimal Analysis.** Functions of one real variable. — 1 vol. in-8, relié, 227 p., 22 figures ; $ 2 ; John Wiley and Sons, New-York.

Voici deux manuels d'Analyse édités par la maison bien connue John Wiley & Sons à New-York. Ils possèdent tous deux les qualités de clarté et de concision qu'il n'est pas rare de trouver dans les ouvrages mathématiques américains. Etablir les propriétés fondamentales indispensables dans une première étude, les accompagner d'exemples bien choisis qui illustrent en quelque sorte la théorie, ce sont là deux points importants à observer par les auteurs d'ouvrages élémentaires et, dans le cas présent, ils s'y sont bien conformés.

Le petit traité de M. Chandler paraît en 3e édition. Il s'adresse plus particulièrement aux étudiants des écoles d'ingénieurs et il leur présente, sous une forme très condensée, les éléments du calcul différentiel et intégral avec de nombreuses applications aux calculs des aires, des volumes, des centres de gravité, des moments d'inertie, des intégrations par approxima-

tion, etc. Il se termine par des tables utiles à l'ingénieur et concernant les logarithmes népériens, les fonctions circulaires et hyperboliques, les fonctions lambda et gamma, et les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

L'*Introduction to infinitesimal Analysis*, de MM. Veblen et Lennes, est destiné aux étudiants qui ont à compléter les éléments d'Analyse et qui abordent l'étude des fonctions à une variable réelle. Les théorèmes fondamentaux sont naturellement établis avec rigueur tout en évitant des développements inutiles. Les auteurs partent de l'étude du système des nombres réels : nombres rationnels et irrationnels, algébriques et transcendants ; transcendance de e et de π ; puis, ils examinent la correspondance entre les nombres et les points sur un segment. Ces bases une fois bien établies, les auteurs passent aux notions de fonction, de limites, de la continuité d'une fonction d'une variable réelle et étudient, d'une manière approfondie, les dérivées et les différentielles, les séries de Taylor et les propriétés essentielles des intégrales définies. H. F.

H. Durège. — **Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Grösse.** In fünfter Auflage neu bearbeitet von *Ludwig Maurer*. — 1 vol. in-8° ; 397 p. ; 10 Mk., B. G. Teubner, Leipzig.

Cette édition nouvelle de l'excellent livre de Durège rendra de précieux services aux étudiants de nos universités. L'exposé convient à une première étude de la théorie des fonctions ; il ne suppose chez le lecteur que des connaissances élémentaires et le conduit jusqu'à une compréhension véritable du sujet.

M. Maurer a conservé intégralement la Préface où Durège présente, d'une façon claire et simple, ses idées sur la généralisation de la notion de nombre. Le reste de l'ouvrage a été rajeuni en maints endroits ; le dernier chapitre, relatif aux équations différentielles linéaires du 2^d^ ordre, est entièrement nouveau.

Reprenant les choses au début, l'auteur définit les nombres irrationnels à la manière de Dedekind ; il donne quelques notions indispensables sur les ensembles et rappelle les propositions fondamentales de la théorie des grandeurs réelles et de leurs fonctions ; quelques exemples bien choisis, montrent que l'on ne peut pas toujours se contenter de l'intuition géométrique. Le 2me chapitre traite des nombres complexes, de leur représentation dans le plan et sur la sphère, et des transformations qui changent des cercles en cercles.

Les deux chapitres suivants nous amènent au centre du sujet : définition des fonctions analytiques, représentation conforme, théorèmes de Cauchy relatifs à l'intégration d'une fonction complexe et aux résidus, séries et produits infinis, convergence uniforme, séries de Taylor, de Laurent et de Fourier ; les applications sont variées et intéressantes ; citons en particulier, la détermination des « sommes de Gauss » qui jouent un rôle important dans la théorie de la division du cercle.

Un chapitre est consacré aux fonctions transcendantes élémentaires, aux fonctions uniformes et à leur décomposition soit en *éléments simples* (indiquant la façon dont elles deviennent infinies), soit en *facteurs primaires* (mettant en évidence les zéros et les pôles). Les théorèmes généraux sont appliqués aux fonctions doublement périodiques et à leurs représentations au moyen des fonctions p et p', ζ et σ de Weierstrass ; l'auteur a men-

tionné, en outre, la fonction H de Jacobi, utile pour le calcul numérique, car son développement en série trigonométrique converge très rapidement.

On arrive ensuite aux fonctions non uniformes ; un premier chapitre comprend le prolongement analytique, l'étoile de M. Mittag-Leffler (utilisée pour définir les surfaces de Riemann), et le principe de symétrie de M. Schwarz (appliqué à la représentation conforme d'un rectangle sur le demi-plan).

Les fonctions non uniformes les plus simples, les fonctions algébriques, sont traitées dans le chapitre suivant, qui contient le développement en séries, la détermination des cycles et la surface de Riemann correspondante ; un exemple numérique éclaircit ces notions importantes.

Durège avait fait ici une étude détaillée des intégrales de fonctions algébriques ; M. Maurer l'a supprimée et l'a remplacée par un des chapitres les plus instructifs du livre ; il est consacré à cette classe d'équations différentielles qui a acquis une si grande importance depuis une cinquantaine d'années : les équations linéaires homogènes. L'auteur s'est borné toutefois aux équations du 2[d] ordre à coefficients rationnels ; mais, en étudiant à fond ce cas particulier, il a su donner une idée claire et simple de la théorie générale pour tout ce qui concerne le groupe de l'équation, la nature des solutions aux environs d'un point singulier, la forme des coefficients nécessaire et suffisante pour que les intégrales soient régulières. M. Maurer insiste sur cette classe remarquable d'équations (étudiée par Fuchs) dont toutes les intégrales sont régulières en un point singulier ; il en déduit les propriétés fondamentales de la série hypergéométrique. Au moyen du quotient de deux solutions de l'équation hypergéométrique, on arrive à une représentation conforme du demi-plan sur un triangle curviligne et l'on est conduit sans peine à ces transcendantes de M. Schwarz qui ne peuvent plus être prolongées analytiquement au-delà d'une frontière naturelle et qui sont, avec la fonction modulaire, les types les plus simples des fonctions automorphes.

Louis Kollros (La Chaux-de-Fonds).

A. Conti. — **Elementi di Aritmetica razionale** ad uso degli allievi delle scuole normali. Terza edizione (286 p.) Prix : L. 2.

— **Elementi di Calcolo letterale** con un'appendice sull'estrazione della radice quadrata e cubica, ad uso della 1[a] normale. (120 p.), L. 1.

— **Elementi di Calcolo letterale** per la III[a] classe tecnica. (120 p.), L. 1. Nicola Zachinelli, Bologna.

Le premier de ces trois manuels est *destiné aux élèves des écoles normales* ; il traite des objets suivant : 1° Grandeurs, nombres, nombres décimaux. — 2° Les quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux. — 3° Rapports et proportions entre les nombres. — 4° La proportionalité entre des grandeurs ; règle de trois. — Plan d'études et instructions concernant l'enseignement de l'arithmétique dans les écoles élémentaires ; conseils didactiques. — 6° Exercices et problèmes (au nombre de 200).

Le second ouvrage donne les éléments du calcul littéral. Après une introduction sur l'étude du calcul algébrique, l'auteur examine successivement les identités, les équations du premier degré, l'extention de la notion de nombre, les nombres négatifs, les expressions algébriques et l'extraction des racines carrées et cubiques.

Le troisième manuel embrasse un champ un peu moins étendu ; il donne

par contre plus de développement aux opérations du premier degré à plusieurs inconnues. Il se termine par un excellent choix de problèmes, au nombre de 125.

Rédigé avec soin, par un auteur bien au courant des plans d'études et des besoins pédagogiques de l'enseignement élémentaire, ces trois volumes sont appelés à rendre de grands services à l'enseignement élémentaire en Italie. Des ouvrages analogues seraient également désirables dans d'autres pays.

E. Kaller (Vienne).

E. A. Fouët. — **Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques**. Deuxième édition. Premier fascicule ; 1 vol. gr. in-8° de XIV, 112 p. — 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

La première édition de cet ouvrage formait deux volumes analysés déjà dans *l'Enseignement mathématique*, l'un en 1903 (p. 387) par M. D. Mirimanoff, l'autre en 1905 (p. 325) par moi. Quelque infime que soit le travail constitué par une analyse bibliographique, les auteurs en seront cependant fiers si certaines de leurs prédictions paraissent réalisées et rarement prédictions de succès le furent mieux que par l'œuvre de M. Fouët, laquelle avait pour but de rassembler brièvement, sous forme élémentaire et facilement accessible, les résultats acquis aujourd'hui dans l'étude des fonctions analytiques. La réussite fut si complète, les services que pouvait rendre le livre semblèrent si évidents qu'une seconde édition fait place maintenant à la première. Elle contiendra un aperçu des nouvelles richesses acquises à la Science dans ces derniers temps. L'auteur n'essaie pas d'ailleurs de tout compléter à la fois. Jusqu'ici c'est seulement l'introduction du tome I, contenant primitivement 65 pages, qui est rééditée, mais le seul fait de l'avoir portée à 112 pages montre assez à quel travail supplémentaire elle a donné lieu.

Nous étudions d'abord les idées fondamentales de nombre et de fonction. Beaucoup d'additions concernent les fonctions de variables réelles ce qui, au premier abord, peut sembler hors de propos dans un ouvrage consacré aux fonctions analytiques, mais ces dernières fonctions n'ont-elles pas été déduites d'abord de l'idée de fonction continue et cette dernière notion elle-même n'a-t-elle pas été disséquée et intimément fouillée par des récentes recherches telles que celles de M. R. Baire. Il est donc tout naturel à l'heure actuelle de chercher d'abord à se faire une idée aussi large que possible de la fonction définie uniquement dans le champ réel. Et c'est une étude qui est loin de manquer d'intérêt si l'on songe par exemple aux fonctions continues sans dérivées et aux courbes de Peano qui remplissent une aire. Après l'analyse de la notion de limite vient un aperçu de la théorie des ensembles. J'y signalerai surtout ce qui concerne les notions du transfini, de l'ensemble bien ordonné, du continu qui, suivant les points de vue, peut être considéré ou non comme un ensemble bien ordonné ; enfin les notions de mesure dues particulièrement à MM. Jordan et Borel. Suit une première classification des fonctions. La plus grande difficulté paraît être de classer les fonctions discontinues au sujet desquelles on pourrait encore rappeler les travaux de M. Baire et l'intéressant *principe de condensation* dû à Hankel, qui permet, étant donné une fonction à discontinuités isolées, d'en déduire une autre ayant des singularités du même type dans tout intervalle. Voici encore les fonctions *mesurables* (Lebesgue), *intégrables* (Riemann), *ponctuellement discontinues* sur tout ensemble parfait (Baire), etc., etc...

Si l'on classe les fonctions par les représentations dont elles sont sus-

ceptibles on retrouve notamment les *classes* de M. Baire, une fonction de classe n étant représentée par une série de polynomes n uple. Dans les considérations de ce genre la théorie des ensembles joue un rôle absolument fondamental. Pendant longtemps, par exemple, on a considéré une expression dépendant de plusieurs fonctions arbitraires ou d'une infinité multiple de coefficients comme plus générale qu'une autre ne contenant qu'une fonction ou qu'une infinité simple de nombres arbitraires ; aujourd'hui on ne voit plus là que des ensembles qui s'équivalent comme ayant le même caractère de dénombrabilité. Abordons maintenant les fonctions analytiques proprement dites. Nous n'y arrivons pas encore sans analyser définitivement la notion plus générale de fonction continue qui tout récemment a conduit à des distinctions aussi utiles qu'intéressantes. Ainsi une fonction de plusieurs variables peut être continue par rapport à toutes ses variables considérées isolément mais non par rapport à leur ensemble. Pour définir la fonction analytique, M. Fouët tire le plus grand parti possible de la définition de Cauchy : c'est une fonction $u(x,y) + i\,v(x,y)$ de $z = x + iy$ ayant une dérivée unique par rapport à z. La définition de Riemann, concernant les équations de Laplace $\Delta u = 0$ ou $\Delta v = 0$, vient ensuite. Elle est suivie des interprétations géométriques fournies par les transformations isogonales ou la représentation conforme. Le fascicule se termine par les définitions des singularités qui se rencontrent dans les différents domaines où la fonction est considérée et par l'étude sommaire des substitutions qui changent certaines fonctions en elles-mêmes (fonctions périodiques, automorphes, modulaires, etc...) Qu'il me soit permis d'insister sur la façon dont les choses sont disposées. Le texte courant contient les idées générales, simples et philosophiques ; d'innombrables notes au bas des pages complètent ce texte d'une façon extraordinairement substantielle et renvoient aux mémoires originaux. Il n'est plus utile d'adresser de souhaits à l'auteur ; espérons seulement, pour tout le monde, une publication rapide de ce qui complétera cette seconde édition.

A. Buhl (Montpellier).

C. A. Scott. — **Cartesian Plane Geometry**. Part I : Analytical Conics. — 1 vol. in-16, 428 p. (Dent's serie of mathematical text books). J. M. Dent et C°, Londres.

Après la mort tragique de M. Hudson, qui devait écrire une « Cartesian Plane Geometry » pour la collection Dent of (Dent's series of mathematical and scientific text books for Schools) Miss Scott fut chargée de compléter ou de récrire le livre. Très connue pour ses publications en géométrie analytique, elle était bien qualifiée pour cette tâche. Elle suivit son propre plan tout en s'inspirant volontiers des idées de M. Hudson, dont les manuscrits avaient été mis à sa disposition par M. Greenstreet, le directeur de la collection.

Le chapitre d'introduction traite des différents signes des grandeurs géométriques et de la représentation des points par des rapports. Cette innovation est due à M. Hudson et ne se trouve généralement pas dans les manuels anglais.

Sans entrer dans un compte rendu détaillé des divers chapitres habituels on peut mentionner un caractère important du livre, à savoir l'introduction dès le début, des coordonnées de point et des coordonnées linéaires suivant la méthode de Clebsch. Cette façon de procéder est vivement recommandée aux autres auteurs de géométrie analytique.

La définition bien connue de Pappus sert de base à la théorie des coniques. Il est alors possible d'en faire une étude uniforme et logique, ce qui est bien supérieur à la méthode si peu avantageuse qui consiste à prendre comme définition des coniques certaines propriétés particulières.

Les chapitres qui suivent la définitiou des coniques traitent de la relation entre les lignes droites et les courbes, tangentes et polaires, cordes et diamètres, asymtotes, propriétés des coniques, changement d'axes, systèmes de coniques et applications variées.

L'étude en est parfaitement claire et rigoureuse. Certaines parties auraient pu être traitées d'une façon plus concise. Au point de vue typographique, il aurait été avantageux pour l'étudiant que les en-têtes, définitions, théorèmes, etc. eussent été indiqués en caractères plus gros.

Mais, abstraction faite de ces critiques secondaires, le livre du professeur Scott peut être chaudement recommandé aux maîtres et aux élèves.

A. Emch (Soleure).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques:

Rendiconti del Circolo Matematica di Palermo, Direttore G.-B. Guccia.

Tome XXIV, 2me semestre 1907. — Luigi Berzolari : Sulle curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione. — Carlo Severini : Sul primo teorema fondamentale die Lie nella teoria dei gruppi di trasformazioni. — Pasquale Grossi : Sul moto di un punto sollecitato da una forza la cui linea d'azione giace sempre in un complesso lineare. — Giuseppe Marletta : Sulle curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione. — Leo Koenigsberger : Über die Entwicklung algebraischer Functionen. — Giulio Giraud : Complemento ad una Nota del sig. Emch. — J. V. Pexider : Sur la fonction E (x) représentant l'entier contenu dans x. — C. Burali. Forti e R. Marcolongo : Per l'unificazione delle notazioni vettoriali (Nota II). Edmund Landau : Über die Multiplikation Dirichlet'scher Reihen. — Riccardo Bucca : Sul gruppo semplice di 168 collineazioni piane. — A. B. Basset : On Quintic Surfaces having a Tacnodal Conic. — W. H. Young : A Theorem in the Theory of Functions of a Real Variable. — Paolo Medolaghi : Sopra i gruppi definiti da equazioni differenziali del primo ordine. — Pierre Boutroux : Sur les fonctions-limites des fonctions multiformes. — Luigi Sinigallia : Sui nuovi numeri pseudo-euleriani del prof. Pascal. — G. Marletta : Sulla identità cremoniana di due curve piane. — Orazio Tedone : Sul problema dell'equilibrio delle temperature in un ellissoide a tre assi disuguali. — Georges Remoundos : Sur les intégrales réelles des équations differentielles et les forces centrales. — Corradino Mineo : Le antiradiali del cerchio. — C. J. Keyser : Circle Range Transversals of Circle Ranges in a Plane : A problem of Simple Construction. — Eugenio Elia Levy : Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. — C. Burali-Forti e R. Marcolongo : Per l'unificazione delle notazioni vettoriali

(Nota III). — Ernst Richard Neumann : Die Randwertaufgaben für den Innen- und Aussenraum derselben geschlossenen Fläche in ihren gegenseitigen Beziehungen. — Henri Lebesgue : Sur le problème de Dirichlet. — Ettore Bortolotti : Sulla publicazione delle « Opere Matematiche » di Paolo Ruffini e del suo « Carteggio » con gli scienziati del suo tempo.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens u. W. Wirtinger. — Eisenstein & C°; Wien.

XIX. Jahrgang (1908); 1., 2. Vierteljahr. — H. Tietze : Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. — M. Lerch : Über einige Punkte der Theorie der Euler'schen Integrale. — Paul Ernst : Zusammenhang zwischen dem Küpper'schen und Plücker'schen Konoid. — J.-A. Gmeiner : Einige Bemerkungen zu dem Weierstrass'schen Kriterium für unendliche Reihen mit komplexen Gliedern. — Niels Nielsen : Über das Produkt zweier Zylinderfunktionen. — Theodor Schmid : Bemerkung zur Euler'schen Gleichung.

Revue de Métaphysique et de Morale, X. Léon. — A. Colin, Paris.

15me année, nov. 1907. — E. Borel : L'évolution de l'intelligence géométrique.

16me année, janv.-mai, 1908. — H. Bouasse : Evolution de la matière et physique des corps solides. — Réponse de M. Le Bon. — H. Bergson : A propos de l'évolution de l'intelligence géométrique. — Réponse de M. Borel. — M. Winter : Importance philosophique de la théorie des nombres.

Revue du Mois, dirigée par E. Borel. — Le Soudier, Paris.

3me année, 1908, janvier-juin. — J. Tannery : La méthode en mathématiques. — G. Le Bon : A propos de l'évolution des forces. — E Picard : De la science. — E. Borel : Le rôle social des amateurs. — M. Brillouin : Lord Kelvin. — Pierre Boutroux : Les origines du Calcul des probabilités.

2. Livres nouveaux :

W. S. Andrews. — **Magic Squares and Cubes** with chapters by Paul Carus, L. S. Frierson, C. A. Browne, and an introduction by Paul Carus. — 1 vol. in-8°, 199 p. ; relié ; The Open Court Publishing Company, Chicago.

G. Arnoux. — **Arithmétique graphique.** Les espaces arithmétiques, leurs transformations. — 1 vol. in-8°, XII-84 p. ; 3 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

R. Baire. — **Leçons sur les Théories générales de l'Analyse.** Tome II : Variables complexes. Applications géométriques. — 1 vol, in-8°, X-347 p. ; 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

H. Burkhardt. — **Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung** und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. — 1 vol. in-8°, XI-252 p. ; relié 6 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

O. Buyse. — **Méthodes américaines d'Education générale et technique.** — 1 vol. gr. in-8°. 744 p. ; Dunod & Pinat, Paris ; Musée provincial Charleroi.

E. Combette et J. Girod. — **Cours de Mécanique** pour la classe de Mathématiques spéciales. — 1 vol. in-8°, 438 p, ; Félix Alcan, Paris.

F. Enriques. — **Fragen der Elementargeometrie.** Aufsätze von U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Gacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali. Deutsche

Ausgabe von H. Fleischer. Teil II : Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. — 1 vol. in-8°, 348 p. : relié 9 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Fehr. — **Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale.** 2e Edition, conforme à la 1re. — 1 vol. in-8°, 94 p. ; 4 fr. ; Georg Co, Genève.

H. Fehr. — **Enquête de « l'Enseignement Mathématique » sur la Méthode de travail des Mathématiciens** avec la collaboration de Th. Flournoy et Ed. Claparède. — 1 vol. gr. in-8°, 126 p. ; 5 fr.; Georg & Co, Genève ; Gauthier-Villars, Paris.

International Catalogue of Scientific Literature. *A* Mathematics. — Vol. 5 : Material received between June 1905 and May 1906 ; vol. 6 : June 1906-April 1907, 2 vol. in-8°, 18 fr. 75 le volume ; Gauthier-Villars, Paris.

E Jouguet. — **Lectures de Mécanique.** La Mécanique enseignée par les auteurs originaux. Première partie : La naissance de la mécanique. — 1 vol. gr. in-8°, 208 p. ; 7 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

C. A. Laisant. — **Iniziazione alle matematiche.** Trad. di G. Lazzeri. — 1 vol. in-16° con 103 fig. nel testo ; 2 L. ; G. Barbera Firenze.

G. de Laplanche. — **Etudes sur les Angles imaginaires.** 1 vol. in-8°, 135 p. ; 3 fr. ; A. Hermann, Paris.

R. Le Vavasseur. — **Quelques Démonstrations relatives à la Théorie des nombres entiers complexes cubiques.** Propriété de quelques groupes d'ordre fini. 1 vol. in-8°, 66 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

W. Ostwald. — **Grundriss der Naturphilosophie** (Bücher der Naturwissenschaft, herausgegeben von Prof. Dr Siegmund Günther). — 1 vol. p. in-16°, 80 Pf. ; Philipp Reclam jun., Leipzig.

E. Parisot et F. Henry. — **Les meilleures pages des Ecrivains pédagogiques de Rabelais au XXe siècle,** avec une préface de Jules Payot. — 1 vol. in-18 jésus, 364 p. ; 3 fr. ; Armand Colin, Paris.

F. Pietzker, — **Kegelschnittslehre** im Zusammenhang mit den Anfangsgründen der analytischen Geometrie (Teil III des Lehrganges der Elementar-Mathematik). — 1 vol. in-8°, 96 p. ; 1 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

O. Richter. — **Kreis und Kugel in senkrechter Projektion** für den Unterricht und zum Selbststudium. — 1 vol. in-8°, 187 p. ; broch. 4 M. 40 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Catalogue dédié au 4e Congrès international des Mathématiciens :

B.-G. Teubner's Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften. Mit einem Gedenktagebuche für Mathematiker und Bildnissen von Galilei, Bruns, M. Cantor, Helmert, F. Klein, Fr. Kohlrausch, Kraepelin, C. Neumann, A. Penck, A. Wüllner, sowie einem Anhange Unterhaltungslitteratur enthaltend. — 1 vol. in-8°, CXXXII-392 + 92 pages. Leipzig, avril, 1908. — Le catalogue est envoyé gratuitement à tous ceux qui en font la demande à l'éditeur.

ERRATUM

p. 248, ligne 10, lire :

Présidence, sur la proposition de M. Luiggi, introducteur, M. d'Ocagne a été appelé à présider la séance.

L'INVENTION MATHÉMATIQUE [1]

PAR

Henri Poincaré

Membre de l'Académie des sciences et de l'Académie française.

La genèse de l'invention mathématique est un problème qui doit inspirer le plus vif intérêt au psychologue. C'est l'acte dans lequel l'esprit humain semble le moins emprunter au monde extérieur, où il n'agit ou ne paraît agir que par lui-même et sur lui-même, de sorte qu'en étudiant le processus de la pensée géométrique, c'est ce qu'il y a de plus essentiel dans l'esprit humain que nous pouvons espérer atteindre.

On l'a compris depuis longtemps, et, il y a quelques mois, une revue intitulée l'*Enseignement mathématique*, et dirigée par MM. Laisant et Fehr, a entrepris une enquête sur les habitudes d'esprit et les méthodes de travail des différents mathématiciens [2]. J'avais arrêté les principaux traits de ma conférence quand les résultats de cette enquête ont été publiés ; je n'ai donc guère pu les utiliser. Je me bornerai à dire que la majorité des témoignages confirment mes conclusions ; je ne dis pas l'unanimité, car, quand on consulte le suffrage universel, on ne peut se flatter de réunir l'unanimité.

I

Un premier fait doit nous étonner, ou plutôt devrait nous étonner, si nous n'y étions si habitués. Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les Mathéma-

---

[1] Conférence faite à Paris, à l'*Institut général psychologique*, le 23 mai 1908 ; reproduite avec l'autorisation de l'auteur. *(Réd.)*

[2] Voir les résultats dans les tomes VII (1905) à X (1908) ; l'ensemble des articles contenant les résultats de l'enquête forme un volume de 126 p., Paris-Genève, 1908. *(Réd.)*

tiques ? Si les Mathématiques n'invoquent que les règles de la Logique, celles qui sont acceptées par tous les esprits bien faits, si leur évidence est fondée sur des principes qui sont communs à tous les hommes et que nul ne saurait nier sans être fou, comment se fait-il qu'il y ait tant de personnes qui y soient totalement réfractaires ?

Que tout le monde ne soit pas capable d'invention, cela n'a rien de mystérieux. Que tout le monde ne puisse retenir une démonstration qu'il a apprise autrefois, passe encore. Mais que tout le monde ne puisse pas comprendre un raisonnement mathématique au moment où on le lui expose, voilà qui paraît bien surprenant quand on y réfléchit. Et pourtant ceux qui ne peuvent suivre ce raisonnement qu'avec peine sont en majorité ; cela est incontestable, et l'expérience des maîtres de l'enseignement secondaire ne me contredira certes pas.

Et il y a plus ; comment l'erreur est-elle possible en Mathématiques ? Une intelligence saine ne doit pas commettre de faute de logique, et cependant il y a des esprits très fins, qui ne broncheront pas dans un raisonnement court tel que ceux que l'on a à faire dans les actes ordinaires de la vie, et qui sont incapables de suivre ou de répéter sans erreur les démonstrations des Mathématiques qui sont plus longues, mais qui ne sont, après tout, qu'une accumulation de petits raisonnements tout à fait analogues à ceux qu'ils font si facilement. Est-il nécessaire d'ajouter que les bons mathématiciens eux-mêmes ne sont pas infaillibles ?

La réponse me semble s'imposer. Imaginons une longue série de syllogismes, et que les conclusions des premiers servent de prémisses aux suivants ; nous serons capables de saisir chacun de ces syllogismes, et ce n'est pas dans le passage des prémisses à la conclusion que nous risquons de nous tromper. Mais, entre le moment où nous rencontrons pour la première fois une proposition, comme conclusion d'un syllogisme, et celui où nous la retrouvons comme prémisse d'un autre syllogisme, il se sera écoulé parfois beaucoup de temps, on aura déroulé de nombreux anneaux de la chaîne ; il peut donc arriver qu'on l'ait oubliée, ou, ce qui

est plus grave, qu'on en ait oublié le sens. Il peut donc se faire qu'on la remplace par une proposition un peu différente, ou que, tout en conservant le même énoncé, on lui attribue un sens un peu différent, et c'est ainsi qu'on est exposé à l'erreur.

Souvent le mathématicien doit se servir d'une règle : naturellement il a commencé par démontrer cette règle ; au moment où cette démonstration était toute fraîche dans son souvenir, il en comprenait parfaitement le sens et la portée, et il ne risquait pas de l'altérer. Mais ensuite il l'a confiée à sa mémoire et il ne l'applique plus que d'une façon mécanique ; alors, si la mémoire lui fait défaut, il peut l'appliquer tout de travers. C'est ainsi, pour prendre un exemple simple et presque vulgaire, que nous faisons quelquefois des fautes de calcul parce que nous avons oublié notre table de multiplication.

A ce compte, l'aptitude spéciale aux Mathématiques ne serait due qu'à une mémoire très sûre, ou bien à une force d'attention prodigieuse. Ce serait une qualité analogue à celle du joueur de whist, qui retient les cartes tombées ; ou bien, pour nous élever d'un degré, à celle du joueur d'échecs, qui peut envisager un nombre très grand de combinaisons et les garder dans sa mémoire. Tout bon mathématicien devrait être en même temps bon joueur d'échecs, et inversement ; il devrait être également un bon calculateur numérique. Certes, cela arrive quelquefois : ainsi Gauss était à la fois un géomètre de génie et un calculateur très précoce et très sûr.

Mais il y a des exceptions, ou plutôt je me trompe ; je ne puis pas appeler cela des exceptions, sans quoi les exceptions seraient plus nombreuses que les cas conformes à la règle. C'est Gauss, au contraire, qui était une exception. Quant à moi, je suis obligé de l'avouer, je suis absolument incapable de faire une addition sans faute. Je serais également un fort mauvais joueur d'échecs ; je calculerais bien qu'en jouant de telle façon, je m'expose à tel danger ; je passerais en revue beaucoup d'autres coups que je rejetterais pour d'autres raisons, et je finirais par jouer le coup d'abord examiné, ayant oublié dans l'intervalle le danger que j'avais prévu.

En un mot, ma mémoire n'est pas mauvaise, mais elle serait insuffisante pour faire de moi un bon joueur d'échecs. Pourquoi donc ne me fait-elle pas défaut dans un raisonnement mathématique difficile, où la plupart des joueurs d'échecs se perdraient ? C'est évidemment parce qu'elle est guidée par la marche générale du raisonnement. Une démonstration mathématique n'est pas une simple juxtaposition de syllogismes : ce sont des syllogismes *placés dans un certain ordre*, et l'ordre dans lequel ces éléments sont placés est beaucoup plus important que ne le sont ces éléments eux-mêmes. Si j'ai le sentiment, l'intuition, pour ainsi dire, de cet ordre, de façon à apercevoir d'un coup d'œil l'ensemble du raisonnement, je ne dois plus craindre d'oublier l'un des éléments ; chacun d'eux viendra se placer de lui-même dans le cadre qui lui est préparé, et sans que j'aie à faire aucun effort de mémoire.

Il me semble alors, en répétant un raisonnement appris, que j'aurais pu l'inventer ; ou plutôt, même si cela est une illusion, si je ne suis pas assez fort pour créer par moi-même, je le réinvente moi-même, à mesure que je le répète.

On conçoit que ce sentiment, cette intuition de l'ordre mathématique, qui nous fait deviner des harmonies et des relations cachées, ne puisse appartenir à tout le monde. Les uns ne posséderont ni ce sentiment délicat et difficile à définir, ni une force de mémoire et d'attention au-dessus de l'ordinaire, et alors ils seront absolument incapables de comprendre les Mathématiques un peu élevées ; c'est le plus grand nombre. D'autres n'auront ce sentiment qu'à un faible degré, mais ils seront doués d'une mémoire peu commune et d'une grande capacité d'attention. Ils apprendront par cœur les détails les uns après les autres ; ils pourront comprendre les Mathématiques et quelquefois les appliquer, mais ils seront hors d'état de créer. Les autres, enfin, posséderont à un plus ou moins haut degré l'intuition spéciale dont je viens de parler, et alors non seulement ils pourront comprendre les Mathématiques, quand même leur mémoire n'aurait rien d'extraordinaire, mais ils pourront devenir créateurs et chercher à inventer avec plus ou moins de suc-

cès, suivant que cette intuition est chez eux plus ou moins développée.

Qu'est-ce, en effet, que l'invention mathématique ? Elle ne consiste pas à faire de nouvelles combinaisons avec des êtres mathématiques déjà connus. Cela, n'importe qui pourrait le faire ; mais les combinaisons que l'on pourrait faire ainsi seraient en nombre fini, et le plus grand nombre est absolument dépourvu d'intérêt. Inventer, cela consiste précisément à ne pas construire les combinaisons inutiles et à construire celles qui sont utiles et qui ne sont qu'une infime minorité. Inventer, c'est discerner, c'est choisir.

Comment doit se faire ce choix, je l'ai expliqué ailleurs ; les faits mathématiques dignes d'être étudiés, ce sont ceux qui, par leur analogie avec d'autres faits, sont susceptibles de nous conduire à la connaissance d'une loi mathématique, de la même façon que les faits expérimentaux nous conduisent à la connaissance d'une loi physique. Ce sont ceux qui nous révèlent des parentés insoupçonnées entre d'autres faits, connus depuis longtemps, mais qu'on croyait à tort étrangers les uns aux autres.

Parmi les combinaisons que l'on choisira, les plus fécondes seront souvent celles qui sont formées d'éléments empruntés à des domaines très éloignés. Je ne veux pas dire qu'il suffise pour inventer de rapprocher des objets aussi disparates que possible ; la plupart des combinaisons qu'on formerait ainsi seraient entièrement stériles ; mais quelques-unes d'entre elles, bien rares, sont les plus fécondes de toutes.

Inventer, je l'ai dit, c'est choisir ; mais le mot n'est peut-être pas tout à fait juste. Il fait penser à un acheteur à qui l'on présente un grand nombre d'échantillons, qui les examine l'un après l'autre de façon à faire son choix. Ici les échantillons seraient tellement nombreux qu'une vie entière ne suffirait pas pour les examiner. Ce n'est pas ainsi que les choses se passent. Les combinaisons stériles ne se présenteront même pas à l'esprit de l'inventeur. Dans le champ de sa conscience n'apparaîtront jamais que les combinaisons réellement utiles, et quelques autres qu'il rejettera, mais qui participent un peu des caractères de combinaisons utiles.

Tout se passe comme si l'inventeur était un examinateur du deuxième degré, qui n'aurait plus à interroger que les candidats déclarés admissibles après une première épreuve.

II

Mais ce que j'ai dit jusqu'ici, c'est ce qu'on peut observer ou inférer en lisant les écrits des géomètres, à la condition de faire cette lecture avec quelque réflexion.

Il est temps de pénétrer plus avant et de voir ce qui se passe dans l'âme même du mathématicien. Pour cela, je crois que ce que j'ai de mieux à faire, c'est de rappeler des souvenirs personnels. Seulement, je vais me circonscrire et vous raconter seulement comment j'ai écrit mon premier Mémoire sur les fonctions fuchsiennes. Je vous demande pardon, je vais employer quelques expressions techniques ; mais elles ne doivent pas vous effrayer, vous n'avez aucun besoin de les comprendre. Je dirai, par exemple : J'ai trouvé la démonstration de tel théorème dans telles circonstances ; ce théorème aura un nom barbare, que beaucoup d'entre vous ne connaîtront pas, mais cela n'a aucune importance ; ce qui est intéressant pour le psychologue, ce n'est pas le théorème, ce sont les circonstances.

Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes ; j'étais alors fort ignorant ; tous les jours je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir contrairement à mon habitude ; je ne pus m'endormir ; les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent pour ainsi dire pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique ; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries ; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie ; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.

A ce moment, je quittai Caen, que j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'Ecole des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathémathiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien de mes pensées antérieures parut m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes sont identiques à celles de la Géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification ; je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

Je me mis alors à étudier des questions d'Arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur une falaise. l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies sont identiques à celles de la Géométrie non-euclidienne.

Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences ; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y a des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique ; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thétafuchsiennes et que, par conséquent, il existe des fonctions fuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hyper-

géométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions ; j'en fis un siège systématique et j'enlevai l'un après l'autre tous les ouvrages avancés ; il y en avait un, cependant, qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

Là-dessus, je partis pour le Mont Valérien, où je devais faire mon service militaire ; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon Mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine.

III

Je me bornerai à cet exemple unique ; il est inutile de les multiplier ; en ce qui concerne mes autres recherches, j'aurais à vous faire des récits tout à fait analogues ; et les observations rapportées par d'autres mathématiciens dans l'enquête de l'*Enseignement mathématique* ne pourraient que les confirmer.

Ce qui vous frappera tout d'abord, ce sont ces apparences d'illumination subite, signes manifestes d'un long travail inconscient antérieur ; le rôle de ce travail inconscient, dans l'invention mathématique, me paraît incontestable et l'on en trouverait des traces dans d'autres cas où il est moins évident. Souvent, quand on travaille une question difficile, on ne fait rien de bon la première fois qu'on se met à la besogne ; ensuite, on prend un repos plus ou moins long, et on s'asseoit de nouveau devant sa table. Pendant la première demi-heure, on continue à ne rien trouver ; puis, tout à coup, l'idée décisive se présente à l'esprit. On pourrait dire que le travail

conscient a été plus fructueux parce qu'il a été interrompu et que le repos a rendu à l'esprit sa force et sa fraîcheur. Mais il est plus probable que ce repos a été rempli par un travail inconscient, et que le résultat de ce travail s'est révélé ensuite au géomètre, tout à fait comme dans les cas que j'ai cités ; seulement la révélation, au lieu de se faire jour pendant une promenade ou un voyage, s'est produite pendant une période de travail conscient, mais indépendamment de ce travail, qui joue tout au plus un rôle de déclanchement, comme s'il était l'aiguillon qui aurait excité les résultats déjà acquis pendant le repos, mais restés inconscients, à revêtir la forme consciente.

Il y a une autre remarque à faire au sujet des conditions de ce travail inconscient ; c'est qu'il n'est possible et, en tout cas, qu'il n'est fécond que s'il est, d'une part, précédé, et, d'autre part, suivi d'une période de travail conscient. Jamais (et les exemples que je vous ai cités le prouvent déjà suffisamment) ces inspirations subites ne se produisent sinon après quelques jours d'efforts volontaires, qui ont paru absolument infructueux et où l'on a cru ne rien faire de bon, où il semble qu'on a fait totalement fausse route. Ces efforts n'ont donc pas été aussi stériles qu'on le pense ; ils ont mis en branle la machine inconsciente, et sans eux elle n'aurait pas marché et elle n'aurait rien produit.

La nécessité de la seconde période de travail conscient, après l'inspiration, se comprend mieux encore. Il faut mettre en œuvre les résultats de cette inspiration, en déduire les conséquences immédiates, les ordonner, rédiger les démonstrations. Mais surtout il faut les vérifier. Je vous ai parlé du sentiment de certitude absolue qui accompagne l'inspiration ; dans les cas cités, ce sentiment n'était pas trompeur, et le plus souvent il en est ainsi ; mais il faut se garder de croire que ce soit une règle sans exception ; souvent ce sentiment nous trompe, sans pour cela être moins vif, et l'on ne s'en aperçoit que quand on cherche à mettre la démonstration sur pied. J'ai observé surtout le fait pour les idées qui me sont venues le matin ou le soir dans mon lit, dans un état semi-hypnotique.

IV

Tels sont les faits, et voici maintenant les réflexions qu'ils nous imposent. Le moi inconscient ou, comme on dit, le moi subliminal joue un rôle capital dans l'invention mathématique ; cela résulte de tout ce qui précède. Mais on considère d'ordinaire le moi subliminal comme purement automatique. Or nous avons vu que le travail mathématique n'est pas un simple travail mécanique, qu'on ne saurait le confier à une machine, quelque perfectionnée qu'on la suppose. Il ne s'agit pas seulement d'appliquer des règles, de fabriquer le plus de combinaisons possibles d'après certaines lois fixes. Les combinaisons ainsi obtenues seraient extrêmement nombreuses, inutiles et encombrantes. Le véritable travail de l'inventeur consiste à choisir entre ces combinaisons, de façon à éliminer celles qui sont inutiles ou plutôt à ne pas se donner la peine de les faire. Et les règles qui doivent guider ce choix sont extrêmement fines et délicates ; il est à peu près impossible de les énoncer dans un langage précis ; elles se sentent plutôt qu'elles ne se formulent ; comment, dans ces conditions, imaginer un crible capable de les appliquer mécaniquement ?

Et alors une première hypothèse se présente à nous ; le moi subliminal n'est nullement inférieur au moi conscient ; il n'est pas purement automatique, il est capable de discernement, il a du tact, de la délicatesse ; il sait choisir, il sait deviner. Que dis-je ? Il sait mieux deviner que le moi conscient, puisqu'il réussit là où celui-ci avait échoué. En un mot, le moi subliminal n'est-il pas supérieur au moi conscient ? Vous comprenez toute l'importance de cette question. M. Boutroux, dans une conférence faite ici-même il y a deux mois, vous a montré comment elle s'était posée à des occasions toutes différentes et quelles conséquences entraînerait une réponse affirmative.

Cette réponse affirmative nous est-elle imposée par les faits que je viens de vous exposer ? J'avoue que, pour ma

part, je ne l'accepterais pas sans répugnance. Revoyons donc les faits et cherchons s'ils ne comporteraient pas une autre explication.

Il est certain que les combinaisons qui se présentent à l'esprit, dans une sorte d'illumination subite, après un travail inconscient un peu prolongé, sont généralement des combinaisons utiles et fécondes, qui semblent le résultat d'un premier triage. S'ensuit-il que le moi subliminal, ayant deviné par une intuition délicate que ces combinaisons pouvaient être utiles, n'a formé que celles-là, ou bien en a-t-il formé beaucoup d'autres qui étaient dépourvues d'intérêt et qui sont demeurées inconscientes.

Dans cette seconde manière de voir, toutes les combinaisons se formeraient par suite de l'automatisme du moi subliminal, mais, seules, celles qui seraient intéressantes pénétreraient dans le champ de la conscience. Et cela est encore très mystérieux. Quelle est la cause qui fait que, parmi les mille produits de notre activité inconsciente, il y en a qui sont appelés à franchir le seuil, tandis que d'autres restent en deçà ? Est-ce un simple hasard qui leur confère ce privilège ? Evidemment non ; parmi toutes les excitations de nos sens, par exemple, les plus intenses seules retiendront notre attention, à moins que cette attention n'ait été attirée sur elles par d'autres causes. Plus généralement, les phénomènes inconscients privilégiés, ceux qui sont susceptibles de devenir conscients, ce sont ceux qui, directement ou indirectement, affectent le plus profondément notre sensibilité.

On peut s'étonner de voir invoquer la sensibilité à propos de démonstrations mathématiques, qui, semble-t-il ne peuvent intéresser que l'intelligence. Ce serait oublier le sentiment de la beauté mathématique, de l'harmonie des nombres et des formes, de l'élégance géométrique. C'est un véritable sentiment esthétique que tous les vrais mathématiciens connaissent. Et c'est bien là de la sensibilité.

Or, quels sont les êtres mathématiques auxquels nous attribuons ce caractère de beauté et d'élégance et qui sont susceptibles de développer en nous une sorte d'émotion esthé-

tique ? Ce sont ceux dont les éléments sont harmonieusement disposés, de façon que l'esprit puisse sans effort en embrasser l'ensemble tout en pénétrant les détails. Cette harmonie est à la fois une satisfaction pour nos besoins esthétiques et une aide pour l'esprit, qu'elle soutient et qu'elle guide. Et, en même temps, en mettant sous nos yeux un tout bien ordonné, elle nous fait pressentir une loi mathématique. Or, nous l'avons dit plus haut, les seuls faits mathématiques dignes de recevoir notre attention et susceptibles d'être utiles sont ceux qui peuvent nous faire connaître une loi mathématique. De sorte que nous arrivons à la conclusion suivante : Les combinaisons utiles, ce sont précisément les plus belles, je veux dire celles qui peuvent le mieux charmer cette sensibilité spéciale que tous les mathématiciens connaissent, mais que les profanes ignorent au point qu'ils sont souvent tentés d'en sourire.

Qu'arrive-t-il alors ? Parmi les combinaisons en très grand nombre que le moi subliminal a aveuglément formées, presque toutes sont sans intérêt et sans utilité, mais par cela même elles sont sans action sur la sensibilité esthétique ; la conscience ne les connaîtra jamais ; quelques unes seulement sont harmonieuses, et par suite à la fois utiles et belles ; elles seront capables d'émouvoir cette sensibilité spéciale du géomètre dont je viens de vous parler, et qui, une fois excitée, appellera sur elles notre attention, et leur donnera ainsi l'occasion de devenir conscientes.

Ce n'est là qu'une hypothèse, et cependant voici une observation qui pourrait la confirmer : Quand une illumination subite envahit l'esprit du mathématicien, il arrive le plus souvent qu'elle ne le trompe pas ; mais il arrive aussi quelquefois, je l'ai dit, qu'elle ne supporte pas l'épreuve d'une vérification ; eh bien, on remarque presque toujours que cette idée fausse, si elle avait été juste, aurait flatté notre instinct naturel de l'élégance mathématique.

Ainsi c'est cette sensibilité esthétique spéciale qui joue le rôle du crible délicat dont je parlais plus haut, et cela fait comprendre assez pourquoi celui qui en est dépourvu ne sera jamais un véritable inventeur.

V

Toutes les difficultés n'ont pas disparu cependant ; le moi conscient est étroitement borné ; quant au moi subliminal, nous n'en connaissons pas les limites, et c'est pourquoi nous ne répugnons pas trop à supposer qu'il a pu former en peu de temps plus de combinaisons diverses que la vie entière d'un être conscient ne pourrait en embrasser. Ces limites existent cependant ; est-il vraisemblable qu'il puisse former toutes les combinaisons possibles, dont le nombre effrayerait l'imagination ; cela semblerait nécessaire néanmoins, car, s'il ne produit qu'une petite partie de ces combinaisons, et s'il le fait au hasard, il y aura bien peu de chance pour que la *bonne*, celle qu'on doit choisir, se trouve parmi elles.

Peut-être faut-il chercher l'explication dans cette période de travail conscient préliminaire qui précède toujours tout travail inconscient fructueux. Qu'on me permette une comparaison grossière. Représentons-nous les éléments futurs de nos combinaisons comme quelque chose de semblable aux atomes crochus d'Epicure. Pendant le repos complet de l'esprit, ces atomes sont immobiles, ils sont pour ainsi dire accrochés au mur ; ce repos complet peut donc se prolonger indéfiniment sans que ces atomes se rencontrent, et, par conséquent, sans qu'aucune combinaison puisse se produire entre eux.

Au contraire, pendant une période de repos apparent et de travail inconscient, quelques-uns d'entre eux sont détachés du mur et mis en mouvement. Ils sillonnent dans tous les sens l'espace, j'allais dire la pièce où ils sont enfermés, comme pourrait le faire, par exemple, une nuée de moucherons, ou, si vous préférez une comparaison plus savante, comme le font les molécules gazeuses dans la théorie cinétique des gaz. Leurs chocs mutuels peuvent alors produire des combinaisons nouvelles.

Quel va être le rôle du travail conscient préliminaire ? C'est évidemment de mobiliser quelques-uns de ces atomes, de les

décrocher du mur et de les mettre en branle. On croit qu'on n'a rien fait de bon parce qu'on a remué ces éléments de mille façons diverses pour chercher à les assembler et qu'on n'a pu trouver d'assemblage satisfaisant. Mais, après cette agitation qui leur a été imposée par notre volonté, ces atomes ne rentrent pas dans leur repos primitif. Ils continuent librement leur danse. Or, notre volonté ne les a pas choisis au hasard, elle poursuivait un but parfaitement déterminé ; les atomes mobilisés ne sont donc pas des atomes quelconques ; ce sont ceux dont on peut raisonnablement attendre la solution cherchée. Les atomes mobilisés vont alors subir des chocs, qui les feront entrer en combinaison, soit entre eux, soit avec d'autres atomes restés immobiles et qu'ils seront venus heurter dans leur course. Je vous demande pardon encore une fois ; ma comparaison est bien grossière, mais je ne sais trop comment je pourrais faire comprendre autrement ma pensée.

Quoiqu'il en soit, les seules combinaisons qui ont chance de se former, ce sont celles où l'un des éléments, au moins, est l'un de ces atomes librement choisis par notre volonté. Or, c'est évidemment parmi elles que se trouve ce que j'appelais tout à l'heure la *bonne combinaison*. Peut-être y a-t-il là un moyen d'atténuer ce qu'il y avait de paradoxal dans l'hypothèse primitive.

Autre observation. Il n'arrive jamais que le travail inconscient nous fournisse *tout fait* le résultat d'un calcul un peu long où l'on n'a qu'à appliquer des règles fixes. On pourrait croire que le moi subliminal, tout automatique, est particulièrement apte à ce genre de travail, qui est en quelque sorte exclusivement mécanique. Il semble qu'en pensant le soir aux facteurs d'une multiplication, on pourrait espérer trouver le produit tout fait à son réveil, ou bien encore qu'un calcul algébrique, une vérification, par exemple, pourrait se faire inconsciemment. Il n'en est rien, l'observation le prouve. Tout ce qu'on peut espérer de ces inspirations, qui sont les faits du travail inconscient, ce sont des points de départ pour de semblables calculs ; quant aux calculs eux-mêmes, il faut les faire dans la seconde période de travail conscient, celle qui

suit l'inspiration, celle où l'on vérifie les résultats de cette inspiration et où l'on en tire les conséquences. Les règles de ces calculs sont strictes et compliquées; elles exigent la discipline, l'attention, la volonté et, par suite, la conscience. Dans le moi subliminal règne, au contraire, ce que j'appellerais la liberté, si l'on pouvait donner ce nom à la simple absence de discipline et au désordre né du hasard. Seulement ce désordre même permet des accouplements inattendus.

Je ferai une dernière remarque : quand je vous ai exposé plus haut quelques observations personnelles, j'ai parlé d'une nuit d'excitation, où je travaillais comme malgré moi ; les cas où il en est ainsi sont fréquents, et il n'est pas nécessaire que l'activité cérébrale anormale soit causée par un excitant physique comme celui que j'ai cité. Eh bien, il semble que, dans ce cas, on assiste soi-même à son propre travail inconscient, qui est devenu partiellement perceptible à la conscience surexcitée et qui n'a pas pour cela changé de nature. On se rend alors vaguement compte de ce qui distingue les deux mécanismes ou, si vous voulez, les méthodes de travail des deux « moi ». Et les observations psychologiques que j'ai pu faire ainsi me semblent confirmer dans leurs traits généraux les vues que je viens d'émettre.

Certes, elles en ont bien besoin, car elles sont et restent, malgré tout, bien hypothétiques : l'intérêt de la question est si grand pourtant que je ne me repens pas de vous les avoir soumises.

LE NOUVEAU DIPLOME D'ÉTUDES SUPÉRIEURES ET L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

La question de la préparation aux épreuves du Concours d'Agrégation est une de celles qui intéressent le plus les Universités provinciales françaises. Cet intérêt, je le dis tout de suite, est souvent négatif et, à en juger par les vœux émis dans différentes Facultés, il semble résulter surtout que les efforts nécessaires à la préparation des candidats sont presque totalement perdus à cause du très petit nombre d'élèves dont il faut s'occuper et du nombre encore bien plus restreint de ceux qui parviennent au résultat convoité. Et, pendant le temps consacré à ces rares élèves, d'autres, beaucoup plus nombreux, qui suivent les cours en vue des Certificats d'Etudes supérieures manquent de conférences supplémentaires qui leur seraient des plus utiles.

D'autre part, pour le professeur, les conférences d'Agrégation sont une charge des plus lourdes et des plus ennuyeuses. Ce professeur est naturellement chargé de cours correspondants aux Certificats d'Etudes supérieures et, bien qu'au fond le programme d'Agrégation n'excède pas le niveau des Certificats précédents, il est beaucoup plus étendu, exige de grands développements sur des problèmes à énoncés fort longs, comprend de la Géométrie analytique, de la Géométrie élémentaire et comme, de plus, il faut aussi surveiller les leçons que les candidats s'exercent à faire, il y a là matière à plusieurs enseignements différents. Que l'on se représente en outre ledit professeur comme animé du désir de faire progresser la Science, de mettre au jour des travaux personnels sur des sujets qui ne peuvent guère coïncider avec ceux des programmes d'Agrégation et l'on comprendra à quelle gymnastique intellectuelle, fatigante et peu utile, il doit se livrer. Ce n'est d'ailleurs pas là une opinion personnelle; tous les

collègues que j'ai pu interroger la partagent. Et, si des mathématiciens nous passons aux physiciens, les ennuis semblent être les mêmes.

Ceci, je me hâte de l'ajouter, *n'est qu'une pure description de la question*. J'estime qu'il ne m'appartient nullement d'indiquer un remède et d'ailleurs je serais fort embarrassé de le faire.

Pour les uns la préparation à l'Agrégation — partie pédagogique — devrait être localisée dans un petit nombre de Facultés et serait l'œuvre d'un personnel spécial, pour les autres, plus radicaux, on ne s'en occuperait plus du tout, celle-ci devenant une spécialité exclusive de l'Ecole normale supérieure. A coup sûr, la seconde solution est encore plus commode pour le personnel enseignant, mais combien égoïste si l'on songe aux candidats malheureux quant à l'admission à l'Ecole normale. Ces derniers, réduits à leurs propres forces, ne trouvant plus personne pour les préparer, croiraient qu'il n'y a plus de chance de réussite que pour les normaliens et abandonneraient tout espoir d'être jamais agrégés.

Laissant ces troublantes questions, je vais montrer que les Facultés des Départements peuvent jouer un rôle très utile dans la formation des futurs agrégés, s'il est possible de faire travailler d'abord ceux-ci dans une voie nettement scientifique.

Et la récente réforme des programmes, le prouve suffisamment.

* * *

Ce qui précède est relatif, en effet, à la préparation au Concours d'Agrégation proprement dit. Or ce Concours n'est plus maintenant un but unique vers lequel les licenciés marchent sans étape. Nul n'y peut être candidat s'il n'a obtenu d'abord un diplôme institué par Arrêté ministériel du 18 juin 1904 et dénommé *Diplôme d'Etudes supérieures.*

Voici d'ailleurs le texte même indiquant les conditions de délivrance de ce titre :

Les candidats au diplôme d'études supérieures doivent satisfaire aux épreuves ci-après :

a) Composition d'un travail écrit sur un sujet agréé par la Faculté ;

b) Interrogation sur ce travail et sur des questions données trois mois au moins à l'avance et se rapportant à la même partie des mathématiques.

Le travail peut consister soit en recherches originales, soit dans l'exposé partiel ou total d'un cours d'ordre supérieur. Dans ce dernier cas, par « exposé » on doit entendre soit le résumé simplifié du mémoire ou du cours, soit le développement détaillé de résultats ou de méthodes que l'auteur ou le professeur n'a fait qu'indiquer.

Est tenu pour équivalent au diplôme d'études supérieures de mathématiques un des certificats suivants délivrés en conformité du décret du 22 janvier 1896 sur la Licence : Géométrie supérieure, analyse supérieure, physique mathématique, mécanique céleste, mécanique physique et expérimentale.

On voit qu'au delà de la Licence, les membres de l'Enseignement supérieur sont conduits à initier leurs élèves à une science plus élevée et à leur donner une idée d'un travail présentant quelque originalité. Cela sera surtout vrai dans les Facultés de province où les Certificats d'Etudes supérieures sont peu nombreux et où manque la ressource de conquérir un des certificats supplémentaires mentionnés ci-dessus.

On ne peut donc qu'applaudir à cette innovation dont je me propose d'indiquer les résultats obtenus à la Faculté des Sciences de Montpellier. Quatre Diplômes d'Etudes supérieures y ont été délivrés jusqu'ici et je vais en parler brièvement en les rangeant simplement dans l'ordre des dates.

Le premier travail dont l'exécution fut dirigée par M. S. Dautheville, professeur de Mécanique rationnelle, a pour auteur M. Dellac qui a ainsi obtenu le diplôme le 28 juin 1907. Ce travail consiste en une traduction, avec commentaires, du mémoire de M. A. Kneser *Die Stabilität des Gleichgewichts hängender schwerer Fäden (Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. 125).* Je rappelle que M. Kneser y revient sur le fameux problème de la stabilité de l'équilibre si ingénieusement discuté par Dirichlet; il montre toutefois que les conclusions de Dirichlet ne sont pas absolument rigoureuses dans le cas de systèmes dépendant d'un nombre infini de paramètres, tel un fil suspendu, et il se propose de rétablir la rigueur. C'est ce sujet que M. Dellac a étudié et commenté.

Le second travail dirigé par M. Pierre Boutroux, maître de conférences, est dû à M. Perfetti qui en a soutenu le sujet

le 29 juin 1907. Ce travail a pour titre : *Sur la singularité à l'origine des intégrales de l'équation*

$$2xzz' = az^2 + A_3x^2 + A_2xz + A_1xz^2 + A_0xz^3$$

où a *est une constante et où les* A *sont des polynômes.* Dans une première partie l'auteur montre que l'origine est un point transcendant directement critique pour les intégrales de l'équation réduite

$$2xzz' = az^2 + \beta xz + \alpha x^2$$

où α et β sont des constantes. Dans une seconde partie il étend par voie de continuité à l'équation générale les résultats trouvés pour l'équation réduite. J'ai plaisir à mentionner que M. Perfetti se propose, quand il sera débarrassé du concours d'Agrégation proprement dit, de compléter ce mémoire et de le publier.

J'en arrive maintenant à un troisième travail dû à M. Charrasse, répétiteur au Lycée de Nice, travail examiné par M. Fabry, professeur de Calcul infinitésimal, et soutenu par son auteur le 18 janvier 1908. Il s'agit cette fois de Géométrie supérieure et plus particulièrement de théorèmes, dus à M. Darboux, dont les démonstrations ont subi de certaines variantes. On aura une idée des recherches de M. Charrasse en se reportant aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (décembre 1907) ou, sous le titre *Sur un théorème relatif à la déformation des surfaces gauches*, il reprend notamment la démonstration du théorème suivant : Toutes les surfaces gauches dont la ligne de striction coupe les génératrices à angle droit et pour lesquelles le paramètre de distribution des génératrices est constant sont applicables sur une alysséide. (G. Darboux, *Théorie générale des surfaces*, T. III, p. 312).

Enfin le quatrième diplôme a été obtenu par M. A. Costabel le 23 juin 1908 avec un mémoire intitulé *Sur le prolongement analytique d'une fonction méromorphe.* C'est moi, en ma qualité de maître de conférences, qui ai dirigé les recherches de M. Costabel. Je suis complètement dispensé d'indiquer en quoi consiste ce dernier travail par le fait qu'on en trouvera un résumé à la suite du présent article. Et j'estime

que cette publication montrera mieux que toute description ce que l'on peut exiger ou attendre des candidats au Diplôme d'Etudes supérieures. Il va sans dire que je laisse à M. Costabel la responsabilité de sa rédaction.

*
* *

Comme conclusion, il me semble utile d'insister — surtout dans une Revue internationale — non pas seulement sur le nouveau diplôme considéré comme échelon ne devant jamais être franchi que par des candidats à l'Agrégation française, mais tout au contraire sur son caractère général et indéniablement scientifique. Il ne peut être comparé au Doctorat, bien qu'il puisse donner lieu à de véritables petites thèses et qu'on ait même débattu la question de savoir si l'on n'exigerait pas des candidats un résumé imprimé. Toutefois les exigences à cet égard étaient modestes; il n'a jamais été question de demander plus de *trois* pages du format des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*. Mais, d'autres part, le diplôme témoigne de connaissances supérieures à celles des licenciés.

M. Dellac a approfondi une question qui n'est pas du tout classique, le classicisme consistant précisément, en matière de stabilité, à s'en tenir aux démonstrations de Dirichlet. M. Perfetti a étudié une question qui peut être considérée comme une introduction, dans un cas particulier, aux recherches de M. Pierre Boutroux sur les intégrales des équations différentielles du premier ordre. M. Charrasse a dû étudier, beaucoup plus que n'exige le programme de la licence, la *Théorie des surfaces* de M. Darboux et M. Costabel témoigne d'une connaissance des *Leçons sur les séries divergentes* de M. E. Borel et de mes propres travaux très suffisante pour aborder les savantes *Notes* publiées par M. Mittag-Leffler dans les *Acta Mathematica*.

Je puis signaler aussi les travaux d'étudiants en Physique dirigés à Montpellier par M. le Professeur Meslin. L'un d'eux, M. Boutaric, a notamment publié une *Etude théorique des phénomènes de diffraction présentés par des réseaux circu-*

laires ou rectilignes (*Journal de Physique*, avril 1908), ce qui prouve que le succès du nouveau diplôme n'est pas moindre dans le clan des physiciens que dans celui des géomètres.

Je serais heureux d'inspirer à quelque étudiant étranger le désir de le conquérir et heureux d'autre part si la préparation à l'Agrégation n'entraînait plus dans l'avenir, pour les membres de l'Enseignement supérieur, que la considération de travaux de la nature indiquée.

A. Buhl. (Montpellier).

SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE [1]

1. — Les méthodes de prolongement analytique reposent surtout sur un théorème, dû à Weierstrass, d'après lequel toute fonction définie hors d'un cercle taylorien, et coïncidant dans celui-ci avec l'élément de fonction y relatif, prolonge l'élément considéré. Une des méthodes les plus remarquables, étudiée surtout par MM. Borel et Mittag-Leffler consiste à construire effectivement le prolongement au moyen d'expressions linéaires où ne figurent que des polynômes constitués eux-mêmes par des fragments du développement taylorien connu. M. A. Buhl est revenu, par des formules très simples, sur la méthode en question (*Bull. des Sciences mathém.*, 1907 et 1908). Je me propose de reprendre les résultats de M. Buhl et d'en tirer quelques applications et remarques nouvelles.

Je me bornerai, pour plus de simplicité, à une fonction méromorphe $F(x)$ ayant des pôles a_k de résidus A_k.

Je forme d'abord l'étoile de M. Mittag-Leffler obtenue en traçant des demi-droites issues des a_k et opposées à l'origine.

---

[1] Résumé d'un travail présenté à la Faculté des Sciences de Montpellier, le 23 juin 1908, pour l'obtention du Diplôme d'Etudes supérieures.

Tout contour C entourant l'origine (supposée point régulier) peut grandir en s'étoilant entre les coupures formant l'étoile mais sans jamais franchir celles-ci. Pour un tel contour on aura la formule fondamentale de Cauchy :

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

Si C se réduit à un cercle n'enfermant aucun a_k on aura la formule de Taylor :

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \dots\right) F(z)\,dz.$$

J'en considère la somme des $n+1$ premiers termes, soit

$$s_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C F(z)\,\frac{z^{n+1} - x^{n+1}}{z-x}\,\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Soit maintenant $f(\xi)$ une fonction *entière*. J'aurai pour celle-ci la formule de Taylor, valable quel que soit le contour Γ,

$$f(\xi) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\xi}{\zeta^2} + \dots\right) f(\zeta)\,d\zeta.$$

Soit c_n le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de ce développement. On met immédiatement le produit $c_n s_n$ sous forme d'une intégrale double et, en s'appuyant sur les identités

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^{n+1} - x^{n+1}}{\zeta^{n+1} z^{n+1}}\,\xi^n = \sum \frac{\xi^n}{\zeta^{n+1}} - x\sum \frac{(\xi x)^n}{(\zeta z)^{n+1}} = \frac{1}{\zeta - \xi} - \frac{x}{\zeta z - \xi x}$$

vraies si $|\xi| < |\zeta|$ et si $|\xi x| < |\zeta z|$, on trouve la formule fondamentale

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \frac{F(z) f(\zeta)}{(\zeta - \xi)\left(z - \dfrac{\xi x}{\zeta}\right)}\,d\zeta\,dz.$$

Quels que soient ξ et x on peut toujours imaginer que le contour Γ soit un cercle de rayon $|\zeta|$ assez grand pour que les inégalités précédentes soient vérifiées.

2. — M. Buhl a étudié la formule précédente en commen-

çant par intégrer par rapport à z. Je me propose de retrouver ses résultats en intégrant d'abord par rapport à ζ. Le second membre de (1) peut immédiatement s'écrire

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \frac{F(z)f(\zeta)\,dz\,d\zeta}{(z-x)(\zeta-\xi)} - \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \frac{xF(z)f(\zeta)\,dz\,d\zeta}{z(z-x)\left(\zeta-\frac{\xi x}{z}\right)}.$$

D'après les inégalités fondamentales accompagnant la formule (1) on voit que l'intégration en ζ donne immédiatement

$$f(\xi)\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_C f\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{xF(z)\,dz}{z(z-x)}$$

d'où

$$\text{(2)}\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n = f(\xi)\,F(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_C f\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{xF(z)\,dz}{z(z-x)}.$$

Supposons les pôles a_k rangés par modules croissants. Soit un cercle C_k ayant l'origine pour centre et passant entre a_k et a_{k+1}. La théorie des résidus donne, le contour C étant toujours supposé intérieur à C_k,

$$\text{(3)}\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} - \frac{1}{2i\pi}\int_C = \sum_k f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)\frac{xA_k}{a_k(a_k-x)},$$

le sigma étant relatif à tous les pôles a_k contenus entre C_k et C.

Reste à évaluer

$$\text{(4)}\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} f\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{xF(z)\,dz}{z(z-x)}.$$

Pour cela on peut imaginer que la circonférence C_k soit une couronne de Laurent aussi étroite qu'il le faudra. Pour z dans cette couronne on aura

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} F(u)\left(\frac{1}{u}+\frac{z}{u^2}+\cdots\right)du + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} F(u)\left(\frac{1}{z}+\frac{u}{z^2}+\cdots\right)du.$$

D'ailleurs on a aussi

$$f\left(\frac{\xi x}{z}\right) = \gamma_0 + \gamma_1\frac{\xi x}{z} + \gamma_2\left(\frac{\xi x}{z}\right)^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots$$

Or, si l'on forme maintenant l'expression

$$f\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{xF(z)}{z(z-x)}$$

on en fera une série procédant suivant les puissances positives et négatives de z et l'intégrale (4) sera une série dont tous les termes seront nuls à l'exception de celui qui contient z à la puissance — 1.

On a alors pour représenter (4) l'expression

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\gamma_0+\gamma_1\xi+\ldots+\gamma_{n-1}\xi^{n-1}\right)\frac{x^n}{2i\pi}\int_{C_k}\frac{F(u)\,du}{u^{n+1}}.$$

Avec ce nouveau résultat les formules (2), (3), (4) donnent

$$(A)\quad\left\{\begin{aligned}F(x)&=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_n s_n}{f(\xi)}+\sum_k\frac{f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)}{f(\xi)}\frac{xA_k}{a_k(x-a_k)}\\&+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\gamma_0+\gamma_1\xi+\ldots+\gamma_{n-1}\xi^{n-1}}{f(\xi)}\frac{x^n}{2i\pi}\int_{C_k}\frac{F(u)\,du}{u^{n+1}}.\end{aligned}\right.$$

C'est bien la formule donnée par M. Buhl dans son mémoire *Sur la représentation des fonctions méromorphes par des séries de polynômes tayloriens. Bull. des Sciences mathém.*, 1908).

3. — Dans ce travail je ne me propose pas une étude complète de la formule (A), mais seulement du cas où le second membre de cette formule peut se réduire au premier sigma. Pour cela imaginons que $|\xi|$ croisse indéfiniment dans une direction issue de l'origine et choisie de telle manière qu'il en soit de même de $|f(\xi)|$. Alors on voit facilement que le dernier sigma de (A) tend vers zéro. Si de plus, pour $|\xi|$ croissant comme il est indiqué, on a toujours

$$(B)\qquad\lim_{\xi=\infty}\frac{f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)}{f(\xi)}=0,$$

la formule (A) se réduit à

$$\text{(C)} \qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)} .$$

C'est le type général des formules de sommabilité de M. Borel. Quant à la condition (B), on conçoit qu'elle ne peut être réalisée que pour x dans une certaine région du plan où l'on cherche à définir $F(x)$. Je dirai que c'est la *région de sommabilité* dans laquelle la formule (C) est valable.

4. — La formule (A) a été établie dans le cas où les pôles de $F(x)$ étaient simples. Si ce sont des pôles multiples d'ordre n, on voit, d'après une formule bien connue, que le second membre de (3), et par suite le second sigma de (A), contiennent linéairement

$$f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right), \qquad f^{(1)}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right), \ldots, \qquad f^{(n-1)}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)$$

et non pas seulement la première de ces quantités. Alors la condition (B) est à remplacer par n conditions qui, cas très important, se confondent si $f(\xi) = e^{\xi}$.

Etude de la formule (C).

5. — La formule (C) ne sera applicable, si n est l'ordre de multiplicité des pôles de $F(x)$, que pour x situé dans des régions du plan telles que l'on ait

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{f^{(i)}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)}{f(\xi)} = 0 , \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Si ces n conditions sont réalisables, il s'ensuit notamment que la formule (C) est $n-1$ fois dérivable dans le cas où $F(x)$ serait une fonction à pôles simples car la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée a alors des pôles d'ordre n. La formule (C) est même indéfiniment dérivable si $f(\xi) = e^{\xi}$. Ce résultat a été signalé par M. Borel. On pourrait le généraliser mais il est particu-

lièrement évident quand la fonction sommatrice est la fonction exponentielle.

La méthode de sommation exponentielle est donc particulièrement importante. Je me propose, dans ce qui suit, de retrouver les résultats de M. Borel concernant les fonctions sommatrices

$$f(\xi) = e^{\xi}, \qquad f(\xi) = e^{\xi^p}, \quad (p \text{ entier})$$

et d'étudier en outre le cas de

$$f(\xi) = e^{e^{\xi}}.$$

6. — *Méthode de sommation exponentielle.* — C'est le cas où l'on prend $f(\xi) = e^{\xi}$. Cherchons les points x pour lesquels on ait

$$\lim_{\xi = \infty} \frac{e^{\frac{\xi x}{a_k}}}{e^{\xi}} = 0.$$

Posons pour cela

$$\xi = \rho e^{i\omega}, \qquad x = re^{i\theta}, \qquad a_k = \alpha_k e^{i\tau_k}.$$

Envoyons ξ à l'infini dans la direction d'argument ω. La limite à chercher est celle d'une exponentielle dont l'exposant est

$$\rho(\cos\omega + i\sin\omega)\left[\frac{r}{\alpha_k}\cos(\theta - \tau_k) + \frac{r}{\alpha_k}\, i\sin(\theta - \tau_k) - 1\right].$$

Cette exponentielle tendra vers 0 si la partie réelle de l'exposant croît indéfiniment par valeurs négatives, ce qui exige

$$\frac{r}{\alpha_k}\cos(\omega + \theta - \tau_k) - \cos\omega < 0.$$

Considérons la droite d'équation

$$\frac{r}{\alpha_k}\cos(\omega + \theta - \tau_k) - \cos\omega = 0.$$

Si ω est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ l'inégalité précédente est vérifiée pour tous les points situés du même côté que

l'origine par rapport à cette droite. Comme à chaque pôle de la fonction F correspond une droite, la région des points du plan où la formule (B) sera applicable sera formée par la région située du même côté que l'origine par rapport à toutes ces droites ; c'est donc une région polygonale, appelée *polygone de sommabilité.*

Si ω est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ l'inégalité précédente n'est alors vérifiée que pour les points du plan situés de l'autre côté de l'origine par rapport à la droite précédente.

Dans ce cas la région de sommabilité, si elle existe, est constituée par tous les points du plan situés de l'autre côté de l'origine par rapport à toutes ces droites. Elle n'existe que si $F(x)$ se réduit à une fraction rationnelle car alors le dernier terme de (A) n'existe pas. Si ce terme était conservé il ne pourrait disparaître pour $|\xi|$ croissant dans la direction indiquée, e^{ξ} ne croissant pas alors indéfiniment.

7. — *Etude du polygone de sommabilité.* — Le côté du polygone de sommabilité relatif au point singulier α_k, τ_k a pour équation

$$x \cos(\omega - \tau_k) - y \sin(\omega - \tau_k) - \alpha_k \cos \omega = 0 .$$

Le coefficient angulaire de cette droite est $\operatorname{cotg}(\omega - \tau_k)$; le coefficient angulaire de la droite joignant l'origine au point (α_k, τ_k) est $\operatorname{tg} \tau_k$. L'angle φ de ces deux droites se calcule facilement et est égal à

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega$$

d'où la propriété suivante :

Les droites joignant l'origine aux points singuliers de la fonction F *font avec les côtés du polygone passant par ces points des angles constants égaux à* $\frac{\pi}{2} - \omega$.

Dans le cas où $\omega = 0$ l'angle précédent est droit, et les côtés du polygone correspondant aux points singuliers situés sur le cercle de convergence sont tangents à ce cercle. Le cercle de convergence est alors situé tout entier à l'intérieur du polygone de sommabilité.

Au contraire si ω est différent de 0 mais compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, certains côtés du polygone de sommabilité sont sécants par rapport au cercle de convergence, et il y a alors une région du cercle de convergence qui est extérieure au polygone de sommabilité; ce qui nous conduit à cette remarque curieuse, que, pour les points d'une région du plan où la série de Taylor est convergente, la sommabilité peut ne pas avoir lieu. Le cas de $\omega = 0$ est celui étudié d'abord par M. Borel.

Pour $\omega = \pm\frac{\pi}{2}$ le polygone de sommabilité est réduit au point origine.

Quand ω varie chaque côté du polygone tourne autour du point singulier y relatif, dans le même sens. Ces côtés font tous des angles égaux avec les droites joignant les dits points singuliers à l'origine.

Les sommets du polygone de sommabilité ou, plus généralement, les points de rencontre de deux côtés du polygone décrivent des cercles passant par l'origine et les deux points singuliers, correspondants.

Proposons-nous le problème suivant.

A quelles conditions le point de rencontre de deux côtés correspondants à deux points singuliers sera-t-il sommet du polygone de sommabilité pour une valeur de ω; et à quelles conditions le restera-t-il quel que soit ω.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point de rencontre de deux côtés correspondants à deux points singuliers a_1, a_2 *soit un sommet du polygone de sommabilité, quel que soit ω, est qu'il n'y ait aucun point singulier de la fonction F à l'intérieur du cercle passant par l'origine et les points singuliers* a_1, a_2.

La condition est nécessaire, il suffit de montrer pour cela que s'il existait un point singulier a_3 à l'intérieur du cercle a_1Oa_2, le point M de rencontre des côtés a_1, a_2 serait séparé de l'origine par le côté a_3. Donc OM serait, quel que soit ω, coupé par le côté relatif à a_3 en un point Q situé entre O et M.

Le lieu du point Q quand ω varie, est un cercle passant

par a_3, O, et tangent en O au cercle $a_1 O a_2$. On a en effet

$$\widehat{MQa_3} = \pi - \widehat{QPa_1} - \widehat{QMP} ,$$

$$\widehat{QPa_1} = \widehat{a_1 O a_3} = \tau_1 - \tau_3 ,$$

$$\widehat{QMP} = \widehat{a_1 a_2 O} = \text{const} ,$$

$$\widehat{MQa_3} = \pi - (\tau_1 - \tau_3) - \widehat{a_1 a_2 O} = \text{const} .$$

Donc le point Q décrit un cercle et la tangente à ce cercle au point O fait avec le côté Oa_3 l'angle

$$\pi - (\tau_1 - \tau_3) - \widehat{a_1 a_2 O} .$$

De même la tangente au cercle $a_1 a_2 O$ au point O fait avec Oa_3 l'angle

$$\widehat{a_2 a_1 O} + \tau_3 - \tau_2 ,$$

qui est égal à

$$\pi - (\tau_1 - \tau_3) - \widehat{a_1 a_2 O} .$$

Fig. 1.

Le point Q est donc à l'intérieur du cercle $a_1 O a_2$ et il est, quel que soit ω, compris entre O et M.

La condition est suffisante car, s'il existait un côté du polygone séparant le point M du point O, on voit en s'aidant de la démonstration précédente que ce point singulier auquel ce côté correspondrait serait situé à l'intérieur du cercle $a_1 O a_2$. Ce que l'on ne suppose pas.

Ces propriétés géométriques nous permettent de construire les seuls côtés utiles intervenant dans la formation du polygone de sommabilité.

8. — *Région de sommabilité obtenue par la variation de* ω. — Déterminons toute la région constituée par les points du plan pour lesquels la série de Taylor de la fonction sera sommable pour une valeur de ω au moins ; il existe en effet des

régions du plan qui sont situées dans des polygones de sommabilité correspondant à de certaines valeurs de ω et ne sont pas à l'intérieur d'autres polygones de sommabilité correspondant à d'autres valeurs de ω.

Or tout point sommet du polygone de sommabilité pour une valeur de ω l'est pour toutes les valeurs de ω comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; et lorsque ω varie entre ces limites, ces points sommets du polygone décrivent entièrement leur circonférence lieu.

Il résulte donc que la région de sommabilité sera limitée par des cercles passant par l'origine et par les groupes de deux points singuliers auxquels correspondent les sommets du polygone. Dans le cas où ω est compris entre $+\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{3\pi}{2}$ la région extérieure de sommabilité n'existe qu'autant que la fonction $F(x)$ est une fraction rationnelle. Il est de plus nécessaire et suffisant que les pôles de cette fonction soient tels qu'il en existe deux d'entre eux tels que le cercle passant par l'origine et ces deux points contienne tous les autres. La région de sommabilité est alors l'angle limité par les côtés correspondants à ces deux points ; région située de l'autre côté de l'origine par rapport à ces deux côtés. Ceci nous permet de déterminer la région totale de sommabilité lorsque ω varie de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$.

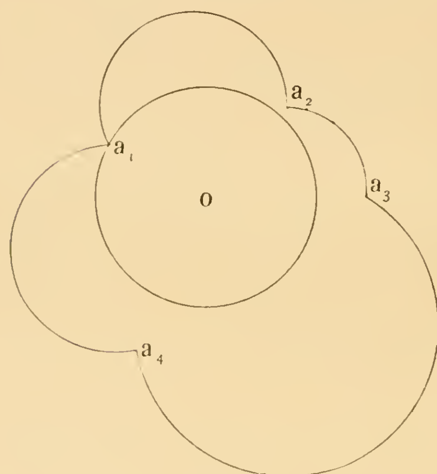


Fig. 2.

9. — *Méthode de sommation exponentielle généralisée.* Elle correspond à l'emploi de la fonction sommatrice $f(\xi) = e^{\xi^p}$, p étant entier.

Cherchons les points x du plan vérifiant, quel que soit le point singulier a_k, la condition

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{e^{\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)^p}}{e^{\xi^p}} = 0 .$$

Cela revient à chercher la limite d'une exponentielle dont l'exposant est

$$\rho^p(\cos p\omega + i \sin p\omega)\left[\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^p \cos p(\theta - \tau_k) + \left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^p i \sin p(\theta - \tau_k) - 1\right].$$

Cette exponentielle tendra vers 0 lorsque ξ croîtra indéfiniment dans la direction ω, si l'on a

$$\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^p \cos p(\omega + \theta - \tau_k) - \cos p\omega < 0 .$$

C'est une condition analogue à celle déjà trouvée, mais elle nous amène à considérer les courbes

$$r^p = \frac{\alpha_k^p \cos p\omega}{\cos p(\omega + \theta - \tau_k)}$$

qui, dans le cas de $\omega = 0$, ont été encore considérées par M. Borel.

On peut faire sur ces courbes limitant la région de sommabilité des raisonnements absolument identiques à ceux déjà fait dans le cas de la méthode exponentielle, on est conduit à des résultats plus généraux ; et l'on peut montrer que l'on peut disposer du nombre p, entier, de manière à étendre la région de sommabilité en un point quelconque du plan.

10. — *Emploi de la fonction sommatrice* $f(\xi) = e^{e^\xi}$. — Par un raisonnement toujours analogue aux précédents on déterminera la région de sommabilité en égalant à zéro la limite, pour $|\xi|$ croissant indéfiniment, d'une exponentielle dont l'exposant est

$$e^{\frac{\xi x}{a_k}} - e^{\xi} .$$

Cela nous conduit à écrire que la partie réelle de cette quantité croît indéfiniment par valeurs négatives. Or on trouve facilement que cette partie réelle est

$$e^{\frac{\rho r}{\alpha_k}\cos(\theta+\omega-\tau_k)}\cos\left[\frac{\rho r}{\alpha_k}\sin(\theta+\omega-\tau_k)\right]-e^{\rho\cos\omega}\cos(\rho\sin\omega)$$

les notations étant les mêmes qu'au paragraphe 6.

Considérons maintenant la droite

$$\rho\sin\omega = a\ ,$$

qui est parallèle à l'axe réel et pour laquelle nous supposerons $a < \frac{\pi}{2}$. Si l'extrémité du rayon vecteur ρ va à l'infini en suivant cette droite dans le sens positif, le second terme de la partie réelle ci-dessus considérée se comporte à l'infini comme

$$-e^{\rho}\cos a\ ,$$

C'est dire que ce terme croît indéfiniment par valeurs négatives. Je dis qu'on peut s'arranger à ce que le terme précédent tende vers zéro dans les mêmes conditions. Il suffit pour cela que le facteur $\cos(\theta+\omega-\tau_k)$ qui figure dans l'exposant soit toujours négatif. Comme, pour les grandes valeurs de ρ, ω devient nul, il faudra

$$\frac{3\pi}{2} > \theta - \tau_k > \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{3\pi}{2} + \tau_k > \theta > \frac{\pi}{2} + \tau_k\ .$$

Géométriquement cela revient à dire qu'un point singulier d'argument τ_k de $F(x)$ entraîne que la région de sommabilité n'est qu'un demi-plan limité par une droite passant par l'origine et perpendiculaire à la direction τ_k. Si tous les points singuliers de $F(x)$ sont compris dans un angle ayant son sommet à l'origine et une ouverture λ, la région de sommabilité est un angle de même nature dont les côtés sont perpendiculaires à ceux du précédent et dont l'ouverture est par suite $180° - \lambda$. On voit que la fonction sommatrice ici étudiée ne peut être employée que pour une fonction $F(x)$ dont les singularités ne sortent pas d'un demi-plan.

Etude du cas ou la fonction $f(\xi)$ n'est pas entière. Résultats de Cesaro.

11. — Je vais indiquer très brièvement ce qu'il advient lorsque la fonction sommatrice f a des singularités à distance finie. Je m'en tiendrai d'ailleurs au cas où ce sera une fraction rationnelle. Ce cas qu'il me semble naturel de placer après celui où f n'a pas de singularités à distance finie a été cependant le premier étudié au point de vue historique. Il correspond à des formules données en premier lieu par Cesàro. La formule fondamentale (1) du paragraphe 1 subsiste si Γ est un cercle de rayon fini mais, pour que les intégrations conservent la forme indiquée dans la suite, Γ ne doit contenir aucun point singulier de f. On peut alors imaginer que ce cercle Γ qui a l'origine pour centre soit décrit de manière à s'approcher autant qu'on le voudra du point singulier de f le plus rapproché de l'origine et que la variable ξ, tout en restant dans Γ, s'approche aussi du point singulier en question ce qui est une manière de faire croître $|f(\xi)|$ autant qu'on veut. Mais alors, des conditions $|\xi| < |\zeta|$, $|\xi x| < |\zeta z|$, on ne peut tirer autre chose que $|x| \leqq |z|$. La condition $|x| < |z|$ est la même que celle qui caractérise la formule de Taylor; comme de plus nous pouvons avoir $|x| = |z|$ il s'en suit que l'on peut obtenir des formules valables sur la circonférence du cercle de convergence d'un développement taylorien.

Prenons par exemple $f(\xi) = \frac{1}{1-\xi}$. Nous aurons

$$F(x) = \lim_{\xi = 1} \frac{s_0 + \xi s_1 + \xi^2 s_2 + \dots}{1 + \xi + \xi^2 + \dots}$$

ou

$$F(x) = \lim_{n = \infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n}$$

ce qui est la formule bien connue donnée par Cesàro.

Prenons encore, p étant entier,

$$f(\xi) = \frac{1}{1 - \xi^p}\,.$$

Alors

$$F(x) = \lim_{\xi = 1} \frac{s_0 + \xi^p s_p + \xi^{2p} s_{2p} + \cdots}{1 + \xi^p + \xi^{2p} + \cdots},$$

ou

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_p + s_{2p} + \cdots + s_{(n-1)p}}{n}.$$

Pour $p = 1$, cette dernière formule redonne celle de Cesàro. On peut faire à son sujet plusieurs remarques curieuses.

D'abord on peut la considérer comme un cas particulier des formules obtenues non pas en faisant tendre ξ vers la racine égale à 1 de l'équation $\xi^p - 1 = 0$ mais en faisant tendre ξ vers l'une quelconque des racines de cette équation, c'est-à-dire vers l'un des sommets d'un polygone régulier de p côtés inscrit dans le cercle $|\xi| = 1$.

Voici une remarque plus importante encore relative à la dernière formule donnée pour $F(x)$. Soit x à l'intérieur du cercle de convergence. Alors on peut prendre p assez grand pour que les sommes s_p, s_{2p}, ..., $s_{(n-1)p}$ diffèrent les unes des autres d'aussi peu qu'on voudra. Dans ces conditions la formule considérée peut s'écrire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \left[\frac{s_0}{n} + \frac{n-1}{n} s_{(n-1)p}\right]$$

c'est-à-dire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} s_{(n-1)p}.$$

Ce n'est autre chose que la formule de Taylor elle-même qu'il est bien intéressant de retrouver directement comme cas particulier de formules plus générales étudiées dans ce travail.

A. Costabel (Montpellier).

LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE[1]

CHAPITRE V

La symétrie.
Sphère et Plan comparés; analogies et dissemblances.

Avant d'étudier les analogies et les dissemblances des triangles sphériques comparés aux triangles plans, nous devons, pour cet objet même, étudier un mode remarquable de correspondance entre deux figures : le mode de correspondance *par symétrie.*

I. — Définitions et propriétés des figures symétriques.

Définitions. — 1° Si deux figures F_1 et F_2 se correspondent, point par point, de manière que (fig. 53) toute droite qui réunit un point M_1 de la première à un point correspondant M_2 de la seconde soit traversée en son milieu H par un plan P fixe, mais perpendiculaire à la droite de jonction, on dira que les figures F_1 et F_2 sont *symétriques par rapport au plan P.*

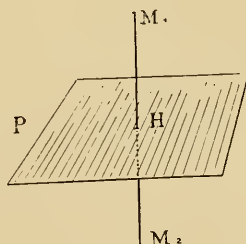


Fig. 53.

Remarques. — a) Le plan P est le lieu des points de l'une des deux figures qui coïncident avec leurs correspondants respectifs de l'autre figure. C'est *le plan de symétrie. — b)* Une droite juxtaposée sur sa symétrique est ou bien perpendiculaire au plan de symétrie, ou bien située dans ce plan.

2° Si deux figures G_1 et G_2 (fig. 54) se correspondent point par point de manière que le milieu de la droite qui réunit

[1] Voir *L'Enseign. Math.*, année 1908, n° du 15 mai, p. 185-207; n° du 15 juillet, p. 296-318.

les deux points correspondants M_1 et M_2 soit un point fixe O de l'espace, on dit que les deux figures sont *symétriques l'une de l'autre par rapport au point* O. Le point O s'appelle le *centre de symétrie*.

Remarque. — Une droite juxtaposée sur sa symétrique doit nécessairement passer par le centre de symétrie.

Fig. 54.

Problème fondamental. — On construit (fig. 55) la figure F_2 symétrique de F_1 par rapport au plan P et la figure F_3 symétrique de F_1 par rapport au point O pris dans le plan P. Cherchons quelle relation existe entre les deux figures F_2 et F_3.

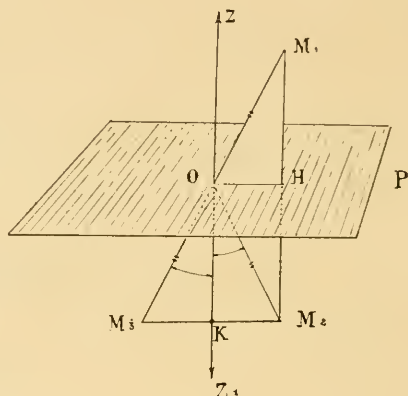


Fig. 55.

Pour répondre à cette question menons par le point O la droite ZOZ′ perpendiculaire au plan P; soit M_1 un point quelconque de la figure F_1, soient M_2 son correspondant dans F_2 et M_3 son correspondant dans F_3.

Le milieu H de M_1M_2 est la projection commune des points M_1 et M_2 sur le plan P; nous avons vu (chapitre II, théorie du dièdre) que la droite ZOZ′ est dans le plan des trois droites M_1OM_3, OH, OM_2, et si l'on fait le rabattement de ce plan sur lui-même par un demi-tour exécuté autour de OH, M_1 venant en M_2 l'angle $M_1\widehat{O}H$ recouvre l'angle $M_2\widehat{O}H$: il résulte de là que les suppléments de ces angles ou $Z\widehat{O}M_1$ et $Z'\widehat{O}M_2$ sont égaux; en considérant alors l'angle opposé par le sommet à ZOM_1 c'est-à-dire l'angle $Z'\widehat{O}M_3$ on voit enfin que la droite OZ′ est la bissectrice de l'angle au sommet O du triangle $M_3\widehat{O}M_2$, et comme ce triangle est isocèle puisque OM_2 et OM_3 tous deux égaux à OM_1 sont égaux, la droite OZ′ doit *passer par le milieu de* M_1M_2 et être *perpendiculaire à cette droite*.

On voit donc que pour amener la figure F_3 *en coïncidence*

avec la figure F_2 il suffira de la faire tourner autour de l'axe de rotation OZ d'une demi-révolution.

Conséquence. — *Les figures symétriques d'une même figure sont superposables.* — Ce fait est la conséquence du problème précédent et de la remarque suivante.

Remarque. — Les figures symétriques d'une même figure F par rapport à deux centres différents sont superposables, car elles sont chacune superposable sur la symétrique de la même figure F par rapport à un plan contenant les deux centres.

2. — *Une figure non plane n'est en général pas superposable sur sa symétrique,* et elle n'est, *dans tous les cas,* jamais superposable avec correspondance des éléments symétriques dans la superposition, *bien que tous les éléments plans correspondants soient égaux.*

Exemple : (fig. 56) soit un trièdre, formons le trièdre symétrique par rapport à son sommet S; faces et dièdres du nouveau trièdre sont respectivement égaux aux éléments correspondants du premier trièdre, car ce sont des faces ou des dièdres, deux à deux, opposés par le sommet ou par l'arête. Or, *une trame d'un solide fixant la position du solide,* on pourra, si on veut *essayer* la superposition du trièdre et de son symétrique par éléments symétriques, commencer par faire coïncider la trame ASC sur la symétrique A′SC′ par une rotation de un demi-tour exécutée autour d'une perpendiculaire menée par S à cette face, mais, après ce mouvement, la droite SB est restée d'un même côté du plan ASC et ne pourra donc pas venir coïncider avec sa symétrique SB′. Si pourtant le trièdre est *isocèle,* si par exemple (fig. 57) le dièdre d'arête SA est égal au dièdre d'arête SC, une rotation de un demi-tour exécutée autour de la perpendiculaire XY à la bissectrice de l'angle ASC fera coïncider le trièdre sur son symétrique; mais dans ce mode de superposition l'arête SC recouvre SA′ qui n'est pas son élément symétrique.

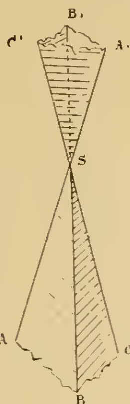


Fig. 56.

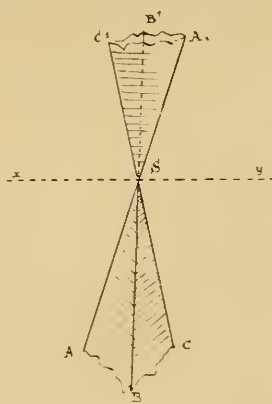


Fig. 57.

Autre exemple. — Il résulte des lois de la réflexion de la lumière

que l'image d'une figure F éclairée, fournie par un miroir plan, est une figure symétrique de F, par rapport à ce miroir.

Or, regardez-vous dans une glace plane, et que votre main gauche tire votre oreille gauche, votre image ne vous est pas superposable car elle se tire l'oreille droite.

3. — *Les figures planes sont égales à leurs symétriques.* — Ce fait résulte du théorème suivant (fig. 58) :

Théorème. — *Si on fait tourner une figure plane F autour d'un axe XY situé dans le plan (1) de la figure et si la figure F vient, après la rotation occuper la position F' dans le plan (2) les figures égales F et F' sont encore symétriques par rapport au plan P qui partage en deux dièdres égaux le dièdre formé par les deux demi-plans, (1), XY, d'une part, et, 2, XY, d'autre part.*

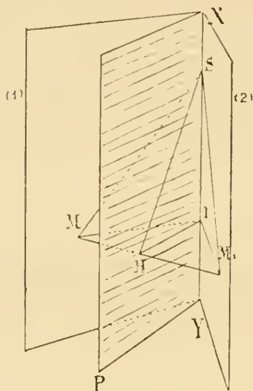


Fig. 58.

En effet tout point S de la figure situé sur l'axe demeure immobile, si donc H est le milieu de la droite qui réunit un point M de la figure à sa nouvelle venue dans la figure F', la droite SH sera perpendiculaire à MM' et bissectrice de l'angle en S du triangle *isocèle* MSM'.

En faisant varier à volonté le point S on voit que la droite MM' est perpendiculaire en H au plan qui passe par H et par XY; en prenant pour S le point I projection commune des points M et M' sur XY on voit de suite que le plan H, XY est le plan qui forme des dièdres égaux avec les plans (1) et (2) ce plan est donc le même pour tous les points M; or M et M' sont symétriques par rapport à ce plan fixe. Il en est de même des figures F et F'.

Remarque. — Ce théorème est la clef des propriétés du triangle sphérique isocèle.

II. — Propriétés du triangle sphérique.

1. — *Propriété du triangle sphérique dont deux côtés sont égaux.*— Soit (fig. 59) ABC un triangle sphérique isocèle

c'est-à-dire dont les côtés arc AB et arc AC sont égaux. Soient I le milieu de l'arc de base BC, H le milieu de la corde de l'arc de grand cercle BC, et O le centre de la sphère ; il résulte du théorème précédent que : 1° les arcs égaux AB et AC sont symétriques par rapport au plan bissecteur du dièdre (B, OA, C) ; 2° les arcs égaux BI et IC sont symétriques par rapport au plan bissecteur du dièdre (équivalent à 2 droits) (B, OI, C) ; de plus, tous deux perpendiculaires à BC au point H, ces deux plans doivent coïncider.

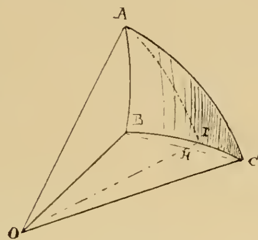


Fig. 59.

Ainsi donc : La figure formée par l'arc de cercle AB, l'arc BI, les deux rayons OA, OB, est symétrique de la figure formée par l'arc de cercle AC, l'arc CI, les deux rayons OA, OC. En particulier les tangentes en B aux deux arcs de grand cercle BA et BC forment un angle plan symétrique de l'angle formé par les tangentes en C aux deux arcs de grand cercle CA et BC, ces deux angles sont donc égaux, et enfin les angles en B et C du triangle sphérique ABC sont égaux ; de plus le plan des quatre points A I H O étant le plan de symétrie des deux portions du triangle sphérique considéré, on voit que les deux tangentes en I aux deux arcs IB et IC, portions du même arc BC, sont à la fois *coïncidantes* et *symétriques* par rapport à ce plan, mais hors de ce plan ; elles forment donc une perpendiculaire à ce plan qui est celui de l'arc de grand cercle AI ; donc enfin dans le triangle sphérique isocèle l'arc AI qui joint le sommet au milieu de l'arc de base est perpendiculaire à cette base.

2. *Propriété du triangle sphérique dont deux angles sont égaux.* — Soit O le centre de la sphère. Considérons d'abord le cas d'un triangle sphérique ABC (fig. 60) dont les angles en B et C sont droits ; A est alors un *pôle*[1] de l'arc de grand cercle BC. c'est-à-dire que le rayon OA est perpendiculaire au plan BOC (théorie du dièdre), les arcs AB et AC égaux chacun à un quadrant[2] sont égaux. Soit H le milieu de BC,

[1] *pôle* d'un cercle de la sphère : point où l'axe du cercle perce la surface sphérique.
[2] *quadrant* ou quart de la circonférence d'un grand cercle.

l'arc AH est dans le plan de symétrie des figures planes BOA et COA, soit D un point quelconque de l'arc AH ; joignons OD, D est à lui-même son symétrique, B et C sont symétriques par rapport au plan ADHO, les angles plans DOB et DOC symétriques sont égaux, donc les arcs BD et DC sont égaux et les angles sphériques $\widehat{DBC}$ et $\widehat{DCB}$ sont égaux.

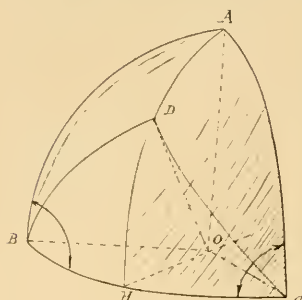


Fig. 60.

Il n'y a d'ailleurs à partir du sommet C qu'un arc de grand cercle faisant avec l'arc de grand cercle BC et d'un côté de cet arc un angle sphérique donné, comme le montre la notion du dièdre.

Conséquence. — Si (fig. 61) un triangle quelconque sphérique A'BC a ses angles en A et C égaux, l'angle DBC étant par exemple aigu, nous considérerons le pôle A de l'arc BC qui est dans le même hémisphère que A', soit H le milieu de l'arc BC et D le point où l'arc BA' coupe AH. Joignons D à C par un arc de grand cercle, les arcs DC et A'C feront au-dessus de BC un angle égal à l'angle DBH ; donc ces arcs DC et A'C coïncideront. Donc A' devant coïncider avec D, on aura bien arc A'C = arc A'B.

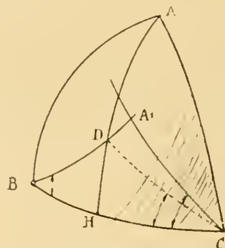


Fig. 61.

Ainsi, un triangle sphérique, qui a deux angles égaux, aura aussi égaux les côtés opposés à ces angles.

3. — *Triangle sphérique propre qui a deux angles inégaux.* — Théorème. — *Dans un pareil triangle sphérique les côtés opposés à ces angles sont inégaux et dans le même ordre de taille.*

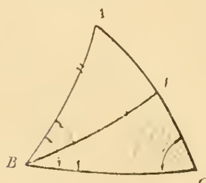


Fig. 62.

Du sommet B du plus grand des deux angles (fig. 62) traçons l'arc de grand cercle BI qui, *dans* le triangle fait avec le côté BC commun aux deux angles un angle égal au plus petit des deux angles comparés dont le sommet est en C, cet arc *coupe*

le côté AC en I ; le triangle équiangle IBC est alors isocèle et

$$\text{arc BI} = \text{arc IC}.$$

Or le triangle propre AIB donne :

$$\text{arc AB} < \text{arc AI} + \text{arc IB}$$

c'est-à-dire

$$\text{arc AB} < \text{arc AI} + \text{arc IC}$$

ou enfin

$$\text{arc AB} < \text{arc AC}.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

On va établir la *réciproque* de cette proposition.

4. — *Triangle sphérique qui a deux côtés inégaux.* — Soient (sans figure) a et b les côtés inégaux ; $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ les angles respectivement opposés à ces côtés; je dis que le fait : $a < b$ va entraîner le fait : $\widehat{A} < \widehat{B}$.

En effet des trois seules hypothèses possibles

$$1^{\circ}\ \widehat{A} > \widehat{B}\ ; \quad 2^{\circ}\ \widehat{A} = \widehat{B}\ ; \quad 3^{\circ}\ \widehat{A} < \widehat{B}$$

la première entraînerait (V; II, 3) $a > b$; la seconde exigerait (V; II, 2) que $a = b$; la troisième hypothèse subsiste donc seule et la démonstration est achevée.

5. — *Comparaison de ces théorèmes avec les théorèmes analogues du plan.* — En comparant les propositions qui précèdent et leurs analogues dans le plan (Chapitre III) le lecteur aperçoit la raison des changements nécessaires dans les étapes des démonstrations. Nous avions, avec les propriétés admises pour la droite, adopté et justifié pour cette série de propositions le point de départ suivant :

L'angle *extérieur* d'un triangle dépasse l'un et l'autre des deux angles du triangle qui n'ont pas même sommet que l'angle extérieur considéré.

Or cette proposition, on le voit aisément, *est fausse* pour les triangles sphériques ; exemple : ceux-ci peuvent avoir deux angles droits et un troisième angle supérieur à 1 droit.

En revanche nous possédions pour les triangles sphériques, images des trièdres, cette proposition qu'un côté du triangle est plus petit que la somme des deux autres.

De là ce changement dans la marche suivie; les angles sphériques ne sont plus superposables sur eux mêmes par retournement, et les raisonnements, qui pour le plan employaient le retournement, sont remplacés sur la sphère par les raisonnements qui invoquent les propriétés de la symétrie.

Ces remarques se vérifieront encore dans la théorie des perpendiculaires et des obliques sphériques que nous allons résumer succinctement.

III. — Perpendiculaires et obliques sur la sphère.

Etant donnés sur la sphère (sans figure) un arc de grand cercle XY et un point A hors de cet arc, nous distinguerons deux cas : 1° ou bien A est un pôle de XY : 2° ou bien A est distinct des pôles de XY ; en nous rappelant les propriétés de la projection d'une droite sur un plan (chapitre II) nous voyons que dans le cas 1° tous les arcs de grand cercle joignant A aux divers points de XY sont égaux à un quadrant et tous perpendiculaires à XY ; au contraire dans le second cas on obtient l'arc perpendiculaire à XY et passant par A en joignant ce point à l'un ou l'autre pôle de XY.

L'arc ainsi obtenu *est unique* mais il a deux pieds : (fig. 63) le pied H ou le pied K ; l'un d'eux H est à une distance de A moindre qu'un quadrant. Nous allons voir que cette distance AH est la plus courte distance sphérique de A aux divers points de XY ; comparons l'arc AH à l'arc *oblique* AM prolongeons AH d'une longueur égale au-dessus de XY et joignons A′ et M par un grand arc ; le triangle AA′M est un triangle propre et

$$\text{arc } AA' < \text{arc } AM + \text{arc } A'M$$

les arcs AM et A′M sont égaux comme symétriques par rapport au plan du cercle XY, donc

$$2 \text{ arc } AH < 2 \text{ arc } AM$$

ou

$$\text{arc } AH < \text{arc } AM .$$

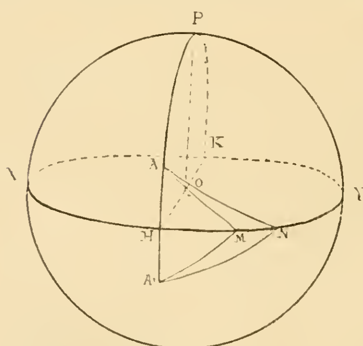


Fig. 63.

Soient (fig. 63) AM et AN deux obliques aboutissant du même côté de H et telles que HM et HN soient tous deux moindres que 2 *quadrants*. Soit alors arc HM < arc HN.

Le triangle AMA′ est intérieur alors au triangle propre ANA′ or soient (fig. 64) deux tels triangles ; prolongeons l'arc AM jusqu'en J sur A′N ; par les deux triangles sphériques partiels on a :

arc AM + arc MJ < arc AN + arc NJ
arc A′M < arc MJ + arc JA ;

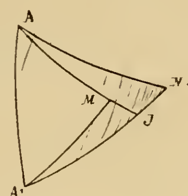


Fig. 64.

d'où, en ajoutant ces égalités membre à membre :

arc AM + arc MA′ < arc AN + arc NA′,

en appliquant ceci à la figure 63, nous aboutirons à la conclusion :

2 arc AM < 2 arc AN , ou à : arc AM < arc AN ;

donc, de 2 obliques sphériques qui s'écartent inégalement du *pied propre* de la perpendiculaire celle qui s'écarte le plus est la plus grande.

Propriété des obliques réduites. — Triangles réduits. — Nous considérons d'abord (fig. 65) les obliques dont les pieds s'écartent de moins d'un quadrant du pied de la plus courte distance ; considérons d'abord deux telles obliques AM et AN, situées dans un même hémisphère par rapport à AH ; soit arc HM < arc HN et soit AM′ l'arc symétrique de AM par rapport au plan de l'arc AH ; arc AM < arc AN ; donc : arc AM′ < arc AN ; donc, dans le triangle propre M′AN angle $\widehat{AM'H}$ > angle $\widehat{ANM}$; donc, en revenant au triangle AMN, angle extérieur en M < angle $\widehat{ANM}$.

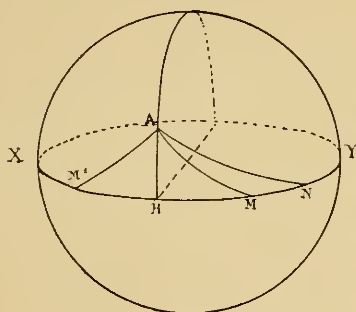


Fig. 65.

Remarque. — On étendra aisément cette propriété à tout triangle sphérique *réduit,* c'est-à-dire, dont les trois côtés sont moindres qu'un quadrant.

Petits cercles sur la sphère. — Le rayon sphérique d'un petit cercle de la sphère sera la distance sphérique de l'un des pôles à un point quelconque du petit cercle ; dans ce qui suit nous prendrons pour pôle celui des pôles pour lequel le rayon sphérique est moindre qu'un quadrant.

La remarque faite tout à l'heure sur l'angle extérieur des triangles sphériques réduits nous permettra de démontrer à l'égard des petits cercles de la sphère les mêmes théorèmes de continuité que ceux établis pour les cercles du plan ; en considérant ainsi les pôles propres et les rayons propres des petits cercles de la

sphère, nous aurons alors pour les positions mutuelles de deux petits cercles de la surface sphérique les mêmes critères que pour les cercles du plan (voir chapitre IV).

IV. — Quelques propriétés spéciales aux triangles sphériques, leurs aires comparées.

1° *Le fuseau sphérique et la notion d'aire sphérique.* — Les fuseaux sphériques de même angle sont, au moins d'une manière, superposables; ils représentent des *étendues* ou *aires* sphériques mesurables et comparables entre elles comme les angles des fuseaux considérés.

D'autre part si on partage un fuseau en deux portions par un plan perpendiculaire à l'arête du fuseau on obtient deux triangles sphériques bi-rectangles symétriques et isocèles admettant un mode de superposition indiqué par la figure 66.

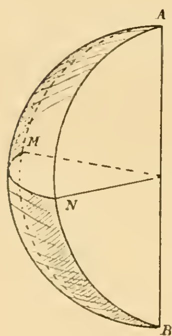


Fig. 66.

L'aire du fuseau est alors *double* de l'aire de l'un ou l'autre de ces triangles.

Nous appellerons *aires sphériques équivalentes :* des aires qui sont composées *de portions superposables en correspondance dans les deux figures.*

Si on prend comme unité d'aire *l'aire du triangle sphérique trirectangle* qui est la huitième portion de la sphère, l'aire d'un fuseau sera évidemment mesurée par deux fois le nombre qui mesure son angle comparé à l'angle droit.

2° Théorème. — *Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents.* — Si on élève sur deux côtés d'un triangle sphérique, et en leurs milieux, des arcs de grand cercle perpendiculaires respectivement à ces côtés, le point I (sans figure) où ces arcs se coupent est à des distances sphériques égales des trois sommets, il appartient donc à l'arc de grand cercle perpendiculaire au troisième côté en son milieu.

Soient (fig. 67, en haut) ABC et A'B'C' deux triangles sphériques symétriques, le point I' symétrique du point I de l'un sera évidemment à distances sphériques égales des trois som-

mets, puisque les éléments plans correspondants des figures symétriques sont égaux.

Pour la même raison les distances sphériques AI, AH, BH, HC sont respectivement égales à leurs symétriques, arcs A′I′, arc A′H′, arc B′H′, arc H′C′; d'où résulte que si le point I est intérieur à ABC, I′ sera intérieur à A′B′C′, et que si le point I est dans l'angle $\widehat{ABC}$ et de l'autre côté de AC que B, la position de I′ à l'égard des éléments symétriques A′B′C′ sera la même que la disposition précédente, quoiqu'avec une orientation différente.

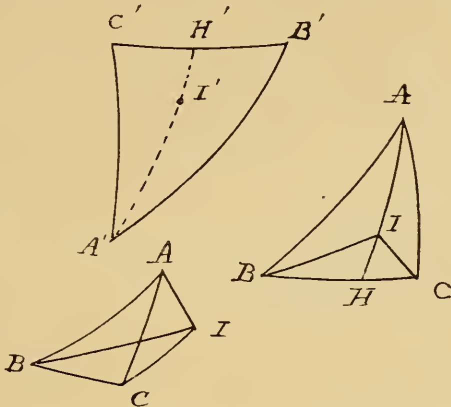


Fig. 67.

Le triangle sphérique considéré est alors la somme de trois portions additives ou la somme de deux portions positives diminuée d'une portion soustractive; ces portions sont *isocèles*, et par conséquent admettent un mode de superposition avec leurs symétriques, d'où résulte enfin que les deux triangles sphériques ABC et A′B′C′ *sont bien équivalents.*

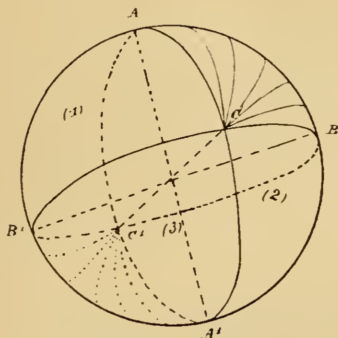


Fig. 68.

3° *Mesure de l'aire d'un triangle sphérique.* — En prolongeant (fig. 68) les côtés AC et CB jusqu'aux points A′ et B′ où ils recoupent respectivement le côté AB prolongé, on partage toute une moitié de la sphère en quatre triangles : ACB, et les trois triangles (1), (2), (3). Avec l'unité d'aire adoptée la demi-sphère vaut 4 unités; soient $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les angles du triangle sphérique considéré, le triangle (1) vaut le fuseau B moins le triangle ACB; le triangle (2)

vaut le fuseau A moins le triangle ACB; le triangle (3) vaut le fuseau C moins le symétrique A′C′B′ du triangle ACB, d'ailleurs équivalent à ce dernier; chaque fuseau étant mesuré par 2 fois son angle mesuré lui-même avec l'angle droit, nous aurons, par la décomposition de l'hémisphère ci-dessus définie,

$$(2A - \text{aire } ACB) + (2B - \text{aire } ACB) + (2C - \text{aire } ABC) + \text{aire } ACB = 4$$

d'où :

$$\text{aire } ABC = (A + B + C - 2) \text{ droits.}$$

c'est-à-dire :

Théorème. — *L'aire d'un triangle sphérique est mesurée par l'excès sur deux droits de la somme de ses angles*; c'est ce qu'on nomme *l'excès sphérique du triangle.*

CHAPITRE VI

Géométrie qualitative de la sphère. — Déplacements de pivotement d'un corps solide.

Où s'arrête la géométrie qualitative? Où commence la géométrie métrique?

I. — Triangles sphériques supplémentaires et trièdres associés.

En comparant les aires des triangles sphériques situés sur une même surface sphérique, nous avons reconnu que la somme des trois angles d'un triangle sphérique surpasse deux angles droits par un *excès* dont la valeur est proportionnelle à l'aire du triangle; cet excès est ce qu'on appelle l'excès sphérique du triangle.

On peut se proposer d'établir directement l'existence de cet excès sphérique soit sur le triangle sphérique, mais sans passer par la notion d'aire, soit sur l'angle trièdre dont le triangle est l'image.

C'est cette dernière méthode que nous suivrons.

Nous allons définir d'abord les trièdres *réciproques* ou

associés, dont les images sphériques seront deux triangles dits *polaires* ou *supplémentaires.*

Envisageons (fig. 69) un trièdre de sommet S et dont les arêtes sont les trois demi-droites SA, SB, SC. Par S élevons une droite perpendiculaire à la face BSC du trièdre, et nous aurons soin de la tirer du même côté de cette face que celui où se trouve l'arête SA, nous obtenons ainsi la demi-droite SA′; en répétant cette construction pour chaque face, nous formons un nouveau trièdre de sommet S et dont les arêtes sont SA′, SB′, SC′.

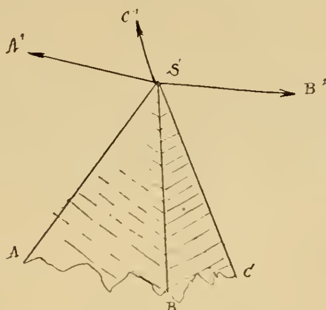


Fig. 69.

Ces deux trièdres sont dans une corrélation telle que *toute face* de l'un orientée par rapport à l'arête opposée, engendre une *arête correspondante* du second trièdre ; on les appelle deux trièdres *associés* ou *réciproques* ou encore : deux trièdres *supplémentaires ;* ces désignations se rattachent à des propriétés aussi simples que remarquables que nous allons maintenant établir.

1° Le mode d'association des deux trièdres est *réciproque.* Faisons d'abord la remarque suivante qui est une vérité de la Palice : considérons un assemblage de deux demi-droites (fig. 70) tirées par un point O d'un plan P, et dont l'une D est perpendiculaire à ce plan ; ces demi-droites seront d'un même côté du plan P ou bien de part et d'autre de ce plan suivant que l'angle de ces demi-droites sera *aigu* ou *obtus;* la remarque se justifie immédiatement en considérant l'intersection OU du plan P avec le plan passant par les droites données.

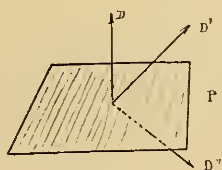


Fig. 70.

Dès lors, revenons à nos deux trièdres associés (fig. 69). L'arête SB′ a été conduite perpendiculaire au plan ASC ; l'arête SC′ a été menée perpendiculaire au plan ASB ; en particulier SB′ et SC′ sont l'une et l'autre, perpendiculaires à SA ; SA est donc une droite perpendiculaire à la face B′SC′

et comme l'angle A'SA *est aigu*, SA sera perpendiculaire à la face B'SC' et du même côté de cette face que SA'.

Ainsi le premier trièdre dérive du second trièdre, comme le second dérivait du premier.

2° Dans le trièdre d'arêtes SA, SB, SC, considérons le *dièdre* d'arête SC ; et (fig. 71) soient tracées : la droite SA' perpendiculaire orientée à la face CSB et la droite SB' perpendiculaire orientée à la face CSA de ce dièdre. Soit XSY l'angle rectiligne de ce dièdre ayant S pour sommet. Pour fixer les idées supposons XSY aigu, en ce cas :

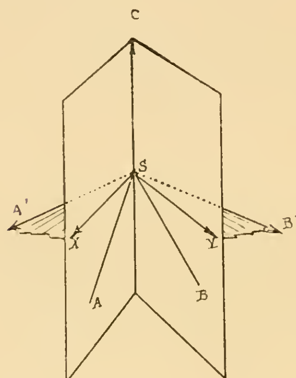


Fig. 71.

$$1^{dr} = \widehat{A'SY} = \widehat{XSY} + \widehat{A'SX} ;$$

et de même :

$$1^{dr} = \widehat{B'SX} = \widehat{XSY} + \widehat{YSB'} ;$$

ces égalités se lisent dans le plan du rectiligne du dièdre ; ajoutons ces égalités membre à membre, on aura :

$$2^{dr} = \widehat{XSY} + (\widehat{A'SX} + \widehat{XSY} + \widehat{YSB'})$$
$$= \widehat{XSY} + \widehat{A'SB'} .$$

Ainsi *une face* du trièdre associé est le *supplément* de l'angle dièdre *correspondant* qui a pour arête l'arête du trièdre primitif *associée à cette face du second trièdre*.

Nouvelles propriétés des trièdres déduites de la notion des trièdres associés. — Soient : a, b, c, les faces et A, B, C, les dièdres d'un trièdre T, opposés à ces faces ; soient : a', b', c', les faces et A', B', C', les dièdres du trièdre T' associés à T ; d'après la propriété déjà établie, et d'après la réciprocité de l'association des deux trièdres on a :

$a = 2^{\delta} - A'$,	$A = 2^{\delta} - a'$,
$b = 2^{\delta} - B'$,	$B = 2^{\delta} - b'$,
$c = 2^{\delta} - C'$,	$C = 2^{\delta} - c'$.

Or dans le trièdre T' on a :

$$a' + b' + c' < 4^{dr} ;$$

Or des égalités précédentes on déduit :

$$A + B + C = 6^{dr} - (a' + b' + c') ,$$

c'est-à-dire :

$$A + B + C > 6^{dr} - 4^{dr} \text{ ou } 2^{dr} .$$

Nous retrouvons ainsi l'existence de l'excès sphérique, comme propriété corrélative du *théorème du parapluie*. (Chap. III.)

Cherchons de même un théorème corrélatif du théorème qui montre toute face d'un trièdre plus petite que la somme des deux autres ; soit a' la *plus grande face* du trièdre T' on a :

$$a' < b' + c'$$

ou en vertu des égalités précédentes :

$$2 - A < 2 - B + 2 - C \quad \text{ou} \quad A + 2 > B + C .$$

Ainsi : *dans un angle trièdre le plus petit dièdre augmenté de deux droits dépasse la somme des deux autres dièdres.*

Remarque. — Le théorème sur l'excès sphérique peut encore s'énoncer ainsi :

Dans un triangle sphérique, un angle extérieur est plus petit que la somme des angles intérieurs qui n'ont pas même sommet que lui.

II. — Le problème du dallage de la sphère.

Nous appelons *polygone sphérique convexe* une portion de la sphère, limitée par des arcs de grand cercle, mais située tout entière dans une même hémisphère bornée par chaque côté du polygone prolongé en circonférence entière de grand cercle.

On voit sans peine que si on considère un polygone convexe *régulier*, c'est-à-dire ayant ses angles égaux entre eux et ses côtés égaux entre eux, les sommets de ce polygone seront tous situés sur un même petit cercle dont le pôle sera dit un pôle du polygone.

Problème. — Quels sont les polygones réguliers sphériques convexes que l'on peut reproduire et réunir, contigus par côtés et par sommets, de manière à recouvrir toute la sur-

face de la sphère, *sans répétition ni lacune?* en d'autres termes quels sont les polygones réguliers convexes aptes à *daller* la surface de la sphère? Désignons par x le *nombre* des polygones réunis autour d'un même sommet ou *nœud* du réseau de dallage, x angles contigus formant 4 angles droits, chaque angle du polygone vaut $\frac{4}{x}$ droits. D'autre part, soit y le nombre des côtés de chaque polygone, ou *dalle*. Du pôle de chaque dalle, on verra chaque côté de la dalle sous un angle sphérique égal à $\frac{4}{y}$ droits; le triangle isocèle qui a pour sommet ce pôle et pour base un côté de la dalle a un *excès sphérique* égal à $\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2$ droits.

Ce nombre mesure la surface sphérique de la y^{me} partie de la dalle quand on prend comme unité le triangle trirectangle qui vaut le $\frac{1}{8}$ de la sphère; avec cette unité l'aire d'une dalle est donc $\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2\right) y$; dès lors, si nous nommons z le nombre des *dalles* dont l'ensemble recouvre la sphère, on aura *entre les trois nombres* ENTIERS x, y et z la relation :

$$\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2\right) z \cdot y = 8$$

que nous pourrons écrire ainsi :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2} = \frac{2}{zy} \quad (1)$$

le problème du dallage sphérique revient donc à trouver tous les nombres entiers x, y, z unis par cette relation, ou comme on dit encore à résoudre l'équation (1) en nombres entiers.

Ce problème d'arithmétique est d'ailleurs très facile; nous nous contenterons ici d'en énoncer les solutions, qui sont au nombre de cinq, savoir :

1re solution : $x = 3$, $y = 3$, $z = 4$;
2me solution : $x = 3$, $y = 4$, $z = 6$;
3me solution : $x = 3$, $y = 5$, $z = 12$;
4me solution : $x = 4$, $y = 3$, $z = 8$;
5me solution : $x = 5$, $y = 3$, $z = 20$.

Ces cinq modes de dallages sphériques font évidemment connaître aussi cinq solides, limités par des polygones réguliers qui sont réunis par leurs côtés et assemblés par angles polyèdres réguliers ; ces solides, nommés *polyèdres réguliers convexes,* ont tous leurs sommets situés sur la surface sphérique que l'on a envisagée.

III. — Triangles sphériques et rotations successives d'un solide.

Glissement sphérique. — Quand un corps solide reste cloué par un point fixe O et qu'il se meut, ce mouvement se nomme un mouvement de *pivotement;* une portion du solide qui est à un instant sur une surface sphérique ayant le point O comme centre demeurera sans cesse sur la surface de cette même sphère. Comme trois points définissent un solide, on peut dire que le mouvement de pivotement équivaut au glissement d'une figure sphérique sur sa sphère.

1° *Effet de deux rotations successives.* Soient marqués sur la sphère considérée les pôles de deux rotations successives; sans doute, pour chaque rotation on pourrait hésiter entre deux pôles, mais nous adopterons le pôle sur lequel un observateur marchant sur la sphère, étant posé tête hors la sphère, verrait s'accomplir la rotation considérée dans un sens déterminé par rapport à sa gauche et à sa droite; A (fig. 72) est le point de la sphère fixe qui va être le pôle de la *première* rotation; B est le point de la sphère fixe qui va être le pôle de la *deuxième* rotation.

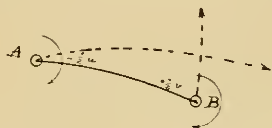


Fig. 72.

On peut même supposer que ces rotations soient chacune moindre qu'un demi-tour, soit alors u la rotation sur A vue par l'observateur posé sur le pôle A dans le sens des aiguilles d'une montre, soit de même v la rotation également orientée sur le pôle B.

Nous nous proposons de construire un point de la figure sphérique entraînée qui finalement n'aura pas bougé; à cet effet joignons le premier pôle A au second par un arc de grand cercle AB moindre qu'une demi-circonférence.

Faisons tourner (fig. 73) l'arc $\overrightarrow{AB}$ autour de A d'un angle $\frac{1}{2}u$, mais en sens contraire du sens de la rotation donnée, nous obtenons sur l'hémisphère (1) un arc AX; faisons de même tourner l'arc $\overrightarrow{BA}$ autour du second pôle d'un angle $\frac{1}{2}v$, mais dans le sens même de la seconde rotation; nous obtenons ainsi un arc BY allant encore sur l'hémisphère (1); les deux arcs AX et BY se croisent sur l'hémisphère (1) en un point C.

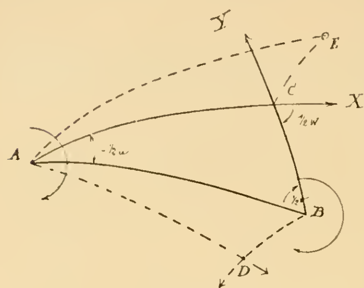


Fig. 73.

Le point de la figure sphérique qui était en C avant la première rotation va par cette rotation venir en D, position symétrique de C par rapport au plan de l'arc AB; la seconde rotation ramène le point D en C. C n'a donc, en définitive, point bougé.

Donc, le déplacement final du solide résulte d'une rotation autour de C qui représente sur la sphère *l'axe* qui joint à C le centre O de la sphère.

Ainsi deux rotations dont les axes se croisent en un point O *sont remplaçables par une rotation unique dont l'axe passe aussi par le même point* O.

Remarque. — Si l'ordre des rotations avait été changé, mais si leurs grandeurs et si leurs pôles sur la sphère fixe avaient été maintenus, le pôle C de la rotation unique remplaçant les deux autres eût été au point D.

Grandeur de la rotation remplaçante. — Soit (fig. 73) E le point symétrique de B par rapport au plan de l'arc AX, le point E de la figure sphérique vient en B par la première rotation, de plus il y demeure pendant la seconde rotation.

De là résulte que l'angle $\widehat{XCB}$ extérieur au triangle ACB représente la moitié $\frac{1}{2}$ w de la rotation *remplaçante* w.

2° Théorème. — *Tout déplacement défini de pivotement sur un point* O *peut toujours être réalisé par une rotation exécutée autour d'un certain axe passant par* O.

En effet, une figure sphérique a toujours sa situation définie par les situations de deux de ses points ; or le changement des positions de ceux-ci peut toujours être produit par un premier changement amenant le point P (fig. 74) en sa position finale P′, suivi d'une rotation *convenable* autour du pôle P′, qui laisse la droite OP′ invariable.


Fig. 74.

Le premier changement peut être réalisé par une rotation convenable exécutée autour d'un pôle I appartenant à l'arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc PP′ en son milieu, *et ceci, même d'une infinité de manières*. Le déplacement final de la figure est donc produit par une première rotation autour de I suivie d'une seconde rotation autour de P′ ; or nous venons de voir que ces deux déplacements successifs peuvent être remplacés par une rotation unique, et le théorème est démontré.

Remarques. — Il est d'ailleurs bien évident, d'après la définition de la ligne droite, et les propriétés des trames, que deux rotations autour de deux axes concourants ne s'équivalent que si elles sont exécutées autour d'un même axe. D'où la conséquence suivante :

Autre remarque. — Si le pôle A est donné, le lieu des axes des secondes rotations qui produisent après une rotation de pôle A un pivotement *total donné* est un plan, c'est le plan du grand cercle qui fait en C avec l'arc $\overrightarrow{CX}$ (fig. 73) l'angle *déterminé* $\frac{1}{2}$ w.

IV. — Fin de la Géométrie qualitative. Prévision de la Géométrie métrique.

Un triangle plan ou un triangle sphérique, image d'un trièdre, renferment 6 éléments : 3 côtés et 3 angles ; notons seulement que dans un triangle sphérique les mots côtés, appliqués aux arcs de cercle qui forment les côtés, désignent en réalité : les angles au centre de la sphère dont ces arcs sont les images, ou encore les faces du trièdre correspondant au triangle sphérique.

Aux trois cas généraux d'égalité des triangles plans correspondent, on le vérifie bien aisément, trois cas d'*égalité ou symétrie* des triangles sphériques. Exemple : si deux triangles sphériques ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, l'un des triangles est ou bien égal à l'autre ou égal à un symétrique de l'autre.

Or, ces divers cas d'égalité nous montrent que, aussi bien dans les triangles sphériques que dans les triangles plans, les six éléments d'un triangle solide dépendent de trois d'entre eux, puisque trois d'entre eux permettent de construire le triangle ou son symétrique. Il doit donc exister un moyen de *calculer* ou de *construire* les grandeurs de trois des éléments du triangle, *connaissant les trois autres.*

Ces constructions ou *ces calculs* seront l'objet du second livre de la géométrie naturelle, elles formeront la géométrie *quantitative ou métrique.*

Nous terminons ici le *premier livre,* et nous pourrons le résumer en disant qu'il comprend essentiellement :

1° La notion des deux mouvements fondamentaux d'un solide : rotation autour d'une droite; translation avec guidage plan autour d'une droite qui est l'axe de la translation.

2° L'ajustage ou la correspondance des figures égales.

3° La symétrie.

C'est ce qu'on peut encore appeler la *Géométrie qualitative.* Elle doit être enseignée avec des *modèles* de solides et de mouvements.

J. Andrade (Besançon).

P.-S. — *Remarques.* — I. Bien que l'exposé didactique du premier livre de la géométrie nouvelle soit achevé, je rappellerai aux lecteurs de cette *Revue* que le second livre ou la géométrie métrique a été approfondi ici même dans mon article intitulé « Les fonctions angulaires dans la géométrie de l'ajustage » (8e année, p. 257-281). Cet article pourra être aisément et considérablement allégé en vue d'un enseignement élémentaire qui, à mon avis, doit rester euclidien (en ce sens qu'on adoptera avec Euclide le phénomène de la similitude), mais qui néanmoins doit faire *sentir,* même au débutant, que le solide euclidien pour être le plus simple n'est pourtant pas le seul, logiquement possible, et cela suffira pour une première étude élémentaire.

II. Quittons maintenant le domaine pédagogique. Voici une re-

marque qui peut intéresser les lecteurs géomètres ; les propriétés de l'étendue vectorielle en géométrie générale, telles que je les ai exposées dans l'article précité, vont être éclairées d'un nouveau jour par le théorème d'Ampère-Stokes.

En effet, le vecteur *tourbillon* d'un vecteur donné, correspond à une distribution continue et même dérivable; or, les deux caractères de *dérivabilité* et de continuité, dont le premier contient d'ailleurs le second, ne sont pas essentiellement euclidiens. De là l'extension du théorème d'Ampère-Stokes en géométrie générale; enfin, cette extension nous donne immédiatement et d'une manière intuitive le théorème suivant :

L'espace euclidien est le seul dans lequel puisse exister un réseau triple orthogonal avec conservation de la longueur des arcs correspondants ; en d'autres termes, le théorème d'Ampère-Stokes nous montre de suite que si l'élément linéaire ds d'un espace est réductible à la forme :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

cet espace est nécessairement euclidien.

Ce rapprochement entre la *méthode classique* des $(ds)^2$ et ma *méthode vectorielle* pour l'étude de la géométrie générale me paraît intéressant à signaler.

J. A.

L'IMPORTANCE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DES VECTEURS DANS LE CALCUL VECTORIEL GÉNÉRAL

Une fois établi (et cela nous semble logique) que : « *l'unification des notations vectorielles doit être faite en tenant compte des résultats auxquels conduira l'analyse, complète et rationnelle, des entités géométriques et mécaniques, de leurs opérations et de leurs fonctions,* » nous croyons utile d'indiquer brièvement l'état actuel des recherches relatives à la question, et quelles sont les entités qui doivent encore être étudiées par rapport à leur théorie générale et à leurs applications.

M. R. Marcolongo et moi, nous avons étudié [1] sous l'as-

[1] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* Nota I, tomo XXIII (1° sem. 1907) : Nota II, t. XXIV; 2° sem. 1907): Nota III, t. XXIV : Nota IV, t. XXV (1° sem. 1908) : Nota V (ed ultima), t. XXVI (2° sem. 1908).

pect *historique, scientifique, logique* et *pratique*, les systèmes vectoriels qui sont employés actuellement. Avec les entités *nombre réel, point, vecteur*, et les opérations et fonctions *somme* (+), *différence* (—), *produit par un nombre* (symbole sous-entendu), *produit interne* (×), *produit vectoriel* (∧), *rotation dans un plan* ($e^{i\varphi}$), *gradient* (grad), *divergence* (div), *rotation* (rot), nous avons obtenu le SYSTÈME MINIMUM, qui, les notations exclues, coïncide avec le système de GIBBS. Par ce système nous avons déduit le *calcul barycentrique* de MÖBIUS (Note II), les *quaternions* de HAMILTON (Note III) et les *formations géométriques* de GRASSMANN (Note V); et ces dernières, sous une forme très simple, analogue à celle donnée par M. G. PEANO, et suivie par M. CARVALLO et par d'autres auteurs. Nous avons aussi fait observer (Note V) que le système minimum est *insuffisant*. Il doit être complété par les transformations linéaires des vecteurs, *nécessaires* pour la résolution de plusieurs questions, et par les formations géométriques de GRASSMANN-PEANO, *nécessaires* lorsque les *droites*, les *plans*, les *systèmes de forces appliquées à un corps rigide*, doivent-être considérés comme des entités *autonomes*. Les barycentres et les quaternions sont insuffisants dans ce but.

L'interprétation erronée des concepts et des symboles de HAMILTON a donné naissance à certaines notations vectorielles qui, sans l'usage systématique des quaternions, sont *inexactes, impropres et inopportunes*. Nous avons tâché de démontrer cela, M. MARCOLONGO et moi, dans la Note III.

J'ai encore examiné la question des quaternions dans ma Note [1] « I Quaternioni di HAMILTON e il calcolo vettoriale » dans le but d'établir exactement quelle est la relation entre les quaternions et les transformations linéaires, et de montrer que le *produit complet* (détaché des *vrais* quaternions) ne possède point la *vertu magique* que quelque auteur lui attribuait. Je rappelle, ici, le principal résultat : *les quaternions forment, il est vrai, un système à quatre dimensions, mais ce système n'est pas linéaire, dans la complète signification du mot « linéaire »*.

[1] *Atti dell'Accademia delle scienze di Torino*, 1908.

Si nous observons que dans plusieurs questions de Physique et de Mécanique on rencontre des *vraies* transformations linéaires [1] qui ont 6 ou 9 ou 18 dimensions, il est bien aise d'en déduire que les quaternions sont entièrement insuffisants pour établir un calcul mécanique *complet.*

Les applications du système minimum que nous avons données dans la Note IV, prouvent amplement comment, aussi dans les questions qui ne réclament pas l'usage des entités de GRASSMANN, il est bien plus simple de faire usage des vecteurs que des quaternions. Mais les études que nous venons d'indiquer, ne montrent pas encore comment on peut résoudre la question de la *composition des rotations autour d'axes qui ne sont point parallèles*, avec un calcul formal aussi simple que celui qui résout les autres questions. Il est bien connu que le problème est résolu par les quaternions avec un *symbole à joug*. Il est donc permis de douter que l'on doive toujours dépendre de la théorie des quaternions pour la résolution de ce problème fort important en Géométrie et en Mécanique. Mais ce doute n'est point légitime. Pour les *rotations,* et en général pour tous *mouvements des systèmes rigides,* on peut faire usage des *transformations linéaires des vecteurs en vecteurs*, transformations nécessaires et qui ont un algorithme bien plus simple que celui des quaternions.

J'indique, ici, les principaux résultats en faisant usage des notations que nous avons proposées.

1. — Une *transformation linéaire de vecteurs en vecteurs* ou bien une *homographie vectorielle* σ, est toujours décomposable, et d'une seule manière, dans la somme de deux homographies μ, λ, caractérisée par les conditions

$$\mathbf{x} \times \mu\mathbf{y} - \mathbf{y} \times \mu\mathbf{x} = 0 \ , \quad \mathbf{x} \times \lambda\mathbf{y} + \mathbf{y} \times \lambda\mathbf{x} = 0$$

vérifiées quels que soient les vecteurs $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Nous appellerons *dilatation de* σ, ou $D\sigma$, l'homographie μ : car μ donne, dans les *déformations des systèmes*, la *dilatation*, ou *vibration*, et l'ellipsoïde (de LAMÉ) correspondent.

[1] C. BURALI-FORTI, *Atti Accad. Torino :* Sopra alcune operazioni proiettive applicabili nella Meccanica (1906) : Sulle omografie vettoriali (1907) : Funzioni vettoriali (1907).

L'homographie λ donne la *rotation* de la déformation. Précisément : il existe un vecteur u tel que, quel que soit le vecteur x,

$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} .$$

Le vecteur u sera appelé *vecteur de σ*, ou $V\sigma$.

On a donc, identiquement,

$$\sigma = D\sigma + (V\sigma \wedge \quad \text{ou bien} \quad \sigma\mathbf{x} = D\sigma\mathbf{x} + (V\sigma) \wedge \mathbf{x} .$$

Si $D\sigma$ est un nombre réel (la quadrique de dilatation est une *sphère*) alors : *l'homographie σ, à laquelle on donne comme champ d'application*[1] *le champ formé par les vecteurs normaux au* $V\sigma$, *est précisément le quaternion dont* $D\sigma$ *est le scalaire et* $V\sigma$ *est le vecteur ; mais cette transformation spéciale n'est pas une homographie.*

Avec l'homographie σ il est important de considérer la *conjuguée de σ*, ou $K\sigma$, définie par

$$K\sigma = D\sigma - (V\sigma) \wedge .$$

L'*invariant troisième de σ*, ou $\mathrm{inv}_3\sigma$, est le nombre réel

$$\frac{\sigma\mathbf{u} \wedge \sigma\mathbf{v} \times \sigma\mathbf{w}}{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{w}}$$

quels que soient les vecteurs, non complanaires, u, v, w.

Les *invariants deuxième et premier de σ*, ou $\mathrm{inv}_2\sigma$, $\mathrm{inv}_1\sigma$, sont définis par la relation

$$\mathrm{inv}_3 (x + \sigma) = x^3 + (\mathrm{inv}_1\sigma)\, x^2 + (\mathrm{inv}_2\sigma)\, x + \mathrm{inv}_3\sigma$$

quel que soit le nombre réel x.

L'algorithme général des homographies est fort intéressant ; nous citons seulement les formules suivantes[2] :

$$\mathbf{x} \times \sigma\mathbf{y} = \mathbf{y} \times K\sigma\mathbf{x}$$

$$\sigma(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = (\mathrm{inv}_1\sigma)\, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} - \mathbf{x} \wedge K\sigma\mathbf{y} + \mathbf{y} \wedge K\sigma\mathbf{x}$$

$$\sigma \{ (K\sigma\mathbf{x}) \wedge (K\sigma\mathbf{y}) \} = K\sigma \{ (\sigma\mathbf{x}) \wedge (\sigma\mathbf{y}) \} = (\mathrm{inv}_3\sigma)\, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} .$$

[1] Voir note p. 412.

[2] M. Marcolongo et moi, nous espérons publier prochainement une étude complète de la théorie des homographies vectorielles et de leurs applications à la Physique et à la Mécanique.

2. — Nous appellerons *mouvements vectoriels*[1], les homographies σ qui ne changent pas la longueur des vecteurs,

$$(\sigma \mathrm{x})^2 = \mathrm{x}^2 .$$

Elles sont caractérisées par la condition

$$\sigma (K\sigma) = 1$$

et on a toujours

$$\mathrm{inv}_3 \sigma = \pm 1 .$$

Si σ, λ sont des *mouvem. vect.*, $\lambda\sigma$, $K\sigma$, σ^{-1}, sont aussi des *mouvem. vect.*, et on a

$$\sigma (V\sigma) = \pm V\sigma \quad \text{selon que} \quad \mathrm{inv}_3 \sigma = 1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{inv}_3 \sigma = -1 .$$

Les propriétés suivantes sont fondamentales.

Si $V\sigma \neq 0$ et $\mathrm{inv}_3 \sigma = 1$, alors $\sigma \mathrm{x}$ est *le vecteur qu'on obtient en donnant au vecteur* x *une rotation autour du vecteur* $V\sigma$, *d'un angle* φ *tel que*

$$\sin \varphi = \mathrm{mod}\, V\sigma , \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} (\mathrm{inv}_1 \sigma - 1) ;$$

ainsi *les* « mouvem. vect. » σ *tels que* $V\sigma \neq 0$ *et* $\mathrm{inv}_3 \sigma = 1$, *sont des rotations autour du* $V\sigma$.

Si $V\sigma = 0$ alors $\sigma^2 = 1$ et le vecteur $\mathrm{x} + \sigma \mathrm{x}$ a une direction fixe (qui ne dépend pas de x, mais varie avec σ) ou est parallèle à une orientation fixe : *les* « mouvem. vect. » σ *tels que* $V\sigma = 0$, *sont des symétries par rapport à une direction ou à une orientation, selon que* $\mathrm{inv}_3 \sigma = 1$ *ou* $\mathrm{inv}_3 \sigma = -1$.

Cela justifie la dénomination *mouvement vectoriel.*

3. — Voici des *applications.*

Soient : i, u des vecteurs unitaires ; $\alpha = \mathrm{ang}\, (\mathrm{i}, \mathrm{u})$; σ, λ les rotations autour de i et u des angles φ, ψ.

Un *calcul direct,* bien plus simple que le calcul correspondant avec les quaternions, prouve que $\lambda\sigma$ est la rotation

[1] J'avais déjà envoyé cet article à *L'Ens. Mathém.* lorsque j'ai reçu l'intéressant mémoire de M. Mario Pieri, *La Geometria elementare istituita sulle nozioni di punto et sfera* (*Mem. delle Soc. ital. delle Scienze*, série 3a, t. XV). Je préfère la nomenclature de M. Pieri à celle dont j'ai fait usage dans cette note. Au lieu de « *mouv. vect.* » il vaudra mieux dire « *isomérie vectorielle* », et tout simplement « *isomérie* » au lieu de « *mouv. géom.* » (n° 4).

autour du vecteur

$$\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\,\mathbf{i}+\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\,\mathbf{u}-\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{u}$$

de l'angle

$$-2\cos^{-1}\left\{\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\right\}.$$

Si $\varphi=\psi=\pi$, c'est-à-dire, si σ, λ sont les symétries par rapport à $\mathbf{i}$ et $\mathbf{u}$, alors un calcul direct, fort simple, prouve que $\lambda\sigma$ est la rotation autour de $\mathbf{i}\wedge\mathbf{u}$ de l'angle 2α.

On parvient à ces résultats plus rapidement, comme on sait, par des considérations géométriques[1], mais cela ne diminue l'importance du calcul direct qui, dans certains cas, est nécessaire.

4. — Nous appellons *mouvement géométrique*, toute transformation linéaire qui change une forme géométrique de premier ordre de Grassmann en une forme du même ordre, avec la condition de transformer points en points et vecteurs en vecteurs de même module[2]. La forme générale d'un *mouv. géom.*, est

$$\theta=\begin{pmatrix}B, & \sigma\mathbf{u}, & \sigma\mathbf{v}, & \sigma\mathbf{w}\\ A, & \mathbf{u}, & \mathbf{v}, & \mathbf{w}\end{pmatrix}$$

où A, B sont des *points* et σ est un *mouv. vect.*

Supposons par exemple, que $V\sigma\neq0$ et $\mathrm{inv}_3\sigma=1$. On a identiquement, étant P un point quelconque,

$$P=A+(P-A)$$

et par conséquent,

$$(1)\quad \theta P=B+\sigma(P-A),\ \theta P-P=B-A+\sigma(P-A)-(P-A);$$

mais $\sigma(P-A)$ et $P-A$ ont la même projection sur une droite parallèle à $V\sigma$ et la dernière formule donne

$$(\theta P-P)\times V\sigma=(B-A)\times V\sigma.$$

[1] Voir, par ex., M. Pieri, *loc. cit.*

[2] Une transformation de points en points ne peut pas être linéaire, car « la somme de deux points » ou le produit d'un point par un nombre n'est pas un point. Les transformations que nous venons de considérer conservent la *masse* des formes du premier ordre, et la *longueur* des vecteurs.

Si, donc, nous posons

$$\mathbf{v} = \frac{(B - A) \times V\sigma}{(V\sigma)^2} V\sigma ,$$

les points θP, $P - \mathbf{v}$, ou bien, $P + \mathbf{v}$, θP, ont la même projection sur une droite parallèle à $V\sigma$.

Menons par le point A le plan γ normal à $V\sigma$: le point $B - \mathbf{v}$ est placé sur ce plan. Sur le plan γ existe un point O, et un seul, tel que

$$O + \sigma(A - O) = B - \mathbf{v} ;$$

mais d'après la première des formules (1), nous avons

$$\begin{aligned} \theta P - \mathbf{v} &= B - \mathbf{v} + \sigma(P - A) = \\ &= O + \sigma(A - O) + \sigma(P - A) = O + \sigma(P - O) , \\ \theta P &= O + \sigma(P - O) + \mathbf{v} ; \end{aligned}$$

donc : *le mouvement géométrique* θ *est un mouvement hélicoïdal dont l'axe est parallèle à* $V\sigma$ *et la translation est* $\mathbf{v}$. (Théorème de Mozzi).

Il est bien connu que : *le produit de deux symétries par rapport à deux axes est un mouvement hélicoïdal*, etc. — La démonstration formale est fort simple. Soient : $\mathbf{i}$, $\mathbf{u}$ vecteurs unitaires parallèles aux axes donnés ; A, B les points qui donnent la moindre distance entre les deux axes ($B - A$ est parallèle à $\mathbf{i} \wedge \mathbf{u}$) ; σ, λ les *mouv. vect.*, qui sont les symétries par rapport à $\mathbf{i}$ et $\mathbf{u}$. Si P est un point, le symétrique de P par rapport à l'axe A$\mathbf{i}$ est

$$P_1 = A + \sigma(P - A) ,$$

et le symétrique de P_1 par rapport à l'axe B$\mathbf{u}$ est

$$\theta P = B + \lambda(P_1 - B) = B + \lambda(A - B) + \lambda\sigma(P - A) ;$$

mais

$$\lambda(A - B) = B - A \qquad \text{(hypothèses)}$$

et donc

$$\theta P = A + 2(B - A) + \lambda\sigma(P - A)$$

par laquelle résulte (n° 3) que : *la droite* A B *est l'axe du mouvement hélicoïdal*, 2 (B — A) *en est la translation et* 2 ang ($\mathbf{i}$, $\mathbf{u}$) *la rotation.*

C. Burali-Forti (Turin).

CHRONIQUE

Les mathématiques au 37me congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences. Clermont-Ferrand, 3—10 août 1908.

I. *Séance d'ouverture.* — Le 37me congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences s'est ouvert le lundi 3 août, à Clermont-Ferrand, sous la présidence de M. P. Appell, membre de l'Institut. Dans un remarquable discours d'ouverture le président de l'Association a examiné, avec une haute compétence, la question de *l'enseignement des sciences et la formation de l'esprit scientifique*[1].

En se plaçant à ce point de vue il parle successivement de l'école primaire française, où l'on trouve un enseignement trop théorique, trop abstrait, trop éloigné des réalités qui entourent l'écolier; de l'enseignement secondaire, dont la principale raison d'être est dans la préparation à l'enseignement supérieur scientifique ou technique; et de l'enseignement supérieur des sciences tel qu'il est donné dans les Facultés. Pour chacune de ces catégories il indique les progrès réalisés, les défauts et les abus qui subsistent et les remèdes qu'il serait désirable d'apporter pour assurer le développement de l'esprit scientifique. Dans les Lycées l'enseignement des mathématiques a été rendu plus intuitif, avec moins de théorèmes et plus de problèmes, le cours dicté a été supprimé, le passage d'une classe à l'autre interdit aux incapables; mais toutes ces modifications resteront stériles, dit-il, si le système d'examens du baccalauréat est maintenu, avec ses vastes programmes, l'absence de toute épreuve pratique, l'effort énorme de mémoire qu'il exige pour quelques jours. D'autre part les agrégations de l'enseignement des sciences expérimentales demandent une érudition écrasante; elles sont faites comme à souhait pour former des maîtres qui écraseront, à leur tour, la jeunesse sous le poids de leurs connaissances théoriques.

Le but de l'enseignement supérieur est triple. I. *Faire de la science* (travaux de recherches, laboratoires de recherches, collec-

[1] Ce discours se trouve reproduit dans la *Revue scientifique* du 8 août et dans la *Revue du mois* du 10 août.

tions, bibliothèques); les établissements chargés de cette fonction primordiale sont le Collège de France, les laboratoires de recherches dans les diverses universités, le Muséum; chacun de ces établissements a d'ailleurs sa mission propre. — II. *Enseigner la science*, c'est le rôle des Facultés des sciences. — III. *Appliquer la science.* Cette fonction est dévolue aux Ecoles ou instituts techniques. Mais pour le moment ces écoles n'ont pas de laboratoires et elles se bornent à des enseignements de science pure qui pourraient et qui devraient être donnés dans les Facultés des sciences. On réaliserait un grand progrès en supprimant les enseignements théoriques et en exigeant des candidats aux écoles techniques d'avoir pris, dans les Facultés des sciences, certains certificats et diplômes déterminés sur les matières de l'enseignement supérieur jugées indíspensables. Les ressources des écoles techniques seraient alors entièrement consacrées à leur objet propre. Le savant conférencier rappelle, à titre d'exemple, que c'est dans cet esprit qu'a été entreprise la récente réforme de l'Ecole normale supérieure qui joue le rôle d'institut technique de préparation aux fonctions de professeur, la culture scientifique étant donnée auparavant dans les Facultés.

II. *Communications* présentées aux sections 1 et 2 (*Mathématiques*, *Astronomie*, *Géodésie et Mécanique*). — Le Bureau de ces sections était composé comme suit : Président d'honneur, M. P. Appell, doyen de la Faculté des Sciences de Paris ; président, M. Pellet, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand; vice-président, M. Ern. Lebon, professeur honoraire au Lycée Charlemagne à Paris ; secrétaires, MM. Richard et Rousseau, professeurs au Lycée de Dijon.

1. — E.-N. Barisien (Paris), *Résolution de l'équation du troisième degré.* — Procédé permettant de ramener le polynome

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

à la forme :

$$A(x + \alpha)^3 + B(x + \beta)^3,$$

ce qui permet de résoudre l'équation complète du troisième degré.

2. — Emile Borel (Paris), *Enseignement des mathématiques dans les Facultés.* — L'auteur signale, parmi les branches des mathématiques appliquées trop négligées dans nos Universités, les applications des mathématiques et en particulier du calcul des probabilités aux questions statistiques, économiques et financières. Ces « mathématiques sociales » ont une importance pratique chaque jour croissante et donnent lieu, en Allemagne, en Angleterre, en Autriche, en Italie, à des enseignements importants et à des publications nombreuses ; une section spéciale a été créée pour cette branche de la science au dernier Congrès des mathé-

maticiens, et l'intérêt théorique de certaines questions soulevées est souvent considérable. En France l'initiative privée a été seule à s'intéresser à ces sujets et, sans méconnaître l'importance des résultats obtenus par ses efforts, on doit regretter que l'Université ne s'y associe pas.

3. — Aug. Boutin (Paris), *Sur un certain groupe de nombres.* — Cette note constitue une indication sommaire des nombres d'un carré arithmétique :

$$Z_{m,p} = pZ_{m-1,p} + mZ_{m,p-1}$$

avec les valeurs initiales : $Z_{1,p} = 1, \ldots, Z_{m,1} = 1$, nombres signalés par M. C.-A. Laisant.

L'auteur donne l'expression générale de $Z_{m,p}$ en m, et en p, les fonctions génératrices de ces nombres, puis il indique leur introduction naturelle dans la sommation de la suite :

$$1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \ldots.$$

On peut leur rattacher un autre triangle arithmétique qu'il serait également intéressant d'étudier.

4. — Aug. Boutin (Paris), *Développement de $\sqrt{N}$ en fraction continue et résolution des équations de Fermat.* — Cette note donne une période de la série des quotients incomplets de $\sqrt{N}$, pour un assez grand nombre de valeurs algébriques de $N = ax^2 + bx + c$. Après avoir rappelé la solution des équations de Fermat, quand on connaît la plus petite solution, l'auteur obtient cette plus petite solution pour diverses valeurs algébriques de N. Enfin, il établit la période des quotients incomplets de $\sqrt{N}$, de $N = 2$ à $N = 1023$, et la plus petite solution (en dehors de $x = 1$ $q = 0$) de l'équation de Fermat :

$$x^2 - Nq^2 = 1$$

de $$N = 2 \text{ à } N = 450.$$

Ces deux tables numériques peuvent rendre de réels services aux mathématiciens.

5. — Ernest Lebon (Paris), *Pour la recherche des facteurs premiers des grands nombres.* — Après avoir indiqué l'espace qu'occupait une *Table d'Éléments donnant les facteurs premiers des nombres jusqu'à cent millions,* en prenant la base 510 510, l'auteur donne une suite de théorèmes généraux, ou *lois,* permettant de décomposer en deux facteurs des nombres ayant la forme :

$$x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + \ldots.$$

α, β, γ étant des entiers quelconques décroissants. Par exemple : *Les nombres de la forme :*

$$x^{2m+1} + x^{2m-2} + ... + x^{m+3} + x^{m+1} + x^{m} + x^{m-2} + ... + 1$$

sont divisibles par les nombres de la forme :

$$x^{m-2} + x^{m-3} + ... + 1.$$

Enfin, il expose d'autres lois plus générales encore.

6. — A. Pellet (Clermont-Ferrand), *Sur les équations ayant toutes leurs racines réelles.*

7. — P. Appell (Paris), *Sur un théorème relatif au déplacement initial d'un système sans frottement.* — Si un système de points de masses m_1, m_2, ... m_p, assujettis à des liaisons sans frottements, part du repos, sous l'action de forces données, le déplacement initial est caractérisé par la propriété suivante. Soient dS_1 dS_2 ... dS_p les déplacements des divers points : *parmi tous les déplacements possibles pour lesquels* :

$$dS = \sqrt{m_1 \, dS_1^2 + ... + m_p \, dS_p^2}$$

a une valeur donnée, le déplacement initial est celui qui rend maximum le travail des forces appliquées.

Cette règle paraît pouvoir être étendue au cas de frottement.

8. — A. Gérardin (Nancy), *Recherches sur les nombres amiables.*

9. — A. Gérardin (Nancy), *Sur la résolution en entiers positifs* de

$$x^p \pm ay^2 = A^2 .$$

10. — A. Gérardin (Nancy), *Solutions générales de*

$$ax^2 + by^2 = cz^2 + dt^2.$$

L'auteur obtient des formules exprimant la solution générale à l'aide de quatre indéterminées.

11. — J. Richard (Dijon), *Sur quelques points de la philosophie des mathématiques.* — *a)* Sur les axiomes de logique. Il n'y a pas de pareils axiomes. On se sert pour raisonner des propositions de la science envisagée, et non d'une science spéciale appelée logique;

b) Sur la définition du nombre. On peut définir une classe d'objets de trois façons. Par définition générale, par énumération, par récurrence. Les nombres se définissent par récurrence, d'où l'impossibilité d'une définition générale, et l'impossibilité de démontrer le principe d'induction ;

c) Le théorème dit de Cantor Bernstein exige-t-il la notion de nombre pour sa démonstration? Oui, car cette démonstration emploie des définitions par récurrence ;

d) Réflexions sur les nombres transfinis.

12. — J. RICHARD (Dijon), *Sur l'enseignement de l'astronomie.* — L'astronomie est une science généralement ignorée. Cependant l'intérêt qu'elle présente, son importance au point de vue philosophique, ses rapports avec les différentes sciences mathématiques et physiques, la rendent digne d'être étudiée. On examine en particulier le rôle que l'astronomie pourrait jouer dans l'enseignement secondaire en fournissant des applications concrètes intéressantes des différentes parties des mathématiques.

13. — Th. ROUSSEAU (Dijon), *La Géométrie élémentaire basée sur le groupe des déplacements.* — Après avoir posé nettement une douzaine de postulats, l'auteur établit dans une 1re partie toutes les propositions de la Géométrie élémentaire qui ne sont pas spéciales à la Géométrie euclidienne. Il définit la droite comme le lieu des points qui restent fixes dans un déplacement qui laisse deux points fixes, et le plan comme la surface engendrée par la rotation d'une perpendiculaire à une droite fixe en un point de cette droite. Il démontre qu'un plan qui contient deux points d'une droite la contient toute entière, que par trois points de l'espace passent toujours un plan et un seul, que tout plan partage l'espace en deux régions etc. — Il étudie ensuite le cercle, les angles, les dièdres, les triangles, les trièdres, la symétrie, la sphère, la composition des rotations.

Dans la 2me partie, l'auteur établit les propositions de la géométrie élémentaire, qui sont propres à la Géométrie euclidienne. Il admet d'abord le postulat suivant : *Le groupe des déplacements admet un sous-groupe invariant;* les déplacements de ce sous-groupe s'appellent des translations. Il en déduit, sans aucun calcul, et par des raisonnements élémentaires, que toute translation qui laisse un point fixe est la translation identique ; que les translations sont équivalentes à des glissements plans rectilignes ; que le produit de deux translations est commutatif. La théorie des parallèles peut alors être faite comme l'a si clairement exposé M. Carlo BOURLET dans son *Cours abrégé de Géométrie.* L'auteur montre qu'en introduisant la notion de bande de plan, on peut simplifier la seule démonstration pénible de cette théorie.

Immédiatement après se place la théorie des projections, (dont le théorème fondamental n'est autre que le théorème de Thalès), et la définition du cosinus et du sinus. Cette théorie, complétée par la notion de produit géométrique, permet de traiter toutes les questions de relations métriques sans parler de triangles semblables.

La 3me partie de la Géométrie élémentaire comprendrait l'étude

des transformations : homothétie, similitude (triangles semblables), inversion, transformation par pôles et polaires réciproques.

L'auteur a voulu montrer par cette communication, que si on prend pour base de la Géométrie élémentaire l'existence du groupe des déplacements, on a besoin de moins de postulats que dans l'exposition classique due à Euclide; que ces postulats peuvent être plus nettement posés ; que, lorsqu'on les a admis, on n'a plus besoin de recourir à l'expérience et que, par suite *cette exposition au point de vue purement logique, vaut au moins autant que celle d'Euclide.* Si, d'autre part, cette façon de présenter les choses permet aux élèves de suivre de plus près les réalités, et les initie, par l'introduction de la notion de groupe de transformations, aux méthodes les plus fécondes de la Géométrie moderne, de sorte, comme l'a dit M. Bourlet[1], qu'« elle descend plus bas et monte plus haut que celle qui a cours », il semble qu'on doive faire des efforts pour la faire pénétrer dans l'enseignement. Quand et comment cette introduction sera-t-elle possible, c'est aux professeurs eux-mêmes qu'il appartient de le juger.

14. — Julien Welsch (Aigueperse, Puy-de-Dôme), *De la correspondance homographique et de ses applications à la solution d'un grand nombre de problèmes.* — Propriété des figures qui se correspondent homographiquement. — Triangle invariant. — Tétraèdre invariant. — Enveloppe ou lieu de la droite qui joint deux points homologues dans une homographie du plan ou de l'espace, ces points décrivant des courbes ou des surfaces données.

Figures autohomographiques : 1° dans le plan, 2° dans l'espace.

15. — Henri Chrétien (Nice), *La comète Daniel 1907-*d *et son spectre.* — Le spectre de la comète 1907-*d* a été étudié photographiquement à l'Observatoire de Nice par la méthode du prisme-objectif préconisée par M. le comte de la Baume-Pluvinel. M. Chrétien donne la description des clichés obtenus et la détermination des longueurs d'ondes des principales radiations émises par la comète, dont trois importantes sont nouvelles et n'ont encore pu être rattachées à aucun spectre connu.

16. — Henri Chrétien (Nice), *Un nouveau modèle de spectrohéliographe*, présentant le minimum de masse de la partie mobile.

17. — Luc. Libert (Paris), *Un catalogue de vingt-cinq bolides*, catalogue complémentaire au catalogue de mille trois cent soixante-huit météores notés par l'auteur.

18. — Em. Belot, *Essai de cosmogonie tourbillonnaire.* — Les faits astronomiques découverts depuis un demi-siècle sont en contradiction avec l'hypothèse cosmogonique de Laplace. Observant les formes linéaires ou spirales de la matière nébuleuse autour des étoiles, M. E. Belot est conduit à introduire en cosmogonie

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, novembre 1906.

les mouvements de translation, ainsi pour le système solaire son déplacement vers la constellation d'Hercule.

Notre système, d'après l'auteur, doit sa naissance au choc d'un tourbillon gazeux sur un nuage cosmique, choc qui a produit dans le tourbillon des vibrations le décomposant en nappes planétaires qui se sont épanouies autour de son axe dirigé vers l'*apex*. Un choc semblable est observé dans les étoiles nouvelles. L'étude mathématique de ce choc a permis à M. E. Belot de démontrer la loi de Bode, la loi des inclinaisons des axes planétaires et la loi des rotations des astres, résultats déjà présentés à l'Académie des sciences et à la Société astronomique de France en 1905 et 1906.

Le prochain Congrès aura lieu à *Lille*, en 1909. Les sections 1 et 2 seront présidées par M. Ern. Lebon.

Nominations et distinctions.

M. Bourgeois, lieutenant-colonel, chef de section de Géodésie au service géographique de l'armée, est nommé professeur d'Astronomie et de Géodésie à l'Ecole polytechnique de Paris, en remplacement de M. Poincaré, démissionnaire.

M. E. Almansi, professeur à l'Université de Pavie, a été nommé membre correspondant de l'Istituto Lombardo.

M. Dulac, maître de conférences à la Faculté des sciences de Poitiers, est nommé professeur de mathématiques générales à l'Ecole des sciences d'Alger.

M. R. Bonola a été nommé privat-docent pour la Géométrie projective et descriptive à l'Université de Pavie.

M. H. Burkhardt, professeur à l'Université de Zurich, a accepté l'appel qui lui a été adressé par l'Ecole technique supérieure de Munich pour la chaire devenue vacante par le décès du professeur v. Braunmühl.

M. Fréchet est nommé maître de conférences à l'Université de Rennes.

M. Husson est chargé du cours de Mécanique rationnelle et appliquée à l'Université de Caen.

M. M. Lacombe, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, a accepté l'appel qui lui a été adressé pour la chaire de Géométrie descriptive et de Géométrie analytique à l'Université de Lausanne, en remplacement de M. Joly, décédé.

M. Liapounoff, de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, est nommé membre associé étranger de l'Académie royale des Lincei de Rome.

M. G. Hale, Directeur de l'Observatoire de Mount-Wilson en Californie, est nommé membre correspondant de l'Académie des sciences de Paris.

La Société italienne des Sciences (Accademia dei XL) a décerné

le prix biennal des mathématiques à feu PICCIATI pour l'ensemble de ses travaux.

M. H. SEELIGER, Directeur de l'Observatoire de Munich, est nommé membre associé étranger de l'Académie royale des Lincei de Rome.

M. C. SOMIGLIANA, professeur à l'Université de Turin, membre correspondant de l'Académie des Lincei, est nommé membre ordinaire.

M. F. SEVERI, professeur à l'Université de Padoue, a été nommé membre correspondant du Reale Istituto Veneto.

M. VOLTERRA, professeur à l'Université de Rome, a été nommé associé-étranger de la Leopoldinisch-Carolinische deutsche Akademie de Halle.

Retraite. — M. FOURET, répétiteur à l'Ecole polytechnique de Paris, est admis à la retraite.

M. Th. REYE, professeur à l'Université de Strasbourg, prend sa retraite.

Privat-docent. — M. E. HILL a été admis à l'Université d'Erlangen en qualité de privat-docent.

Nécrologie.

La science française vient de perdre deux de ses savants les plus illustres, les physiciens Henri BECQUEREL et E.-Elie-Nicolas MASCART.

BECQUEREL n'était âgé que de 56 ans. Fils et petit-fils de physiciens célèbres, il avait brillamment continué la tradition de la famille par la découverte de la radioactivité. Deux mois à peine avant sa mort, il avait été appelé au secrétariat perpétuel de l'Académie des sciences. Becquerel était ancien élève de l'Ecole polytechnique et ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

MASCART est décédé à Paris à l'âge de 71 ans. Ancien élève de l'Ecole normale il était professeur de Physique au Collège de France depuis 1872. Ses travaux appartiennent principalement aux domaines de l'Optique physique, sa branche de prédilection, à l'Electricité et à la Météorologie. En 1873 l'Académie des Sciences lui décerna le Grand Prix des Sciences mathématiques pour ses recherches sur l'entraînement de l'éther lumineux et les modifications que subit la lumière ; puis en 1884 elle l'appella au fauteuil laissé vacant par Jamin. Mascart était gendre du mathématicien Ch. Briot.

O. PUND, professeur à Charlottenbourg, est mort à l'âge de 40 ans.

Max ROSENMUND, professeur de Géodésie à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, est décédé à l'âge de 51 ans. On sait qu'il dirigea d'une manière très remarquable la mesure de la base géodésique du tunnel du Simplon.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1908-1909.

ALLEMAGNE

Berlin; *Universität.* — SCHWARZ : Differentialrechnung, 4 ; Uebungen dazu ; Synthetische Geometrie, 4 ; Th. d. komplexen Zahlgrössen, 1 ; Seminar ; Kolloquien. — FROBENIUS : Algebra, 4 ; analyt. Geometrie, 4 ; Seminar. — SCHOTTKY : Allgemeine Funktionentheorie, 4 ; Thetareihen, 2 ; Seminar. — HETTNER : Potentialtheorie, 2. — KNOBLAUCH : Theorie und Anwendung der Determinanten, 4 ; Theorie der Raumkurven und der krummen Flächen, 4 ; Uebungen für jüngere Semester. — LEHMANN-FILHES : Analyt. Mechanik, 4. — LANDAU : Integralrechnung, 4 ; Mengenlehre mit Anwendungen auf die Th. d. Funktionen reeller Veränderlichen, 4. — SCHUR : Zahlentheorie, 4 ; Th. der ellipt. Funktionen, 4. — BAUSCHINGER : Potentialtheorie mit Anwendungen auf die Figur und Rotation der Himmelskörper ; Seminar für wissenschaftliches Rechnen. — FŒRSTER : Fundamentale Ausgleichung der Zeit- und Raummessung, 2 ; Geschichte der neueren Astronomie, 2. — HELMERT : Gradmessungen, 1 ; Methode der kleinsten Quadrate, 1. — STRUVE : Sphär. Astronomie, 3 ; Prakt. Uebungen. — SCHMIDT : Allgemeine Geophysik, 2 ; Kollektivmasslehre, 1 ; Uebungen in der rechnerischen Behandlung geophysikalischer Probleme. — SCHEINER : Spektralanalyse der Gestirne, 2 ; Astrophysikalisches Kolloquium, 1. — MARCUSE : Theorie und Praxis der geographisch- und nautisch-astronomischen Ortsbestimmung, mit Uebungen, 2 ; Allgemeinverständliche Himmelskunde. — v. BORTKIEWICZ : Allgemeine Theorie der Statistik, 2 ; Versicherungsrechnung, mit Uebungen, 2. — MEYER : Einführung in die moderne Maschinentechnik, 2 ; Technische Exkursionen. — ASCHKINASS : Elemente der höheren Mathematik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung in den Naturwissenschaften, 2. — BÖRNSTEIN : Uebungen in Herstellung und Gebrauch physikalischer Unterrichtsapparate. — GRUNEISEN : Differentialgleichungen schwingender Systeme, 1. — HENNING : Ausgewählte Kapitel aus der Potentialtheorie, 1. — MARTENS : Die wichtigsten Kapitel aus der Mechanik, Akustik, Wärmelehre. — VALENTINER : Vektoranalysis mit Anwendung auf die mathematische Physik und auf technische Probleme, 2. — v. WARTENBERG : Kinetische Theorie der Aggregatzustände, 1. — WEINSTEIN : Einleitung in die mathematische Physik, Mechanik, Akustik, Wärme, 3.

Bonn. — STUDY : Ellipt. Funktionen, 3 ; Anwendungen komplexer Grössen in der Geometrie, 3 ; Seminar. — LONDON : Analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, 4 ; Uebungen dazu ; Darst. Geometrie II mit Uebungen, 3 ;

Seminar. — Kowalewski : Differential- und Integralrechnung II, 4 ; Uebungen dazu ; Fouriersche Reihen und ihre Anwendungen, 2 ; Grundzüge der Mengenlehre, 2 ; Seminar. — Caratheodory : Maxima und Minima, 1 ; Technische Mechanik, 2. — Schmidt : Einführung in die Algebra, 4. — Küstner : Th. der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, 3 ; Th. des Sonnensystems. Mönnichmeyer : Himmelsmechanik, 2 ; Praktische Uebungen in der Sternwarte (mit Küstner). — Kayser : Physikalisches Kolloquium. — Bucherer : Mathematische Physik, 2.

Breslau. — Rosanes : Analyt. Geometrie der Ebene, 4 ; Elemente der Determinantentheorie, 1 ; Seminar. — Sturm : Zahlentheorie, 3 ; Kurven und Flächen 3. Ordnung, 3 ; Seminar. — Kneser : Differentialgleichungen und Fouriersche Reihen, 3 ; Ellipt. Funktionen, 3 ; Seminar. — Franz : Mechanik des Himmels, 4 ; Astron. Seminar. — Pringsheim : Allgemeine Mechanik, 4 ; Seminar.

Erlangen. — Gordan : Analyt. Geometrie der Ebene, 4 ; Zahlentheorie, 4 ; Seminar. — Nœther : Diff.- und Integralrechnung I, 4 ; Th. der algebraischen und Abelschen Funktionen, 4 ; Analyt. Uebungen. — Hilb : Darst. Geometrie, 4 ; Uebungen dazu ; Analyt. Uebungen (mit Nœther) ; Einführung in die Theorie der Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen, 2. — Reiger : Mechanik, 2 ; Elektrizität mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Praxis, 2.

Freiburg. — Lüroth : Th. der Funktionen einer komplexen veränderlichen Grösse, 4 ; Populäre Astronomie, 2 ; Seminar. — Stickelberger : Analyt. Geometrie der Ebene und Differentialrechnung, 5 ; Bestimmte Integrale, 3. Lœwy : Differentialgleichungen, 4 ; Die Technik der Lebens-, Invaliden- und Krankenversicherung, 4 ; Seminar. — Weingarten : Einleitung in die Th. der Elastizität fester Körper, 2. — Seith : Darst. Geometrie, 2 ; Uebungen dazu, 1.

Giessen. — Pasch : Geometrie der Ebene mit Invariantentheorie, 4 ; Übgn. des mathem. Seminars, 1. — Netto : Th. der ellipt. Funktionen, 4 ; Zahlentheorie, 2 ; Übgn. des mathem. Seminars, 1. — Grassmann : Differential- und Elemente der Integralrechnung, 4 ; Analyt. Mechanik II, 4 ; Übgn. dazu, 1. — Fromme : Ausgleichungsrechnung u. Elem. d. Geodäsie, 2.

Göttingen. — Klein : Mechanik, 4 ; Seminar. — Hilbert : Funktionentheorie, 4 ; Prinzipien der Mathematik, 2 ; Seminar. — Minkowski : Algebra, 4 ; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2 ; Seminar. — Runge : Diff.- und Integralrechnung II mit Uebungen, 5 ; Seminar. — Prandtl : Statik der Baukonstruktionen, 3 ; Seminar ; Pratikum. — Wiechert : Vermessungswesen II mit Uebungen, 4 ; Erdmagnetismus, 2 ; Ebbe und Flutt, 1 ; Kinetische Theorie der Gase, 2 ; Kolloquium, 1. — Bernstein : Geschichte der neueren Mathematik, 2 ; Versicherungsmathematik, 2. — Kœbe : Darst. Geometrie, 4 ; Uebungen dazu, 4. — Zermelo : Variationsrechnung, 4 ; Uebungen zur mathematischen Logik, 1. — Tœplitz : Gruppentheorie, 2 ; Uebungen für mittlere Semester, 2. — Krüger : Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 3. — Schwarzschild : Klassische Himmelsmechanik, 3 ; Behandlung astronomischer Fragen, 2. — Ambronn : Geschichte der Astronomie, 2 ; Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendung auf Astronomie und Geodäsie, 1 ; Astron. Uebungen. — Herglotz : Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 2 ; Uebungen dazu, 1.

Greifswald. — Thome : Diff.- und Integralrechnung I, 4; Synth. Geometrie, 2; Seminar. — Engel : Funktionentheorie II, 4; Projektive Geometrie und homogene Koordinaten, 4; Theorie der Differentialgleichungen, 2; Seminar. — Vahlen : Analyt. Mechanik, I, 4; Uebungen dazu, mit Berücksichtigung der technischen Mechanik, 1. — Mie : Elementarmathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik, 1; Besprechungen neuerer physikalischer Arbeiten (mit Starke), 2. — Holtz : Mechanik und Molekularphysik, 1; Physik der Gestirne, 1 — Herweg : Einführung in die theoretische Behandlung naturwissenschaftlicher Probleme und ausgewählte Kapitel der theoretischen Physik, 2. — Roth : Einführung in die mathem. Behandlung chemischer Probleme, 1.

Halle. — Cantor : Theorie der analyt. Funktionen, 5; Seminar. — Wangerin : Synth. Geometrie, 4; Analyt. Geometrie des Raumes, 2; Sphär. Trigonometrie und mathem. Geographie, 2; Seminar. — Gutzmer : Variationsrechnung, 4; Theorie und Anwendung der Determinanten, 2; Einführung in die Theorie der höheren ebenen Kurven, 2; Seminar. — Eberhard : Integralrechnung, 4; Uebungen dazu, 1. — Berndt : Vektoranalysis, 2 — Buchholz : Grundlagen der theor. Astronomie, 2; Sphär. Astronomie und Th. der astronomischen Instrumente, 2.

Heidelberg. — Kœnigsberger : Höhere Algebra, 4; Diff.-Integralrechnung II, 3; Elemente der Zahlentheorie, 1; Seminar. — Cantor : Differential- und Integralrechnung, 4; Uebungen dazu, 1; Elementare Arithmetik, Zahlentheorie und Algebra, 2. — Kœhler : Synth. Geometrie, 4. — Bœhm : Vektoranalysis und Einführung in die analyt. Mechanik, 4; Uebungen, 1. — Bopp : Potentialtheorie, 1; Theorie und Geschichte spezieller höherer Kurven, 1. — — Valentiner : Ausgewählte Kapitel aus der Fixsternastronomie, 2. — Wolf : Elemente der Astronomie (astronomische Geographie), 2. — Kopff : Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, 1.

Jena. — Thomae : Ellipt. Funktionen, 4; Seminar. — Haussner : Elemente der Zahlentheorie, 4; Diff.- und Integralrechnung II, mit Uebungen, 4; Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Seminar; Proseminar. — Frege : Analyt. Mechanik, 4; Begriffsschrift, 1. — Rau : Darst. Geometrie, 4; Uebungen dazu, 2; Einführung in die Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Praktikum, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — Knopp : Berechnung des scheinbaren Laufes der Planeten und Kometen, 2; Mathem. Geographie, 3.

Kiel. — Pochhammer : Analyt. Geometrie des Raumes, 3; Partielle Differentialgleichungen, 4; Seminar. — Heffter : Integralrechnung, 4; Uebungen dazu; Zahlentheorie, 4; Seminar. — Landsberg : Theorie der elliptischen Funktionen, 4; Kolloquium darüber; Theorie der unendlichen Reihen, 2. — Harzer : Sphär. Astronomie, 3; Differenzenrechnung, 1. Kobold : Theorie der speziellen Störungen, 2; Uebungen dazu; Uebungen an den Instrumenten der Sternwarte.

Königsberg. — Meyer : Analyt. Geometrie des Raumes, 3; Uebungen dazu; Einleitung in die höhere Geometrie, 4; Seminar. — Schoenflies : Differentialgleichungen, 4; Ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie, 2; Seminar. — Saalschütz : Integralrechnung, 4; Uebungen dazu, 1; Algebraische Untersuchungen, 1. — Battermann : Sphär. Astronomie, 2; Interpolation und

numerische Integration, 1. — COHN : Ausgleichungsrechnung, 3; Uebungen dazu, 2.

Leipzig. — NEUMANN : Diff.- und Integralrechnung, 4. — HÖLDER : Mechanik, 5; Algebraische Gleichungen, 2; Seminar. — ROHN : Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen, 4; Flächen, 3. Ordnung, 1; Seminar. — HAUSDORFF : Reihen und bestimmte Integrale, 4. — LIEBMANN : Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Uebungen dazu. — BRUNS : Himmlische Mechanik, 4; Praktische Analysis; Praktische Uebungen auf der Sternwarte. — PETER : Theorie der geograph. Ortsbestimmungen, 1; Uebungen im Ephemeridenrechnen und Bahnbestimmen; Praktische Uebungen auf der Sternwarte. — FISCHER : Einführung in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften, 3. — v. ŒTTINGEN : Elemente der geometrischen Optik, 1.

Marburg. — HENSEL : Integralrechnung, 4; Allgemeine Theorie der Ebenen Kurven, 3; Proseminar; Seminar. — NEUMANN : Theorie der linearen Differentialgleichungen, 3; Partielle Differentialgleichungen der mathem. Physik, 4; Seminar. — v. DALWIGK : Ellipt. Funktionen, 4; Analyt. Geometrie des Raumes, bes. Theorie der Flächen, 2. Ordnung, 4; Uebungen aus der darst. Geometrie für Vorgerückte, 2.

München; *Universität.* — LINDEMANN : Analyt. Geometrie der Ebene, 4; Einleitung in die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, 4; Ueber die mathem. Grundlagen des Versicherungswesens, 2; Seminar. — VOSS : Differentialrechnung, 4; Uebungen dazu, 2; Differentialgeometrie der Kurven und Flächen I, 4; Seminar — PRINGSHEIM : Algebra, 4; Ellipt. Funktionen, 4. — DOEHLMANN : Darst. Geometrie I, 5; Uebungen dazu, 3; Liniengeometrie in synthetisch-analytischer Darstellung, 4; Die Raumdarstellung in der bildenden Kunst 2. — v. SEELIGER : Mechanische, physikalische und mathematische Grundlagen der Astronomie, 4; Astronomisches Kolloquium. — GROSSMANN : Allgemeine Astronomie, 2.

Tübingen. — v. BRILL : Einführung in die höhere Mathematik, 4; Ueber nichtstarre Systeme und die Mechanik von Hertz, 3; Seminar. — v. STAHL : Höhere Algebra, 2; Anwendungen der Funktionentheorie, 3. — MAURER : Höhere Analysis II, 3; Uebungen dazu, 1; Zahlentheorie, 2.

Würzburg. — PRYM : Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 4; Proseminar; Seminar. — ROST : Analyt. Mechanik I, 4; Ausgleichung der Beobachtungsfehler, 2; Proseminar; Seminar. — v. WEBER : Algebra, 4; Darst. Geometrie I, 4; Uebungen dazu, 4; Abbildung und Biegung der Flächen, 2.

Strassburg. — WEBER : Diff.- u. Integralrechnung, 4; Th. d. ellipt. Funktionen, 2; math. Oberseminar, mit WELLSTEIN, TIMERDING u. EPSTEIN. — WELLSTEIN : Enzyklopädie der Elementarmathematik, II. Teil (Geometrie), 3; Lineare Differentialgleichungen, 2; Mathematisches Unterseminar. — TIMERDING : Anal. Geometrie der Ebene, 3; Uebungen dazu, 1: Darst. Geometrie der Ebene, I, 2: Uebungen dazu, 2; Sphär. Trigonometrie, 1. — SIMON : Nichteuklidische Geometrie in elem. Behandlung, 2. — EPSTEIN : Einführung in die Zahlentheorie, 2. — BECKER : Th. der speziellen Störungen und Bahnbestimmung II. Teil; Einleitung in die Theorie der allgemeinen

Störungen, 3; Astron. Kolloquium; Astron. Beobachtungen an Instrumenten der Sternwarte. — Wirtz : Aus der Photometrie der Gestirne, 1. — Cohn : Mechanik, 2.

AUTRICHE-HONGRIE

Kolozsvár (Klausenburg, Hongrie). — Schlesinger : Calcul différentiel et intégral, 5; Rotation des corps célestes, 3 ; Exercices, 1 ; Séminaire, 1. — Valyi : Algèbre supérieure, 5; Théorie des nombres, 3; Exercices, 1 ; Séminaire, 1. — Fejér : Fonctions elliptiques, 3 ; Équations différentielles de la dynamique, 2. — Klug : Géométrie descriptive I. 3 ; II surfaces gauches, 2 ; Exercices, 2. — Farkas : Théorie des vecteurs, 3; Transformations de l'énergie, 4 ; Séminaire, 2.

SUISSE

Bâle. — Kinkelin : Algebr. Analysis, 3. — Von der Mühll : Analyt. Mechanik, mit Ueb., 4 ; mathem. Physik, 4. — Fueter : Diff.- u. Integralrechnung I, 4, mit Ueb., 1 ; Flächentheorie, 2, mit Ueb., 1 ; Gew. Diff.-Gleichungen, 2. — Priv.-Doc. Flatt : Pädag. math. Seminar ; Geometrie der Lage, 2.

Berne. — Graf : Kugelfunkt. m. Repetit., 3 ; Besselsche Funkt. m. Repetit., 3; Bestimmte Integrale mit Repetit., 3; Differentialgleichungen, 2 ; Differential- u. Integralrechnung, 2 ; Funktionentheorie, 2 ; Repetit. d. Math., 4 ; Renten- und Versicherungsrechnung, 2; Math. Seminar in Verb. m. G. Huber, 2. — Ott : Algebr. Analysis, II. Teil, 2 ; Integralrechnung, 2 ; Analyt. Geometrie, II. Teil, 2. — Huber : Sphär. Astronomie, I. Teil, 2; Theorie d. höhern ebenen Kurven. 3; Theorie d. ellipt. u. Thetafunkt., 2, Math. Seminar (geometr.-astr. Richt.) in Verb. m. Graf, 1. — Benteli : Darst. Geom. Kurven, Strahlenflächen, reguläre Polyëder, 2 ; Darst. Geom. Ueb. u. Repetit., 2 ; Prakt. Geom., I. Teil, 1 ; Konstrukt. Perspektive, 1. — Crelier : Synthet. Geom., II. Teil, 2 ; Geom. des Dreiecks, 2. — Moser : Ausgew. versicherungswissenschaftl. Seminar, 1—2. — Bohren : Ausgleichungsrechnung, 2 ; Politische Arithmetik, 2. — Gruner : Anwendung der Besselschen Funkt. in d. Physik, 2.

Genève. — Cailler : Calcul différentiel et intégral, 3 ; Exercices, 2 ; Mécanique rationnelle, 3 ; Exercices, 2 ; Conférences d'analyse, 2 ; — Fehr : Eléments de mathématiques supérieures, 3 ; Exercices, 2 ; Conférences d'algèbre et de géométrie, 1 ; Géométrie projective, 1 ; Séminaire de géométrie supérieure, 2. — R. Gautier : Astronomie physique, 2. — Priv.-doc. : Bernoud : Aéronautique, 1. — Briner : Thermodynamique, 2. — R. de Saussure : Géométrie du mouvement, 2.

Lausanne. — Amstein : Calcul diff. et intégral, Cours I, 6; Exercices, 2; Cours III, 2; Exercices, 1 ; Théorie des fonctions, 3. — Mayor : Mécanique rationnelle, Cours III, 4; Exercices, 1; Statique graphique, Cours III, 3; Epures; Cours V, 2, Epures; Physique mathém., 2. — Lacombe : Géom. descriptive, 4 ; Epures, 4; Géométrie analyt., 2; Géométrie de position, 2. — Maillard : Elem. de Calc. diff. et intégral, I, 3. — *Priv. doc.* — Jaccottet : Séries de Fourier et applications.

Zürich, *Universität.* — *Vacat.* : Elem. der Diff.- u. Integralrechnung, 4. — Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3 ; Ueb., 2 ; Bahnbestimmung v. Planeten u. Kometen, 2. — Weiler : Darst. Geometrie, mit Ueb., 4 ; Analyt. Geometrie, mit Ueb., 4 ; mathem. Geographie, 2. — Gubler : Algebr. Analysis, 2 ; Inhalt u. Methode des geom. Unterrichts an der Mittelschule, 1 ; Versicherungsmathematik, 1 ; sphär. Trigonometrie.

Zurich ; *Ecole polytechnique fédérale, section normale.* — Hirsch : Differentialrechnung, 4 ; Repet., 1, Ueb., 2 ; Differentialgleichungen, 4, Ueb., 1 ; Variationsrechnung, 2. — Franel : Calcul diff., 4 ; Repet., 1 ; Exerc., 2 ; Equat. diff., 2 ; Exerc., 1. — Geiser : Analyt. Geometrie, 4 ; Repet., 1, Ueb. 2. — Grossmann : Darst. Geometrie, 4 ; Repet., 1 ; Ueb., 4 , Geometrie der Lage, 4. — Hurwitz : Ellipt. Funktionen, 4. — Hurwitz u. Grossmann : Math. Seminar, 2. — Herzog : Mechanik, 4, 1, 2 ; ausgewälte Kapitel, 1. — Wolfer (v. Université). — *Cours libres.* — Beyel : Rechenschieber, 1 ; Darst. Geometrie, 2 ; Proj. Geometrie, 1 ; Flächen 2. Grades, 2. — Keller : Die wichtigsten Prinzipien d. darst. Geometrie, 2. — Kraft : Analyt. Mechanik, 3 ; Geom. Kalkül, I, 2, III, 2. — Schweitzer : Thermodynamik, 2.

BIBLIOGRAPHIE

R. Baire. — **Leçons sur les théories générales de l'Analyse.** T. II. *Variables complexes. Applications géométriques.* — 1 vol. de X-347 p. et 52 fig.; 12 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Etant donnée la renommée si justement acquise par M. Baire dans l'étude des fonctions de variables réelles, il était bien intéressant d'attendre de lui ce second volume[1] où il traite surtout des fonctions de variables complexes. Le sujet, comme il le reconnaît lui-même, est essentiellement différent, mais il y apporte les mêmes qualités d'esprit, la même netteté et la même rigueur. Comme l'indique le titre du volume il s'agit surtout de généralités, concernant les fondements de la science et non d'un exposé de résultats spéciaux, exposé qu'on ne peut guère faire avec compétence que sur quelques points d'où une allure trop restrictive donnée à certains traités. D'ailleurs ce sont des *Leçons*, professées dans une Faculté. L'étendue et la solidité en sont des conditions essentielles.

Dans la théorie des *fonctions analytiques.* l'auteur cherche à profiter à la fois des points de vue de Cauchy et de Weierstrass. Il emploie les intégrales curvilignes ou les séries entières sans aucun parti pris pour l'une ou l'autre des méthodes qu'il relie d'ailleurs très simplement en étudiant le développement taylorien. Les félicitations que je pourrais lui adresser

[1] Voir l'Analyse du premier volume dans l'*Enseignement math.* t. IX. 1907, p. 497.

à cet égard seront d'autant plus sincères que dans l'étude du prolongement analytique qui fait actuellement l'objet de mes travaux en cours (*Bulletin des Sc. math.*, Juillet 1908) j'avais remarqué que dans une question très générale on pouvait à volonté manier des intégrales curvilignes ou des séries. Et sans prévoir que j'allais me trouver d'accord avec M. Baire, je faisais remarquer l'absurdité qu'il y avait à se cantonner dans une méthode et à ignorer l'autre.

Pour en revenir à l'ouvrage du professeur de Dijon, je dois faire remarquer aussi le soin extrême qu'il apporte dans le maniement des séries et notamment la manière délicate dont il développe les théorèmes d'Abel. A la notion de série uniformément convergente qui, dans certains cas, ne lui semble pas assez souple, il substitue celle de série *normalement* convergente ; une telle série est celle dont la convergence absolue est établie par comparaison avec une série majorante.

A propos des *équations différentielles*, un grand développement est donné aux équations aux dérivées partielles. La méthode des caractéristiques de Cauchy et la méthode de Lagrange et Charpit sont exposées toutes deux et comparées. Pour la première, M. Baire compare tout au long le cas de l'équation linéaire et celui de l'équation quelconque et cela avec une élégance et un bonheur dans l'exposition qui me semblent surpasser tout ce que je connais de mieux à cet égard.

Il emprunte à l'Acoustique une équation linéaire du second ordre pour donner au moins un exemple de ces équations remises plus en lumière que jamais par la théorie de la propagation des ondes. Il va sans dire que toutes les questions relatives à l'existence des intégrales sont examinées jusque dans les plus intimes détails.

Dans les *Applications géométriques* M. Baire a mis beaucoup de choses.

Il attache beaucoup d'importance à la théorie du contact, aux enveloppes de lignes et de surfaces. Les courbes gauches, étudiées d'abord quant à leur courbure et à leur torsion, sont finalement définies par leur équation intrinsèque. Des exemples courts et précis sont donnés à l'appui des notions fondamentales ; d'intéressantes courbes particulières sont mentionnées. La déformation et la représentation des surfaces les unes sur les autres sont illustrées par les problèmes des cartes géographiques dans le système stéréographique et dans le système de Mercator. Souvent une propriété particulière constitue une ouverture sur de vastes domaines de la Science : c'est ainsi que l'héliçoïde à plan directeur sert à faire comprendre ce que sont les surfaces minima. Cette partie se termine par l'étude des lignes géodésiques.

Enfin l'ouvrage comprend un chapitre sur les *fonctions elliptiques*. C'est une belle application du développement donné à la théorie des fonctions d'une variable complexe. Là encore un appel judicieux est fait tantôt aux définitions de Weierstrass tantôt aux propriétés des intégrales curvilignes. De plus bien des longueurs sont évitées par l'emploi du langage concis et rigoureux créé par M. Baire au début de son volume.

Qu'il me soit permis de remarquer en terminant que, dans l'actuelle génération de jeunes géomètres, M. Baire a fait une œuvre unique. C'est le premier cours d'une université provinciale qui soit publié. Dans les générations d'avant le précédent le plus remarquable fut constitué par le cours de M. Méray, qui fut précisément à Dijon le prédécesseur de M. Baire.

L'Université bourguignonne n'a donc rien perdu de son éclat.

A. Buhl (Montpellier).

R. Bonola. — **Die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Deutsche Ausgabe von H. Liebmann. (Collection *Wissenschaft und Hypothese*). — 1 vol. cart. in-16, 244 p.; 5 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler cette nouvelle collection que la maison Teubner publie sous le titre de *Wissenschaft und Hypothese* et dont les deux premiers volumes sont formés par la traduction des deux ouvrages bien connus de M. H. Poincaré : *Science et hypothèse*, et *la Valeur de la science.*

Ce nouveau volume rentre bien dans le but de la collection qui est de présenter au monde savant les diverses branches scientifiques dans l'évolution de leurs principes fondamentaux. Il contient un exposé bien ordonné du développement historique et systématique de la Géométrie non-euclidienne. L'auteur montre d'abord comment le postulat des parallèles a été envisagé par les géomètres grecs, puis chez les Arabes et pendant la Renaissance; il fait une étude critique des essais de démonstrations qui ont été données. Passant ensuite aux précurseurs de la Géométrie non-euclidienne, il donne un aperçu rapide des travaux de Saccheri, J.-H. Lambert, de Wolfg. Bolyai et de F. L. Wachter. Puis viennent les fondateurs Lobatschefsky et Jean Bolyai, dont il analyse les principaux travaux.

L'étude des développements ultérieurs amène l'auteur à distinguer deux directions : I, *la direction métrique différentielle,* dans laquelle on fait intervenir la Géométrie sur une surface et les idées de Riemann, Helmholtz, Lie, Betrami, etc.; II, *la direction projective;* subordination de la Géométrie métrique à la Géométrie projective; la Géométrie lobatschefskienne dans le plan euclidien; la Géomtrie ellptique de Riemann dans l'espace euclidien; les fondements de la Géométrie en partant des concepts graphiques; l'indémontrabilité du postulat d'Euclide.

L'Ouvrage se termine par trois Notes ayant pour objets I, les parallèles et la surface de Clifford; II, les principes fondamentaux de la statique et le postulat d'Euclide; III, les constructions non-euclidiennes des parallèles.

Comme le montre cette rapide énumération, M. Bonola aborde les principaux problèmes de la Géométrie non-euclidienne. Par ses nombreuses et importantes recherches dans ce domaine, il était particulièrement qualifié pour présenter cette étude critique. Il a le grand mérite d'avoir su éviter tout développement inutile dans un exposé de ce genre, suivant le but de la collection. Son livre constitue un excellent ouvrage d'initiation pour tous ceux qui désirent s'orienter dans cette branche de la Géométrie. L'édition allemande a été rédigée avec beaucoup de soin par un mathématicien qui a lui-même apporté d'intéressantes contributions à la Géométrie non-euclidienne.

H. F.

M. Fr. Daniëls. — **Essai de Géométrie sphérique en coordonnées projectives.** — 1 vol. in-8°, 280 p.; Librairie de l'Université, Fribourg (Suisse).

Si l'on prend pour coordonnées homogènes d'un point quelconque d'une sphère, les composantes x_1, x_2, x_3, suivant trois directions fixes, du rayon aboutissant à ce point, les grands cercles de la sphère, qui jouent en Géométrie sphérique le rôle de « lignes droites », sont représentés par des équations linéaires ; on a donc ainsi, pour la sphère, un système de coordonnées projectives. On obtient encore un système de telles coordonnées en divisant chacune des quantités précédentes par un nombre constant μ_i ($i = 1, 2, 3$).

Tel est le système de coordonnées qu'emploie M. Daniëls pour établir la Géométrie sphérique et, comme cas limite, la Géométrie plane. La généralité de la méthode, bien loin d'être une cause de complication, prête un caractère de grande simplicité aux démonstrations, qui sont remarquablement directes et sobres. C'est ainsi que sont établies les propriétés projectives sphériques, telles que celles qui ont les mêmes énoncés que les théorèmes de Carnot, de Pappus et de Desargues, ainsi que la théorie du rapport anharmonique, de l'involution, de la collinéation et de la corrélation sphériques.

Quant à l'idée métrique, elle est représentée par une expression quadratique des coordonnées. Cette expression varie avec le système de coordonnées pris pour référence ; mais, comme les propriétés métriques sont indépendantes des valeurs des coefficients, la généralité et la simplicité des démonstrations ne sont pas atteintes. Signalons à ce propos — M. Daniëls n'en fait pas la remarque — que, en raison de cette indépendance, l'ouvrage se trouve contenir une théorie de toutes les métriques sphériques et non pas seulement de la métrique ordinaire.

Les courbes sphériques du second ordre ou coniques sphériques et les faisceaux de ces courbes font l'objet d'une étude approfondie et très complète.

Ajoutons qu'un emploi judicieux de la notation vectorielle contribue à la condensation de l'exposition.

G. Combebiac (Bourges).

P. Duhem. — **Les origines de la Statique.** — Deux volumes, gr. in-8°; prix 20 fr.; librairie Hermann, Paris.

On sait la difficulté des recherches historiques, les surprises des textes et la traîtrise des documents qui se contredisent mutuellement, laissant le chercheur dans l'incertitude la plus complète à propos d'un nom, d'un lieu, d'un livre ou d'une époque.

L'obscurité des sources, les emprunts des plagiaires, les oublis de l'Histoire autant que les dévastations du Temps, déforment les faits et rompent l'enchaînement des idées. C'est au critique à posséder l'érudition qui mettra à sa portée le matériel d'étude, et la sagacité qui lui permettra de s'orienter et de se retrouver dans le dédale de ses notes.

Les origines de la Statique de M. P. Duhem forment un ouvrage remarquable à deux points de vue, l'ampleur du sujet et la clairvoyance de l'auteur ; d'une part, une quantité énorme de documents à déchiffrer, d'autre part, une coordination à établir entre tous ces matériaux.

Il a fallu connaître les ouvrages de plus de deux cents auteurs, dont beaucoup manuscrits, disséminés dans les bibliothèques d'Europe, quelques-uns inédits bouleversant les idées reçues jusqu'alors, d'autres, truqués impudemment par un faussaire voulant accaparer la science de son temps aux yeux de la postérité; d'autres encore obscurcis par des copistes ignares, envahis par les gloses des commentateurs et qu'on a dû reconstituer et mettre au point, avant de pouvoir les utiliser.

Cependant un principe unique a guidé l'auteur à travers son étude ; d'un bout à l'autre, l'histoire de la Statique est traversée par la continuité et l'enchainement des idées. Mais laissons parler M. P. Duhem.

« La Science, en sa marche progressive ne connaît pas les brusques

changements ; elle croît, mais par degrés ; elle avance, mais pas à pas. Aucune intelligence humaine, quelles que soient sa puissance et son originalité, ne saurait produire de toutes pièces une doctrine absolument nouvelle. L'historien ami des vues simples et superficielles célèbre les découvertes fulgurantes qui, à la nuit profonde de l'ignorance et de l'erreur, ont fait succéder le plein jour de la vérité. Mais celui qui soumet à une analyse pénétrante et minutieuse, l'invention la plus primesautière et la plus imprévue en apparence y reconnaît presque toujours la résultante d'une foule d'imperceptibles efforts et le concours d'une infinité d'obscures tendances ».

L'ouvrage contient une série de chapitres consacrés à des époques particulières de l'histoire de la Statique. D'abord il importe de fixer la valeur des idées léguées par les anciens, Aristote, Euclide, Archimède, pour distinguer l'originalité des auteurs postérieurs. Le legs n'est pas énorme : un fragment *De ponderoso et levi* que l'on pense être d'Euclide, les quatre propositions nommées *Liber Euclidis de ponderibus secundum terminorum circum ferentiam*, les *Quæstiones mechanicæ* d'Aristote et quelques bribes tansmises aux Occidentaux par les Arabes.

« Nous allons voir, maintenant » dit M. P. Duhem « l'intelligence occidentale s'emparer de ces débris et les incorporer aux systèmes mécaniques qu'elle va construire. Nous allons assister à un travail de transformation et d'organisation, prodigieusement intense et puissant qui produira la Statique moderne ».

Mais perdus dans les profondeurs du Moyen Age, les noms des premiers constructeurs, ne nous sont pas parvenus. Un seul a survécu auquel on attribue les travaux de ses contemporains, Jordanus de Nemore. Etait-ce un maître, un génie isolé, un chef d'Ecole ? L'histoire reste muette et l'énigmatique Jordanus Nemorarius reste célèbre par la démonstration de la loi d'équilibre du levier en établissant l'égalité du travail virtuel moteur et du travail virtuel résistant. Ce point est capital.

Plus surprenant encore que ce Jordanus, dont nous savons au moins le nom, il faut remarquer cet auteur du XIIIme siècle, auquel on attribue la première notion du *moment*. On ignore son nom mais l'effet produit par ses travaux dans l'œuvre de Léonard de Vinci, l'ont fait qualifier par M. Duhem, le *Précurseur de Léonard de Vinci*.

Jordanus dont l'école se prolongera jusqu'au XVIme siècle avec Nicolo Tartaglia, le Précurseur et Léonard de Vinci lui-même ont jeté les bases de la Statique. Leur action ne sera pas toujours continuée ; des esprits minutieux leur préfèreront les géomètres déductifs comme Euclide et négligeront les idées intuitives qu'ils ne sauront pas développer. C'est le rôle de Guido Ubaldo et de Benedetti ; ces deux esprits rompent la tradition, et la plupart des vérités découvertes à leur époque sont oubliées. Ce sera l'œuvre de Galilée, de Simon Stevin, de Roberval, de Descartes et de Torricelli que de retrouver et de lancer la Statique sur la bonne voie.

A mesure que l'histoire de la Statique se rapproche de notre époque, les chapitres deviennent plus copieux, et les travaux de Galilée et de Stevin sont analysés complètement.

La seconde partie des *Origines de la Statique* contient en trois chapitres l'histoire de la Statique depuis l'époque de Torricelli jusqu'au milieu du XVIIIme siècle. Les deux premiers sont consacrés à l'évolution des idées sur le centre de gravité depuis les anciens commentateurs d'Aristote

jusqu'au célèbre principe de Torricelli : *Un système pesant dont le centre de gravité se trouve aussi bas que possible est assurément en équilibre.*

C'est au XIVme siècle à l'époque d'Albert de Saxe qui s'établit une doctrine du centre de gravité « doctrine » dit M. Duhem « qui nous paraît aujourd'hui bien étrange, mais qui fut admise sans conteste pendant des siècles et par de très grands esprits.....

Cette doctrine peut se formuler ainsi : Il est en tout grave un point où sa pesanteur est comme concentrée ; c'est le centre de gravité ; en tout grave, la pesanteur est un désir d'unir ce centre de gravité au centre de l'Univers. Si son centre de gravité coïncide avec le centre de l'Univers, le grave est en repos. Si le centre de gravité est hors du centre de l'Univers, le premier point tend à joindre le second et, s'il n'en est empêché, il se dirige sur lui en ligne droite La Terre est un grave semblable aux autres ; elle joint donc son centre de gravité au centre de l'Univers ; et c'est ainsi que la Terre demeure immobile au centre du Monde ».

Soutenue par l'autorité d'Aristote, par les développements de ses commentateurs, cette doctrine est consacrée par la parole d'Albert de Saxe qui sait à point voulu résoudre les paradoxes et contourner les objections par la puissance de sa dialectique.

La révolution copernicaine, en déplaçant le centre du monde, modifie les doctrines d'Albert de Saxe, et peu à peu la notion du centre de gravité s'épure avec Galilée, Torricelli et Képler.

Nous voici au milieu du XVIIme siècle ; les propositions importantes sont établies, mais elles manquent de liaison. Il s'agit de coordonner les principes épars et de nouer tous les fils de la Statique. C'eut été la tâche du P. Mersenne si sa curiosité inlassable lui avait laissé le temps de construire un système logique. On ignore si Pascal y parvint ; en tout cas ses essais ne nous ont pas été transmis. Ni le P. Zucchi, ni le P. Fabri n'ont le sens critique assez aiguisé pour réussir dans leurs ouvages. Quant à la Mécanique de Roberval, elle n'eut point d'influence sur les contemporains puisqu'elle resta manuscrite et inédite. C'est John Wallis qui dans son traité *Mechanicasive de Motu. Tractatus geometricus* donne toutes les règles coordonnées de la science de l'équilibre.

Enfin l'ouvrage de M. P. Duhem se termine avec la Nouvelle Mécanique de Varignon et la lettre de Jean Bernoulli. A ce moment s'ouvre *la Période classique.*

« Lorsque l'historien », écrit M. Duhem, « après avoir suivi le développement continu et complexe de la Statique, se retourne pour embrasser d'un coup d'œil le cours entier de cette Science, il ne peut, sans un étonnement profond, comparer l'ampleur de la théorie achevée à l'exiguité du germe qui l'a produite. D'une part, en un manuscrit du XIIIme siècle, il déchiffre quelques lignes d'une écriture gothique presque effacée ; elles justifient d'une manière concise la loi d'équilibre du levier droit. D'autre part, il feuillette de vastes traités, composés au XIXme siècle ; en ces traités, la méthode des déplacements virtuels sert à formuler les lois de l'équilibre aussi bien pour les systèmes purement mécaniques que pour ceux où peuvent se produire des changements d'état physique, des réactions chimiques, des phénomènes électriques ou magnétiques. Quel disparate entre la minuscule démonstration de Jordanus et les imposantes doctrines des Lagrange, des Gibbs et des Helmholtz ! Et cependant ces doctrines étaient en puissance dans cette démonstration ».

L'ouvrage de M. P. Duhem est l'histoire du développement de cette doctrine de Jordanus à travers les siècles ; il nous fait pénétrer au cœur même des théories mécaniques, en fait saisir la genèse et les avatars sans nombre d'un esprit à l'autre.

Les Origines de la Statique constituent un moyen excellent d'initiation à l'histoire des sciences mécaniques, si obscure jusqu'au moment où M. P. Duhem y a projeté les clartés de son intelligence et de son érudition.

Alph. Bernoud (Genève).

C. Flammarion. — **Initiation astronomique** (Collection des Initiations scientifiques fondée par C.-A. Laisant). — 1 vol. petit in-8° de 220 pages et 89 figures ; 2 fr.; Hachette et Cie, Paris.

Ce volume est le second de la *Collection des Initiations scientifiques* que M. Laisant a fondée en publiant son *Initiation mathématique*. Le succès de ce dernier ouvrage fut si grand, les éditions successives furent épuisées avec une telle rapidité que M. Laisant pensa à trouver des collaborateurs qui feraient pour les différentes parties de la science ce qu'il avait si bien fait pour la partie mathématique. De telles œuvres s'adressent surtout aux éducateurs de l'enfance, à ceux qui ne se font voir souvent que sous les traits de maîtres austères, enseignant des choses dont une jeune intelligence ne comprend pas l'exacte portée ; ils s'adressent aussi aux parents, qui pourront devenir les meilleurs des éducateurs, en faisant naître la curiosité des tout petits vis-à-vis des harmonies naturelles si facilement insoupçonnées, mais non moins facilement admirées pour peu que l'attention soit attirée sur elles.

A ce point de vue, la symétrie des nombres et des figures peut jouer un grand rôle, ce que M. Laisant a fort bien montré.

M. Flammarion nous montre maintenant tout ce que l'on peut tirer de manière extrêmement élémentaire de l'observation du ciel. N'est-ce pas une des plus hautes manières d'ouvrir et d'élever la pensée que de l'inciter à parcourir l'espace infini où se meuvent les astres et d'y voyager avec la lumière qui nous met en communication avec tant et tant de mondes. L'auteur propose d'apprendre à l'enfant à connaître le Soleil, le beau Soleil, le bon Soleil que l'on peut commodément observer à l'aide d'un verre noirci dans une flamme et qui paraît alors fort petit, mais qui n'en donne pas moins à la nature les riantes couleurs qui la parent, les vertes prairies qui nourrissent les êtres et ces êtres eux-mêmes.

Puis nous étudions Phébé la blonde dans ses phases plus capricieuses ; nous voyons que cette compagne de Phébus est loin d'être semblable à son flamboyant époux, mais que la différence révélée par l'astronomie n'est pas moins intéressante que l'analogie imaginée par la poésie.

Nous dirons aussi à l'enfant qu'il y a des planètes, des sœurs de la Terre qui font partie avec celle-ci de la famille solaire en dehors de laquelle le vide immense apparaît. Et à cheval sur un rayon de lumière nous marcherons pendant des années pour arriver aux étoiles.

M. Flammarion n'a même pas négligé les fantaisies amusantes, les voyages abracadabrants, les combats entre les habitants de la Lune et ceux du Soleil. Nul doute qu'il n'ait créé un précieux instrument de récréation et d'éducation et peut être aussi un livre pouvant intéresser beaucoup de parents qui se sentiront stupéfaits des merveilles inconnues d'eux-mêmes, qui

s'enthousiasmeront pour leur compte personnel et communiqueront avec plus de plaisir encore leur enthousiasme à leurs enfants.

A. BUHL (Montpellier).

GEORGES MATISSE. — **Le principe de la conservation de l'assise et ses applications.** — 1 vol. grand in-8°, 65 pages ; 2 fr. 50 ; A. HERMANN.

Ce volume manque de mise au point avec l'état actuel de la physique théorique et même de la physique mathématique ; s'il avait paru il y a une quinzaine d'années, les idées de l'auteur auraient pu être prises en considération, mais aujourd'hui nous ne le pensons pas. Notre langage est complètement changé, et certaines notions fondamentales sont autrement interprétées, définies et appliquées. La théorie des électrons pourra être complétée, et même dans la suite remplacée par une autre pénétrant le mécanisme même de la charge électrique, mais, en attendant, cette théorie est acceptée par la généralité des physiciens et des physico-mathématiciens, et il est impossible d'en faire abstraction comme cela a lieu dans cet ouvrage.

TH. TOMMASINA (Genève).

O. MANVILLE. **Les découvertes modernes en physique.** Leur théorie et leur rôle dans l'hypothèse de la constitution électrique de la matière. — 1 vol. in-8° de 186 pages ; 5 fr.; A. Hermann, Paris.

L'auteur a résumé dans ce volume la matière de plusieurs ouvrages récents ; c'est ce qui a rendu sa besogne certes très ardue, aussi n'est-il pas entièrement parvenu à s'assimiler tous les Ouvrages, Mémoires, Notes, etc. qui sont passés entre ses mains. Le langage scientifique manque d'unité, et certains chapitres sont par trop sommairement traités.

Ce livre n'est pourtant pas inutile et arrive au bon moment, il pourra certes rendre des services, surtout à ceux dont les multiples occupations ne leur laissent que peu de temps disponible pour se tenir au courant de la marche de la science; et à ceux qui désirent passer rapidement en revue les plus récents progrès et les différentes nouvelles théories, pour les embrasser plus facilement dans une large vue synthétique.

A aucune époque de l'histoire de la Physique ne s'est manifesté, comme dans celle qui nous est contemporaine, la nécessité absolue de procéder sérieusement à un travail de classification d'une foule de résultats nouveaux, classification qui ne peut être faite que par celui qui est capable de tous les embrasser et de les alligner facilement devant sa mémoire. Cet ouvrage peut certes rendre plus rapide ce travail préliminaire.

TH. TOMMASINA (Genève).

E. PARISOT et F. HENRY. — **Les meilleures pages des Ecrivains pédagogiques** (de Rabelais au XXe siècle). *Extraits*, avec un Avant-propos et des Notes. Préface par Jules PAYOT. — 1 vol. in-18, 364 p.; 3 fr.; Librairie Arm. Colin, Paris.

Les professeurs de l'enseignement scientifique ne s'intéressent guère aux doctrines pédagogiques d'autrefois; la pratique même de l'enseignement restera toujours pour eux la meilleure méthode, car la pédagogie, telle qu'ils la conçoivent est avant tout une science expérimentale. Si les gros traités les rebuttent en général, ils liront par contre avec le plus vif intérêt et le plus grand profit le présent ouvrage dans lequel les auteurs ont réuni un

véritable *choix d'Extraits* d'écrivains pédagogiques. Le cercle des auteurs consultés est conçu d'une manière très large ; il renferme non pas les « pédagogues », dans le sens étroit du terme, mais la plupart des grands penseurs en matière d'éducation, depuis Rabelais, Pestalozzi, Rousseau, jusqu'aux écrivains et savants modernes tels que Payot, Buisson, Anatole France, James, Sully, Luc. Poincaré, J. Tannery et d'autres. Tout en donnant une large part aux anciens, les auteurs se sont préoccupés avant tout de réunir les éléments d'une pédagogie vraiment moderne qui est la mise au point de vérités pédagogiques éprouvées par l'expérience, confirmées par le jugement des meilleurs esprits et adaptées aux conditions de la vie présente.

Les extraits, dont le choix est des plus heureux, sont groupés dans les chapitres suivants : Education générale ; la pédagogie ; l'éducation nationale ; l'éducation de l'esprit. — Les méthodes ; méthodes particulières aux divers enseignements ; méthodes générales. — Psychologie de l'enfant. — Education morale. — Education esthétique. — Education physique. — La destinée de la femme. — Rôle social de l'instituteur et de l'école.

Bien que cet ouvrage ne consacre que quelques pages à l'enseignement scientifique, nous tenons à le signaler à l'attention des professeurs et des candidats à l'enseignement des sciences.

H F.

J. A. SERRET. — **Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung.** Nach Axel Harnacks Uebersetzung. Dritte Auflage, neu bearbeitet von G. SCHEFFERS. Band I : *Differentialrechung;* Band II : *Integralrechnung.* — 2 vol. in-8°, relié, 624 + 585 p ; 13 M. chaque volume ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Cette troisième édition allemande du Traité classique de Serret diffère en beaucoup de points de l'édition originale. Le texte a été entièrement revu et refondu en tenant compte des progrès réalisés et des exigences actuelles de la science ; les figures ont même été remplacées par de nouvelles exécutées avec plus de soin. Chacun des volumes est accompagné d'une table analytique des matières.

Il n'y a pas lieu de signaler ici en détail les modifications et additions dues à M. Scheffers. Nous nous bornerons à mentionner le chapitre d'introduction, placé en tête du premier volume et consacré aux notions de nombre, de fonctions, de limite et de continuité. Dans le second volume on a complété les théorèmes d'existence des intégrales simples et doubles ; le chapitre des fonctions d'une variable complexe a reçu d'importantes améliorations.

Sous cette nouvelle forme le Traité de Serret maintient sa place au rang des meilleurs ouvrages d'analyse et continuera à être lu avec profit par les étudiants de langue allemande.

Le tome III, consacré aux Equations différentielles et au calcul des variations, est en préparation.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par MITTAG-LEFLER. T. XXXI, Stockholm.

Fasc. 3 et 4. — KÖNIG : Sur les fondements de la théorie des ensembles et le problème du continu. — H. DULAC : Sur les séries de Mac Laurin à plusieurs variables. — E. COTTON : Sur l'intégration approchée des équations différentielles. — H. PETRINI : Les dérivées premières et secondes du potentiel.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. LAMPE, W. FR. MEYER, et E. JAHNKE, 12. Band. — B.-G. Teubner; Leipzig und Berlin.

Nos 3 et 4. — H. STAHL : Über die Darstellung algebraischer Funktionen und Abelscher Integrale aus gegebenen Elementen. — W. LUDWIG : Über das Problem, eine Fläche II. Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden. — E. ORLICH : Über Aufnahme von Wechselstromkurven durch Oszillographen und ihre Analyse. — OTTO BIERMANN : Über den Wechsel der unabhängigen Variablen bei Differentiationsprozessen. — EUGEN MEYER : Pascalscher Satz, Desarguesscher Satz und Nullsystem. — G. A. MILLER : The groups of isomorphisms of the simple groups whose degree is less than fifteen. — K. A. POUKKA : Über die grösste Schwankung einer analytischen Funktion auf einer Kreisperipherie. — H. WIELEITNER : Die Scheitel-Konchoiden der Kegelschnitte. — J. NEUBERG : Über hyperboloïdische Würfe. — EDUARD JANISCH : Zur Schattenkonstruktion für das Plückersche Konoid. — FRANZ ROGEL : Beitrag zur trigonometrischen Analysis. — R. HEGER : Die Kugeln, die einem unebenen Vierecke eingeschrieben sind. — E. MALO : Sur la génération cissoïdale des quartiques unicursales bicirculaires. — CLEMENS SCHAEFER : Theorie zweier Beugungsversuche mit elektrischen Wellen.

Atti della Reale Academia dei Lincei. Anno CCCIV. Rendiconti. Vol. XVI 2me semestre 1907. Rome.

LEVI-CIVITA : Sullo sviluppo della funzione implicite. — PICCIATI : Integrazione dell'equazione funzionale che regge la caduta di una sfera, in un liquido viscoso. — EUG. E. LEVI : Sul problema di Cauchy. — MEDICI : Sui gruppi di movimenti. — PICCIATI : Sul moto di un cilindro indefinito in un liquido viscoso. — LUC. ORLANDO : Sull'equazione differenziale $\Delta_2 u + \lambda u = o$. — TOMMASO BOGGIO : Nuova risoluzione di un problema fondamentale della teoria dell'elasticità. — FR. SEVERI : Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche. — G. LAURICELLA : Sulla integrazione dell'equazione $\Delta^4 V = o$. — TOMMASO BOGGIO : Sull'equazione del moto vibratorio delle membrane elastische. — TOMMASO BOGGIO : Determinazione della deformazione di un corpo elastico per date tensioni superficiali. — Eugenio Elia LEVI : Sull'equazione del calore. — Ant. GARBASSO : Traiettori e onde

luminose in un particolare mezzo isotropo e non omogeneo. — Luc. Orlando : Sopra alcune equazioni integrali. — Eugenio Elia Levi : Sulle equazioni integrali. — Tommaso Boggio : Integrazione dell'equazione funzionale che regge la caduta di una sfera in un liquido viscoso (Nota Ia). — Carlo Somigliana : Sulla teoria maxwelliana delle azioni a distanza. — T. Levi-Civita : Sulle onde progressive di tipo permanente. — O. Tedone : Un teorama sulle equazioni dell'elasticità.

Bulletin de la Société Mathématique de France. T. XXXV. Paris.

Fasc. 3 et 4. — Comptes rendus des séances. — Goursat (E.) : Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm. — d'Ocagne (M.) : Sur les équations d'ordre nomographique 3 et 4. — Weill (M.) : Propriétés des polygones inscrits à une conique. — Lebesgue (H.) : Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo. — Blumenthal (O.) : Sur le mode de croissance des fonctions entières. — Bioche (Ch.) : Sur les courbes gauches unicursales du quatrième ordre. — Lalesco (T.) : Sur la représentation des nombres par les classes de formes appartenant à un déterminant donné. — Pellet (A.) : Remarques sur le mouvement d'une figure plane dans son plan. — Rémoundos (G.) : Sur les trajectoires auxquelles donnent lieu les forces centrales. — Raffy (L.) : Sur l'isothermie relative des réseaux. — Table des matières du Tome XXXV.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par G. Darboux, E. Picard, J. Tannery. — Tome XXXI, 1907, Gauthier-Villars, Paris.

Septembre-décembre 1907. — J. Dolbnia : Quelques nouvelles remarques sur la transformation des fonctions elliptiques et sur la réduction des intégrales abéliennes. — E. Bounitzky : Sur les solutions singulières des équations de Raffy. — G. Tzitzéica : Sur une propriété caractéristique des surfaces de révolution. — J. Tannery : Manuscrits et papiers inédits de Galois (*Suite*). — A. Buhl : Sur de nouvelles formules de sommabilité.

Tome XXXII, 1908. Janvier-avril. — Bounitzky : Sur une classe d'équations intégrales. — J. Tannery : Correspondance entre Liouville et Dirichlet. — G. Darboux : Les origines, les méthodes et les problèmes de la Géométrie infinitésimale.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, publiés par les secrétaires perpétuels. Gauthier-Villars, Paris.

Premier semestre, 1908. — 13 janv. — A. Buhl : Sur la sommabilité des séries de Fourier. — A. Denjoy : Sur le choix de l'exposant de convergence pour les séries entières de genre infini.

20 janvier. — Schlesinger : Sur un système différentiel du second degré. — Esclangon : Sur les solutions périodiques de certaines équations fonctionnelles.

27 janvier. — Eug.-E. Levi : Sur l'équation $\partial^2 z / \partial x^2 - \partial z / \partial y = 0$. — E. Cartan : Sur la définition de l'aire d'une portion de surface courbe. — Tzitzéica : Sur une classe de surfaces.

3 février : Léop. Féjer : Sur le développement d'une fonction arbitraire suivant les fonctions de Laplace.

10 février. — M. Petrovitsch : Théorème sur les séries de Taylor. — E. Cotton : Sur l'intégration approchée des équations différentielles.

17 février. — E. Goursat : Sur un théorème de la théorie des équations intégrales.

24 février. — E. Holmgren : Remarque sur une communication de M. Eug.-E. Levi. — Remoundos : Sur les singularités des équations différentielles du premier ordre. — Popovici : Sur les congruences de courbes planes.

2 mars. — P. Raffy : Sur les surfaces à lignes de courbure confondues. — Störmer : Cas de réduction des équations différentielles de la trajectoire d'un corpuscule électrisé dans un champ magnétique.

9 mars. — Störmer (v. ci-dessus) : 2me note. — Traynard : Sur une surface hyperelliptique du 3me ordre. — Kolosoff : Sur le problème d'élasticité à deux dimensions. — Nordmann : Recherches nouvelles sur les étoiles variables.

16 mars. — A. Buhl : Sur les séries de polynomes tayloriens. — Korn : Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface

23 mars. — Zaremba : Sur l'application d'un problème alterné au problème biharmonique. — Raffy : Sur les surfaces à lignes de courbure confondues. — C. Störmer : Sur les équations différentielles d'un corpuscule électrisé dans un champ magnétique.

6 avril. — Le Vavasseur : Sur les sous-groupes du groupe linéaire homogène à quatre variables et les systèmes d'équation aux dérivées partielles qui leur correspondent. — Raffy : Sur les réseaux conjugués persistants qui comprennent une famille de lignes minima.

27 avril. — G. Darboux : Sur un théorème relatif à la théorie des courbes gauches. — Auric : Sur l'entropie.

4 mai. — Humbert : Formules relatives aux minima des classes de formes quadratiques binaires et positives. — Krygowski : Sur les intégrales hyperelliptiques canoniques de seconde espèce. — P. Duhem : Sur la découverte de la loi de la chute des graves.

25 mai. — P. Zervos : Sur une méthode de M. Goursat dans le problème de Monge. — L. Bachelier : Le problème général des probabilités dans les épreuves répétées.

11 mai. — Jacob : Intégromètre permettant l'intégration de l'équation d'Abel.

9 juin. — Auric : Sur le développement en fraction continue d'un nombre algébrique.

15 juin. — E. Picard : Sur une équation aux dérivées partielles relative à une surface fermée. — De Séguier : Sur les formes bilinéaires. — Sanielovici : Sur l'équation aux dérivées partielles des membranes vibrantes.

22 juin. — E. Borel : Sur l'analyse des courbes polymorphiques.

29 juin. — A. Demoulin : Sur les surfaces réglées. — A. Denjoy : Sur les produits canoniques de genre infini. — Sanielevici : Sur l'équation aux dérivées partielles des membranes vibrantes.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer. — B. 16. 1907 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

N°s 9-12 (septembre-décembre 1907). — K. Hensel : Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen. — K. Schwarzschild : Über astronomische Ausbildung der Lehramtskandidaten. — F. Klein : Über den Zusammenhang zwischen dem sogenannten Oszillationstheorem der linearen Differen-

tialgleichungen und dem Fundamentaltheorem der automorphen Funktionen. — G. Faber : Einfaches Beispiel einer stetigen nirgends differentiierbaren Funktion. — F. Hausdorff : Über dichte Ordnungstypen. — G. Landsberg : Krümmungstheorie und Variationsrechnung. — E. Jahnke : Die bilinearen Relationen zwischen den quadraten der Thetafunktionen von zwei Argumenten und den zugehörigen p-Funktionen. — A. v. Brill : Zur Einleitung der Eulerfeier. — Edm. Hoppe : Die Verdienste Euler's um die Optik.

Band 17, 1908. Januar-Mai. — A. Schönflies : Zur Statistik des mathematischen Studiums. — Felix Müller : Über eine Biographie L. Eulers vom Jahre 1780 und Zusätze zur Euler-Literatur. — E. Brauer : Eulers Turbinentheorie. — Georg Landsberg : Über Differentiierbarkeit stetiger Funktionen. — G. Frege : Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen ; Bemerkungen von J. Thomae. — Ludw. Schlesinger : Über eîn Problem der Diophantischen Analysis bei Fermat, Euler, Jacobi und Poincaré. — Joseph Kürschak : Eine besondere Darstellung der linken Seiten der Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichungen. — Vladimir Varicak : Beiträge zur nicheuklidischen Geometrie. — H.-E. Timerding : Eulers Theorie des Schiffes und die Bewegungsgleichungen des starren Körpers. — K. Rohn : Konstruktion eines Kegelschnittes, wenn ein reeller Punkt P, zwei konjugiert imaginäre Punkte und zwei konjugiert imaginäre Tangenten gegeben sind. — A. Korselt : Über die Logik der Geometrie. — E. Study : Kritische Betrachtungen über Lies Invariantentheorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen. — F. Engel : Zu der Studyschen Abhandlung. — Gerhard Hessenberg : Willkürliche Schöpfungen des Verstandes ? — M. Krause : Enno Jürgens. — I. Schur : Neuer Beweis eines Satzes von W. Burnside. — Felix Klein : Die Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. — Yoshio Mikami : Seki and Shibukawa. — Fr. Riesz : Über die Approximation einer Funktion durch Polynome.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von Emil Lampe. Band 36 ; Jahrgang 1905. — G. Reimer, Berlin.

Heft 2 (p. 529 à 752). Reine, elementare und synthetische Geometrie. — Analytische Geometrie. — Mechanik.

Heft 3 (p. 753-1088, LXXII). — Mechanik. — Mathem. Physik. — Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. Band CXXXIII. — Georg Reimer, Berlin.

Nos 1 à 4. — Thomé : Über simultane lineare Differentialgleichungen. — J. Horn : Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen. — J. N. Hatzidakis : Über die Kräfte die Kegelschnitte als Bahnen hervorrufen. — G. Pirondini : Sur la théorie générale des radicales et des anti-radicales. — P. Appell : Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement. — G. Voronoï : Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. — 4. Koenigsberger : Ueber die Elimination von Variabeln zwischen den Lagrangeschen Gleichungen der Dynamik. — E. Jahnke : Über orthogonale Substitutionen und die Differentialrelationen zwischen den Thetafunktionen von zwei Argumenten. — M. Réthy : Über Stabilität und Labilität eines materiellen

Punktes im widerstrebenden Mittel. — Heinrich-W.-E. Jung : Darstellung der Funktionen eines algebr. Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen.

Pädagogisches Archiv. Monatsschrift für Erziehung, Unterricht u. Wissenschaft, herausgegeben von Karl Knabe u. Fr. Dannemann. 50. Jahrg. 1908. — Quelle u. Meyer, Leipzig.

Cette revue pédagogique, bien connue dans les milieux du corps enseignant allemand, a atteint sa 50e année. A cette occasion la Rédaction et l'Administration viennent de subir quelques changements. La Revue sera dirigée pour la partie scientifique par M. Knabe et pour les autres domaines par M. Dannemann. Elle s'occupera plus particulièrement des intérêts des établissements secondaires supérieurs, classiques, réaux ou modernes, ainsi que des séminaires de maitres et des écoles de jeunes filles.

Proceedings of the London Mathematical Society. Série 2, vol. 5, fasc. 5-7.

E. W. Hobson : On Repeated integrals. — M. J. M. Hill : On a Formula for the Sum of a Finite Number of Terms of the Hypergeometric Series wehn the Fourth Element is Equal to Unity. — G. H. Hardy : The Singular Points of Certain Classes of Functions of several Variables. — J. E. Littlewood : On the Asymptotic Approximation to Integral Functions of Zero Order. — A. C. Dixon : Harmonic Expansions of Functions of Two Variables. — J. W. L. Glaisher : On the Numbers of Representations of a Number as a Sum of $2r$ Squares, where $2r$ Does not exceed Eighteen.

2. Livres nouveaux :

J. Andrade. — **Chronométrie.** (Encyclopédie scientifique publiée sous la direction du Dr Toulouse). — 1 vol. cart. in-18, 382 p. avec 193 fig.; 5 fr.; O. Doin, Paris.

Edw. M Langley. — **Solid Geometry through the Stereoscope.** — 1 broch. 43 p. et 25 vues stéréoscopiques; Underwood and Underwood, Londres.

S. de Lima Salcedo. — **Nuovo metodo para resolver la ecuacion de tercer grado** y la Trisección del arco. — 1 broch. in-8o, 24 p., Caracas.

Gino Loria. — **Il passato ed il presente delle principali Teorie geometriche.** Terza edizione accresciuta di uno Sguardo allo sviluppo della Geometria in quest'ultimo decennio. — 1 vol. cart. in-8; H. Rinck, Turin.

E. Müller. — **Lehrbuch der darstellenden Geometrie** für technische Hochschulen. *Band* I. — 1 vol. cart. in-8o, 367 p., 273 fig. et 3 planches; 12 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Mesure de la base géodésique du tunnel du Simplon. (Vol. XI des Travaux astronom. et géodés. exécutés en Suisse). — 1 vol. gr. in-4o, avec 35 fig.; Fæsi et Beer, Zurich.

Max Simon. — **Didaktik u. Methodik des Rechnens u. der Mathematik.** 2te umgearbeitete u. vermehrte Auflage. — 1 vol. br. in-8o, 206 p.; 4 M. 50; O. Beck, Munich.

Thèses de doctorat :

Sam. Dumas. — **Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues.** — 1 broch. in-8o, 60 p., Zürcher et Furrer, Zurich.

P. Mahlo. — **Topologische Untersuchungen über Zerlegung in ebene u. sphærische Polygone.** — 1 broch. p. in-8o, 98 p. et 39 fig.; Kammerer & Co, Halle a. S.

COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

RAPPORT PRÉLIMINAIRE SUR L'ORGANISATION DE LA COMMISSION ET LE PLAN GÉNÉRAL DE SES TRAVAUX

SOMMAIRE

A. — INTRODUCTION.

La section *Philosophie, Histoire et Enseignement* du 4e Congrès international des mathématiciens, tenu à Rome du 6 au 11 avril 1908, a entendu une série de rapports sur l'enseignement mathématique dans les principaux pays. Sur l'initiative de M. le prof. Dav.-Eug. Smith, auteur du rapport concernant les Etats-Unis, elle décida de soumettre au Congrès une résolution tendant à créer une Commission internationale chargée de faire une étude d'ensemble des progrès de l'enseignement mathématique dans les différentes nations. Cette proposition avait déjà été formulée par le savant professeur de New-York, en 1905, dans sa réponse à une enquête de la Revue internationale *L'Enseignement mathématique* (p. 469) sur les « réformes à accomplir ». Elle fut vivement appuyée par le Congrès, qui, dans sa séance du 11 avril adopta la résolution suivante :

« *Le Congrès ayant reconnu l'importance d'un examen comparé des méthodes et des plans d'étude de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires des différentes nations, confie à* MM. Klein, Greenhill *et* Fehr *le mandat de constituer une Commission internationale qui étudiera ces questions et présentera un rapport d'ensemble au prochain Congrès* ».

On sait que le prochain Congrès aura lieu à Cambridge (Angleterre) en août 1912.

Le Comité s'est constitué de la manière suivante :

Président : M. le Prof. F. Klein, G. R. R. Göttingue.

Vice-président : Prof. Sir George Greenhill F. R. S. Londres.

Secrétaire-général : M. le Prof. H. Fehr, Genève.

Le Comité ne tarda pas à se mettre à l'œuvre et, dans une réunion tenue à *Cologne*, en septembre 1908, adopta ce rapport préliminaire sur l'organisation de la Commission et le plan général de ses travaux.

B. — ORGANISATION DE LA COMMISSION

I. — LES DÉLÉGATIONS

a) La Commission est formée par des délégués représentant les pays qui ont pris part au moins à deux des Congrès internationaux des mathématiciens avec une moyenne d'au moins deux membres. Chacun de ces pays a droit à un délégué. Les pays qui ont eu une moyenne d'au moins dix représentants peuvent avoir deux ou trois délégués. Dans les votations et les discussions de la Commission chaque pays n'a cependant qu'une voix.

Les pays, dits *pays participants*, qui sont appelés à prendre part aux travaux de la Commission sont les suivants :

Allemagne (2 ou 3 délégués).
Autriche (2 ou 3).
Belgique (1).
Danemark (1).
Espagne (1).
Etats-Unis d'Amér. (2 ou 3).
France (2 ou 3).
Grèce (1).
Hollande (1).
Hongrie (2 ou 3).
Iles britanniques (2 ou 3).
Italie (2 ou 3).
Norvège (1).
Portugal (1).
Roumanie (1).
Russie (2 ou 3).
Suède (1).
Suisse (2 ou 3).

b) Les pays qui ne répondent pas aux conditions ci-dessus, mais qui par leurs institutions peuvent contribuer aux progrès de la science, seront invités à se faire représenter par un délégué qui suivrait les travaux de la Commission, sans toutefois prendre part aux votations.

Ces pays seront dits *pays associés;* en voici une première liste, qui pourra être complétée s'il y a lieu :

Argentine (Rép.).
Australie.
Brésil.
Bulgarie.
Canada.
Chili.

Chine.
Colonie du Cap.
Egypte.
Indes anglaises.
Japon.
Mexique.
Pérou.
Serbie.
Turquie.

c) *Sous-commissions nationales.* — Les différentes délégations sont invitées à s'adjoindre des sous-commissions nationales, comprenant des représentants des divers degrés de l'enseignement mathématique dans les établissements d'instruction générale ou dans les écoles techniques ou professionnelles. Ces sous-commissions sont destinées à aider les délégués dans l'élaboration des rapports dont il est question sous la rubrique G.

II. — LE COMITÉ CENTRAL

La Commission est dirigée par le Comité des trois membres désignés par le 4me Congrès international des mathématiciens. Ce comité est dit le *Comité central*, il a les pouvoirs les plus étendus. Avec l'approbation de la Commission il se réserve notamment tous les droits concernant l'organisation et la publication des rapports généraux de la Commission.

Pour ce qui concerne la constitution de la Commission, le Comité tient à s'assurer le concours actif de personnes qui s'intéressent tout particulièrement aux progrès de l'enseignement mathématique. Il priera ces personnes d'entrer en temps utile en relation avec leur Gouvernement, afin que celui-ci soit déjà informé du but et de l'organisation de la Commission lorsqu'il sera invité officiellement à approuver les propositions du Comité pour ce qui concerne la délégation, ainsi que les propositions des délégués au sujet de la sous-commission nationale. En raison de la tâche très vaste qui incombe aux délégations, il est en effet très désirable que leurs travaux puissent commencer dans le plus bref délai possible.

III. — DISPOSITIONS FINANCIÈRES

Le 4me Congrès international n'ayant fourni aucun subside les gouvernements des *pays participants* seront invités à mettre à la disposition de leur délégation une somme permettant de couvrir entièrement les frais de la délégation et de la sous-commission nationale et de contribuer aux frais généraux de la Commission.

Pour subvenir aux frais généraux de la Commission (comprenant notamment les frais du secrétariat-général et du Comité central), il sera constitué un fonds formé par des contributions annuelles de cent francs par *pays participant ;* elles devront être versées au secrétaire-général au commencement de janvier des années 1909, 1910, 1911 et 1912 ou, si on le préfère, en un seul versement en 1909. Le secrétaire-général présentera un rapport financier à la réunion de la Commission qui aura lieu à Cambridge en 1912, à l'occasion du 5me Congrès international.

Quant aux délégués des *pays associés*, ils sont priés de s'entendre directement avec leur gouvernement au sujet des frais de délégation. Le Comité se réserve de fixer ultérieurement, s'il y a lieu, une légère participation des pays associés aux frais généraux de la Commission.

C. — ORGANE OFFICIEL DE LA COMMISSION PUBLICATIONS DES RAPPORTS DES SOUS-COMMISSIONS

La Revue internationale *L'Enseignement mathématique*, dirigée par MM. Laisant et Fehr, servira d'organe à la Commission. Elle publiera le Rapport préliminaire et fera connaître la composition des délégations. Dans la suite, elle rendra régulièrement compte des travaux de la Commission et des sous-commissions.

Il va sans dire que ces communications pourront être reproduites par d'autres périodiques ou par d'autres moyens de publication.

Les sous-commissions publieront leurs rapports suivant

leur propre convenance. Le Comité central exprime toutefois le désir que ces rapports soient imprimés suivant le format de *L'Enseignement mathématique* et que les délégations des divers pays en adressent 75 exemplaires au secrétariat général qui les fera distribuer aux membres de la Commission.

D. — LANGUES OFFICIELLES

La correspondance et les rapports doivent être rédigés dans l'une des quatre langues admises aux Congrès internationaux des mathématiciens, au gré des auteurs. Ces langues sont : l'allemand, l'anglais, le français et l'italien.

E. — BUT GÉNÉRAL DE LA COMMISSION

Conformément aux vœux divers qui ont été formulés à Rome, le Comité central estime que le but général de la Commission doit être le suivant :

Faire une enquête et publier un rapport général sur les tendances actuelles de l'enseignement mathématique dans les divers pays.

On devra tenir compte non seulement des méthodes d'enseignement et des plans d'études, mais aussi de l'organisation même des études, sans cependant exposer celle-ci d'une manière complète dans son développement historique. Il ne sera pas de la tâche de la Commission d'élaborer des statistiques.

Dans tous les cas, le travail de la Commission devra beaucoup plus tendre à faire ressortir quels sont les principes généraux dont doit s'inspirer le maître, que de chercher l'uniformité des détails ou de proposer des programmes devant s'adapter à la fois aux institutions des divers pays.

F. — ORGANISATION DES TRAVAUX

Pour que l'étude, dont nous allons tracer le plan général, apporte des résultats réellement utiles aux progrès de l'en-

seignement, il est indispensable que tous les délégués et leurs sous-commissions nationales apportent une collaboration active et dévouée.

Les délégations des *pays participants* seront tout d'abord appelées à donner leur préavis sur le plan général des travaux ; puis, dans une première période, elles établiront leur rapport à l'aide de leur sous-commission, d'après le plan des travaux tel qu'il aura été définitivement arrêté par le Comité central. Pour les *pays associés* ce rapport est facultatif.

Il est désirable que les principaux points des rapports soient préalablement discutés, dans chaque pays, dans des réunions de professeurs et dans les sociétés scientifiques, techniques ou autres qui s'intéressent aux progrès de l'enseignement mathématique. Il est bon d'autre part que le texte soit accompagné d'indications bibliographiques aussi précises et aussi complètes que possible.

Les rapports imprimés devront être remis au secrétariat général au commencement de l'année 1911.

La Commission se réunira ensuite en conférence pendant les vacances de Pâques 1911 pour faire une étude d'ensemble des questions soulevées dans le programme général et pour arrêter les bases du rapport général. Pour ce qui concerne la rédaction de celui-ci, le Comité central étudiera les mesures à prendre pour qu'il puisse être présenté au Congrès de Cambridge en 1912 et les soumettra à la Commission.

G. — OBJET DES TRAVAUX DE LA COMMISSION

I. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Dans le texte même de la résolution du Congrès de Rome il n'est question que de « l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires ». Mais, étant donné que le but de ces écoles et la durée de leurs études est très variable d'un Etat à un autre, le Comité fera porter son travail sur l'ensemble du champ de l'instruction mathématique, depuis la première initiation jusqu'à l'enseignement supérieur. Il ne

se bornera pas aux établissements d'instruction générale conduisant à l'Université, mais il étudiera aussi l'enseignement mathématique dans les écoles techniques ou professionnelles. En raison de l'importance croissante que prennent ces écoles et des exigences nouvelles qu'on ne cesse de montrer vis-à-vis de l'enseignement mathématique, il y aura lieu d'accorder dans cette enquête une large place aux mathématiques appliquées.

Il s'agit donc d'une étude d'ensemble de l'enseignement mathématique dans les différents types d'écoles et à ses divers degrés, cette étude étant principalement destinée à présenter, d'une manière objective, les tendances actuelles de cet enseignement.

Le travail de la Commission sera basé sur les rapports que les délégués des *pays participants* établiront à l'aide de leur sous-commission nationale conformément au *plan général* arrêté par le Comité central. Dans une *première partie* ces rapports donneront un aperçu de *l'organisation actuelle* des études, des examens qui s'y rattachent, des méthodes d'enseignement et de la préparation du corps enseignant. Ce n'est qu'après cet exposé que l'on pourra examiner et présenter d'une manière claire quelles sont les *tendances actuelles* de l'enseignement, tendances qui se révèlent souvent par la nature des réformes accomplies au cours des dernières années. Ce sera l'objet d'une *seconde partie*, qui conservera les mêmes divisions que la première.

II. — PLAN GÉNÉRAL DES TRAVAUX

PREMIÈRE PARTIE

Etat actuel de l'organisation et des méthodes de l'instruction mathématique.

CHAPITRE I. — **Les divers types d'écoles.** — Dans ce premier chapitre on donnera un *exposé succinct* des divers établissements d'instruction publique dans lesquels on rencontre l'enseignement mathématique et l'on indiquera le but

de chaque école. On tiendra également compte des écoles de jeunes filles.

Les établissements seront répartis d'après la classification suivante :

a) Ecoles primaires, élémentaires et supérieures ;

b) Ecoles moyennes ou secondaires supérieures (lycées, gymnases, écoles réales, etc.) ;

c) Ecoles professionnelles moyennes (technicum, etc.) ;

d) Ecoles normales pour les divers enseignements (séminaires de maîtres, « teachers colleges », etc.) ;

f) Ecoles supérieures : Universités et Ecoles polytechniques.

Il sera bon d'accompagner cet exposé d'un *tableau schématique* donnant un aperçu d'ensemble et faisant ressortir la succession et la correspondance entre les divers établissements et en indiquant aussi l'âge moyen des élèves.

Chapitre II. — **But de l'instruction mathématique et branches d'enseignement.** — On examinera cette question pour les divers types d'établissements mentionnés ci-dessus en tenant compte, s'il y a lieu, des mathématiques appliquées, notamment de la mécanique.

Non seulement *le but de l'instruction mathématique* varie nécessairement d'un établissement à un autre, mais il a subi quelques transformations au cours du siècle dernier. Il peut être purement formel, ou formel en tenant compte de l'intuition ; il peut aussi tendre à la fois au développement logique et envisager le côté utilitaire, ou encore envisager uniquement la pratique. D'autre part, on peut avoir en vue principalement la culture de la mémoire ou chercher au contraire à développer les facultés mathématiques.

Quelles sont les *branches mathématiques* enseignées dans les divers types d'écoles ? On indiquera le temps qui leur est consacré et l'étendue du programme. Dans quelle mesure tient-on compte des liens entre ces branches et, s'il y a lieu, des liens avec les mathématiques appliquées (comprenant la mécanique) et la physique ?

Chapitre III. — **Les examens.** — Il est incontestable que le système des examens a une grande influence sur la mé-

thode d'enseignement. On indiquera donc sommairement ce qui caractérise les examens dans chaque catégorie d'écoles, et tout particulièrement ceux qui conduisent aux « certificats de maturité », aux « baccalauréats », etc., et les examens des candidats à l'enseignement.

Chapitre IV. — **Les méthodes d'enseignement.** — Quelles sont les méthodes suivies dans les divers établissements, depuis l'enseignement d'initiation jusqu'aux études supérieures ?— Matériel d'enseignement; modèles mathématiques. — Emploi de manuels, text-books, recueils d'exercices. — Exercices théoriques ; problèmes empruntés aux sciences appliquées. — Travaux pratiques.

Chapitre V. — **Préparation des candidats à l'enseignement.** — Ici encore on envisagera les divers types d'établissements et l'on indiquera quelles sont les garanties exigées par l'autorité scolaire : *a)* au point de la préparation théorique; *b)* à celui de la préparation professionnelle.

DEUXIÈME PARTIE

Les tendances modernes de l'enseignement mathématique.

Chapitre I. — **Les idées modernes concernant l'organisation scolaire.** — Réformes à l'étude. — Nouveaux types d'écoles. — La question de la coéducation des deux sexes.

Chapitre II. — **Les tendances modernes concernant le but de l'enseignement et les branches d'études.**

But de l'enseignement. — Branches nouvelles ou chapitres nouveaux à substituer à des objets d'études inutiles dans la suite, ou d'un intérêt très secondaire, mais conservés par pure tradition ou par routine.

Etant donnés les rapides progrès des mathématiques et de leurs applications, le Comité propose d'examiner à nouveau avec soin quelles sont les branches de cette science qui sont les plus à même de contribuer à la culture générale. Parmi les sujets qui réclament actuellement une place dans les programmes élémentaires on peut mentionner, d'une part, le calcul différentiel et intégral, la géométrie analytique, certaines notions de géométrie descriptive et projective, et une étude de la physique à un point de vue mathématique.

D'autre part, on propose d'introduire de nouveaux sujets, d'un genre plus spécial, ou de nouvelles notions fondamentales (telles que les notions de fonction, de groupes, d'ensemble). Il serait utile que l'enquête examinât dans quelle mesure on peut tenir compte de ces demandes et qu'elle établisse quel est le minimum nécessaire des éléments de géométrie euclidienne, de géométrie descriptive et projective, d'algèbre, de calcul différentiel et intégral, de trigonométrie et de géométrie analytique, formant la base des études ultérieures.

La même question se pose pour les établissements d'ordre professionnel. Quelles sont les branches utiles aux différentes carrières ?

Chapitre III. — **Les examens.** — Projets à l'étude concernant la transformation du système des examens ou leur suppression complète.

Chapitre IV. — **Les méthodes d'enseignement.** — Les idées modernes concernant les méthodes aux divers degrés de l'enseignement et dans les différents types d'écoles. — Les liens entre les différentes branches mathématiques. — Les rapports entre les mathématiques et les autres branches. — Exercices et applications pratiques ; modèles et instruments. — L'usage des manuels.

Sur quelques objets concernant ce chapitre. 1. — Depuis l'époque de Pestalozzi, les considérations psychologiques ont joué un rôle important dans l'éducation primaire, et, depuis une génération, elles se rendent également utiles, dans une certaine mesure, dans l'élaboration des programmes des établissements secondaires. Il y aurait lieu d'examiner quels sont les résultats de la psychologie dans l'enseignement des mathématiques, et jusqu'à quel point ils sont utiles à la réforme de cet enseignement. Il conviendrait d'examiner tout particulièrement le rôle d'un enseignement d'initiation et la nécessité de faire précéder l'étude théorique des mathématiques d'un enseignement intuitif.

A quel moment, au contraire, les considérations purement logiques doivent-elles prendre une place prépondérante, par exemple dans l'étude de la géométrie élémentaire ou du calcul différentiel et intégral ?

2. — **Les applications pratiques.** — Bien des écoles ont consacré de longues discussions à la part que l'on doit attribuer aux considérations d'ordre pratique et expérimental.

a) Dans l'enseignement élémentaire on peut mentionner, par exemple, le plissage de papier, le travail en plein air, l'usage des

instruments simples de mesure, la géométrie d'observation, etc ; le calcul pratique et approximatif (degré d'approximation, logarithmes à un nombre varié de décimales, usage de la règle à calcul, etc) ; la question générale des graphiques en algèbre, l'usage plus répandu du papier quadrillé.

b) Il a été question ces dernières années de laboratoires mathématiques. Qu'a-t-on fait dans ce sens et quels sont les résultats ? — Modèles mathématiques confectionnés par les élèves. Le rôle des collections de modèles.

Quels sont les moyens qui permettraient d'accorder une plus grande place aux mathématiques dans l'enseignement populaire (extension universitaire) ? — Place des mathématiques appliquées dans les Musées. — Récréations mathématiques.

Il y aurait là un ensemble de moyens de nature à réagir contre les préjugés qui existent à l'égard des mathématiques.

3. — **Les liens entre les différentes branches mathématiques.** — Il serait utile d'examiner dans quelle mesure on peut faire disparaître les limites conventionnelles qui existent entre certains sujets de mathématiques pures, comme l'algèbre et la géométrie ; l'algèbre et le calcul différentiel et intégral, la géométrie d'Euclide et la géométrie analytique, et la géométrie et la trigonométrie. Non seulement il faudrait examiner la possibilité de cette réforme, mais on devra aussi tenir compte des inconvénients et des dangers qui pourraient en résulter, ce qui est tout aussi important.

Il serait bon, d'autre part, de connaître le résultat des transformations suivantes qui ont été proposées ou examinées à nouveau ces dernières années :

a) La place de la géométrie démonstrative relativement à l'algèbre. — *b)* La fusion de la géométrie plane et de la géométrie de l'espace. — *c)* L'union plus intime du calcul différentiel et du calcul intégral ou l'introduction de ce dernier avant le premier.

4. — **Les rapports entre les mathématiques et autres branches.** — Dans le même ordre d'idées, il serait également utile d'examiner les points de contact qui existent entre les mathématiques et les autres branches ; ainsi les rapports : 1) avec le dessin (géométrique, technique et artistique) ; 2) avec les sciences appliquées ; 3) avec les autres branches scientifiques (Physique, Chimie, Biologie, Géographie, etc.) ; 4) avec la Philosophie ; 5) avec les problèmes de la vie journalière.

Ces points de contact sont importants pour ce qui concerne l'éducation pratique. Il ne suffirait pas d'étudier simplement les possibilités et desiderata généraux, il faut encore tenir compte de ce qui se fait actuellement avec succès et des dangers à courir. Par exemple, ceux qui réclament une relation étroite entre les mathématiques et la physique devront établir exactement quelles sont les notions de géométrie qui sont d'une application directe

à la physique, et citer les problèmes de physique élémentaire qui exigent les équations linéaires simultanées, les équations du second degré à une ou plusieurs inconnues, les équations irrationnelles et les progressions.

5. — **Les considérations historiques.** — On a demandé qu'il soit accordé une plus large place au développement historique des mathématiques. Dans quelle mesure est-ce possible et désirable ?

Chapitre V. — **La préparation des maîtres.** — Quelles sont les conditions que doit remplir une préparation rationnelle des candidats à l'enseignement ? Comment organiser les cours théoriques et la préparation pratique ?

Les progrès de l'enseignement dépendent directement de la préparation des maîtres. C'est là une question d'une importance fondamentale. Les études et les exigences varient nécessairement d'un pays à un autre, elles dépendent beaucoup du nombre des candidats et des facilités dont on dispose en matière d'éducation. Le Comité pense donc qu'il est utile de s'informer des réformes ou des projets de réforme, qui se font actuellement en vue d'obtenir une préparation des maîtres conforme aux conditions modernes, et cela non seulement pour le personnel des écoles primaires et secondaires mais aussi pour l'université.

Cette enquête pourra se faire notamment sur :

a) Le travail mathématique que l'on exige des candidats.

b) Leur initiation aux recherches scientifiques.

c) La meilleure méthode ayant pour objet de leur présenter la pédagogie théorique et pratique (considérée comme science d'éducation).

d) La question du sexe du maître dans les différentes années scolaires.

e) Des questions concernant par exemple le temps à consacrer à l'histoire des mathématiques, l'histoire de l'enseignement mathématique, le côté récréatif des mathématiques, et la littérature générale touchant à l'éducation mathématique.

REMARQUE GÉNÉRALE

Dans chacun de ces chapitres on fera ressortir *d'une manière concise*, d'une part, ce qui caractérise les réformes pro-

posées, d'autre part, quels sont les dangers à éviter et quels sont les objections et les arguments que font valoir ceux qui s'opposent aux transformations projetées. Voici quelques questions fondamentales qui devront être discutées :

1. — Le désir de rendre l'instruction attrayante peut en diminuer le caractère sérieux, résultat qui serait désastreux aussi bien au point de la science qu'à celui de la valeur pratique des mathématiques.

2. — Une psychologie mal comprise pourrait conduire à utiliser d'une manière exagérée les bases logiques des mathématiques, et il en résulterait chez l'éléve une incertitude continuelle.

3. — Le fait de négliger le côté abstrait qui semble nécessaire pour graver dans l'esprit d'une manière indélébile les vérités mathématiques.

4. — Le fait de ne pas se rendre compte qu'une branche comme la géométrie, telle qu'on la conçoit actuellement, conduit à des résultats d'un genre différent de ceux que fournit l'algèbre, et qu'une fusion des deux pourrait avoir comme conséquence la perte de quelques-uns des principaux avantages de chacune de ces branches. — De même pour d'autres sujets.

D'autres dangers se présentent encore, et le Comité estime qu'il est nécessaire de les examiner tous avec soin, afin que seules des réformes pouvant conduire à de réels progrès soient entreprises.

Octobre 1908.

Le Comité central :

F. Klein, *Président*, 3, Wilhelm Weberstr., Göttingue (Allemagne) ;

Sir George Greenhill, *Vice-président*, 1, Staple Jnn., Londres, W. C. ;

H. Fehr, *Secrétaire-général*, 72, Florissant, Genève (Suisse).

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES ECOLES PUBLIQUES ANGLAISES POUR GARÇONS[1]

I

1. — Cette publication se borne uniquement aux conditions qui règnent en Angleterre, à l'exclusion de l'Ecosse, de l'Irlande et du Pays de Galles.

2. — En Angleterre, le terme « d'école publique » a un sens un peu spécial. Par « école publique » on entend généralement une école secondaire, école dotée, instruisant les jeunes gens des classes supérieures et moyennes et indépendante du contrôle de l'Etat sauf lorsque la Caisse publique lui fournit un apport. Les écoles publiques peuvent être soit des internats, soit des externats, mais la plupart sont de la première catégorie.

Il existe d'autres catégories d'écoles secondaires telles que des externats, non dotés, entretenus par des impôts locaux; ces écoles sont de plus en plus nombreuses et importantes et dans bien des cas concourent avec succès avec les écoles dotées plus faibles. Elles se différencient des écoles publiques en ce que leurs règlements sont sous le contrôle d'un bureau du gouvernement, le *Board of Education.*

3. — Les écoles publiques monopolisent l'éducation des classes supérieures du pays. Elles se sont toujours glorifiées de leur exemption d'un contrôle étranger ; chaque école est administrée par son propre corps dirigeant et par son principal, généralement omnipotent. Cette liberté en apparence complète est restreinte par les causes suivantes. En premier lieu, beaucoup d'écoles publiques, trouvent opportun d'accepter l'aide pécuniaire de l'Etat, ce qui impose l'inspection par le « Board of Education. » Les écoles les plus riches et les plus importantes sont en état de se passer de cette aide; mais dans ces dernières années il y a une tendance de la part des principales écoles, à se soumettre volontairement à l'inspection.

---

[1] Rapport adressé au 4e Congrès international des mathématiciens, Rome, avril 1908, à la section IV (Philosophie, Histoire, Enseignement) par C. GODFREY, directeur du R. N. College, Osborne. — Traduit par Renée MASSON, (Genève).

En second lieu, malgré cette indépendance, ces écoles ne sont pas réellement libres ; l'intruction est déterminée en majeure partie par un grand nombre d'examens publics, tels que les examens pour les bourses de collège aux universités d'Oxford et de Cambridge, les examens préliminaires pour les grades dans les universités, les examens pour les certificats d'aptitude dirigés par les universités, les examens pour entrer dans l'armée dirigés par les commissaires du « Civil Service. »

La position d'une école aux yeux du public, son pouvoir d'attirer des élèves et de faire son chemin, dépend en grande partie des succès qu'elle a obtenus dans ces divers concours. Bien peu de réformes peuvent être accomplies sans l'assentiment des autorités inspectrices ; ainsi l'étude du grec est obligatoire pour tous les jeunes gens aspirant à un grade dans les universités d'Oxford et de Cambridge et les écoles publiques sont de ce fait obligées d'enseigner le grec à tous ces jeunes gens. On verra que l'influence des corps examinateurs a été toute puissante dans l'enseignement mathématique anglais.

Ce rapport concerne les conditions qui prévalent dans les écoles publiques. Nous donnerons d'abord un aperçu de *l'organisation de l'enseignement mathématique :*

4. — Une école publique est divisée en *classes* (forms), la classification étant déterminée principalement par la force dans les branches littéraires comme le Grec, le Latin, l'Anglais, l'Histoire, la Géographie, l'Ecriture Sainte. Ces sujets sont enseignés par le maître de classe.

Pour les mathématiques un certain nombre de classes forment un *groupe*, *(block)* et les élèves de ce groupe sont répartis en *séries*, *(sets)*, suivant leurs aptitudes en mathématiques. Une école de 400 élèves peut être divisée en 4 « groupes » et un « groupe » de 100 élèves peut former de 4 à 6 séries, le nombre de garçons dans une série de mathématique variant de 25 à 15. Les raisons de ce système de répartition pour les mathématiques sont les suivantes : 1° Le maître de classe n'a généralement pas des connaissances très complètes en mathématiques. 2° Les garçons d'une même classe diffèrent beaucoup trop dans leurs connaissances et aptitudes mathématiques pour recevoir un enseignement commun sans nouvelle répartition.

Le *nombre d'heures* affecté à l'enseignement mathématique en classe est de 4-7 heures par semaine avec 1 ou 2 heures de préparation en dehors de l'école. Beaucoup d'écoles ont une section moderne dans laquelle le grec est remplacé par l'allemand et un supplément de mathématiques et de sciences. En classe une grande partie du temps est employée par les élèves à résoudre des exercices écrits, le maître se promenant dans la salle pour leur aider lorsque cela est nécessaire.

Les différentes branches des mathématiques sont enseignées en général par le même maître ; mais dans quelques écoles il y a une organisation différente ; les élèves sont groupés en une classe pour l'Arithmétique et l'Algèbre et une autre pour la Géométrie.

On peut ajouter que le même arrangement est courant pour l'enseignement respectif des langues modernes et des sciences.

5. — Pendant les 2 dernières années d'école, de 17 à 19 ans, il y a une forte tendance parmi les jeunes gens à se spécialiser, le sujet choisi pour une étude spéciale étant généralement un des suivants : langues anciennes, mathématiques, sciences, langues modernes, histoire. Cette spécialisation précoce est le résultat des concours organisés par les Collèges d'Oxford et de Cambridge en vue des bourses destinées à ceux qui se distinguent dans une branche ; de sorte qu'un garçon ayant des aptitudes égales pour les langues anciennes et les mathématiques n'aurait pas de chance s'il était en compétition avec un élève particulièrement fort sur un seul sujet [1]. Il en résulte qu'un candidat à une bourse classique cessera souvent tout travail mathématique et scientifique à l'âge de 17 ans. De même un jeune mathématicien renoncera souvent pendant ses 2 dernières années d'études à toute instruction littéraire ; cependant il n'est que juste de dire qu'il y a une grande différence à cet égard entre les différentes écoles. En tout cas la concurrence entre les écoles pour l'obtention des bourses tend à faire échouer les tentatives de ceux qui trouvent que l'instruction devrait être générale jusqu'à la fin des études scolaires.

6. — Avant d'examiner plus particulièrement les différentes branches mathématiques, il est bon de dire quelques mots des réformes considérables qui ont été réalisées dans l'enseignement mathématique pendant les dernières années. Bien des barrières ont été renversées et on a modifié sur divers points la conception du programme d'études.

7. — Chaque branche peut être envisagée à deux points de vue, suivant qu'on la considère pour sa valeur utilitaire ou disciplinaire. Peut-être les maîtres sont-ils sujets à fixer leur attention sur le dernier point, tandis que la généralité du public considère le premier comme plus important. Il n'est guère nécessaire d'appuyer sur le fait que c'est une erreur de ne considérer qu'un des points de vue. On pourrait soutenir que presque toutes les branches ont été introduites dans les programmes à cause de leur utilité pratique, mais que les maîtres y trouvant une discipline de l'esprit, sont tentés de les conserver même lorsque les circonstances ont détruit leur valeur pratique.

Quoiqu'il en soit, jusqu'il y a dix ans, les mathématiques sem-

[1] Dans certains cas on peut obtenir une bourse pour une combinaison 1° de mathématiques et d'un peu de sciences physiques, 2° de lettres classiques et d'histoire.

blaient être considérées dans les écoles comme une gymnastique mentale. Cette exagération était nuisible, les jeunes gens ne pouvant guère être amenés à s'intéresser à un sujet enseigné pour des raisons qui leur paraissaient futiles. De bons maîtres sentirent la nécessité de renouveler un peu les méthodes afin de moderniser leur travail. Mais le système en vigueur était fixé par les feuilles d'examen et il était évident pour tout le monde que quoique les temps fussent mûrs pour des changements, il n'y en aurait point jusqu'à ce que les examinateurs et les maîtres y fussent poussés par l'opinion publique.

8. — L'impulsion nécessaire vint des ingénieurs. Le temps n'est plus où les ingénieurs méprisaient les mathématiques et se fiaient uniquement au bon sens et à l'intuition joints à une forte réserve de sûreté. Ils disent aujourd'hui qu'on ne peut pas savoir trop de mathématiques pourvu que ce soit de bonnes mathématiques. Une nouvelle période s'est ouverte par la création d'une section d'ingénieurs à l'Université de Cambridge, section dont les diplômés trouvent aisément des places à leur sortie de l'Université.

Les ingénieurs se plaignaient de ce que l'enseignement donné n'avait pas de bases pratiques. En 1902 à la réunion de la *British Association*, à Glascow, M. J. Perry, professeur de Mécanique au « Royal College of Science » à Londres, attaqua l'état de choses existant.

9. — Ce mouvement amena la formation de divers comités qui comparèrent les opinions des hommes du métier et des maîtres d'école et trouvèrent que l'accord était possible sur la plupart des points. Les professeurs reconnurent que des sujets utiles pouvaient être aussi éducatifs que les futilités conventionnelles qui avaient fini par s'identifier avec les mathématiques enseignées dans les écoles. De même que les mathématiques supérieures pures gagnent en valeur et en intérêt par un contact plus intime avec les problèmes posés par les physiciens et deviennent en revanche irréelles et sans but quand elles sont séparées de leurs applications, de même les mathématiques élémentaires ont trouvé leur salut dans l'introduction des applications sans nombre fournies par la vie industrielle moderne.

Les Universités et les corps examinateurs consentirent à modifier leurs règlements et programmes de façon à entrer dans les vues modernes. Une meilleure situation a été faite aux mathématiques et il est peut-être possible actuellement de porter un jugement sur les conditions nouvelles.

II. — Arithmétique.

10. — Cette branche n'est arrivée que très lentement à occuper une position convenable dans les écoles anglaises. Elle était, à une certaine époque, considérée seulement comme un instrument pour

la comptabilité et le commerce. Le temps était employé, mais sans profit, à se rendre maître des difficultés du système britannique des monnaies, poids et mesures. L'Arithmétique n'était pas enseignée dans ses véritables relations avec les autres branches des mathématiques. Les questions financières prenaient trop de temps et comme on pouvait s'y attendre, étaient souvent devenues singulièrement irréelles entre les mains des maîtres d'école. Un mal plus sérieux résidait dans la quantité considérable de problèmes spéciaux avec des artifices qui encombraient les programmes. Tous les problèmes posés aux examens publics étaient collectionnés par les auteurs de manuels d'exercices et élevés par eux à l'état de modèle, dans des chapitres spéciaux, et y étaient résolus par des méthodes particulières et ingénieuses. C'est ainsi que nous trouvons dans des livres d'exercices courants, des chapitres sur : « des robinets remplissant et vidant des bains, » « sur des courses et sur des jeux d'adresse, » « sur des vaches broutant des champs avec une parfaite égalité. »

L'arithmétique n'était plus guère envisagée qu'avec mépris et on remarqua, qu'à l'âge de 18 ans, certains jeunes gens étaient absolument incapables de faire aucune application utile de l'Arithmétique et ignoraient même complètement le système décimal. L'Arithmétique que ces jeunes gens avaient apprise, inutile dans la vie pratique, dépendait d'une quantité d'artifices particuliers, plutôt que de quelques principes simples et était également inutile comme moyen éducatif. Cette branche était devenue si vulgaire, que des mathématiciens compétents la négligeaient et étaient souvent embarrassés en présence de chiffres et de résultats numériques. Jamais sous aucun prétexte on n'introduisait des données numériques dans la Géométrie. Il était très rare de rencontrer des questions numériques dans les problèmes de mathématiques supérieures posés dans les universités. Il en résulte que les connaissances du mathématicien formé par ce système sont presque entièrement *qualitatives :* il lui arrivera rarement de rechercher une preuve *quantitative* à moins que ses expériences ultérieures n'aient corrigé les effets de l'éducation première.

11. — Les tendances qui caractérisent les *dernières réformes en Arithmétique sont :* 1° simplifier la branche, la débarrasser des règles et expédients particuliers inutiles, supprimer les types artificiels de problèmes, dont l'intérêt originaire a disparu, attacher moins d'importance à l'arithmétique financière.

2° Insister sur l'exactitude et l'habileté dans les plus simples opérations avec les entiers et les fractions décimales, insister sur la compréhension parfaite de la notation décimale et du système métrique, faire comprendre à l'élève de quel nombre restreint de principes et de règles différentes il a à se rendre maître et que pour le reste il peut se fier à son bon sens.

12. — Quelques-uns des meilleurs maîtres sont tentés d'appuyer sur l'étude de la théorie de l'Arithmétique, par exemple de s'appesantir sur les preuves rigoureuses des opérations fondamentales des fractions ordinaires, d'examiner minutieusement le degré d'approximation d'une suite de calculs, etc. D'autres trouvent que, bien que ces sujets soient sans doute dignes d'être mentionnés, ils sont, à cette période, pour la plupart trop difficiles pour être l'objet d'une étude approfondie; ils préféreraient les renvoyer jusqu'au moment où l'élève aura une plus grande maturité d'esprit et aura des connaissances suffisantes de l'algèbre.

13. — L'usage des *tables de logarithmes* à 4 décimales commence à entrer en vigueur. Il y a 10 ans les seules tables que l'on trouvait dans les écoles étaient celles à 7 décimales, qui étaient employées dans la résolution des triangles. Celles-ci n'étaient pas assez maniables et les jeunes gens n'en avaient jamais une habitude assez grande pour employer ces logarithmes avec confiance. Les maîtres de science, cependant, reconnurent l'utilité pratique des tables à 4 décimales et se plaignirent de devoir faire le travail de leurs collègues mathématiciens en en enseignant l'usage. Ceci cesse d'être vrai. On a trouvé qu'un garçon de 14 ans peut apprendre à se servir des tables à 4 décimales et qu'il le fait volontiers et avec compréhension ; de cette façon le champ des opérations possibles a été grandement élargi.

14. — Sous le même titre d'Arithmétique il est bon de parler de deux choses qui s'y rattachent très étroitement. Il s'agit, d'une part, de l'*importance des exercices numériques dans toutes les branches*, et, d'autre part, de l'introduction du *travail de laboratoire* dans l'enseignement mathématique.

Importance des exercices numériques dans toutes les branches. La suppression des matières inutiles du cours d'Arithmétique aurait pu avoir l'inconvénient de faire perdre à l'élève l'occasion de s'exercer dans les opérations numériques. Ce danger a été évité par l'usage d'exercices numériques fréquents dans les autres branches, plus spécialement en Géométrie et Trigonométrie. Dans chaque branche on appuye sur la nécessité du contrôle numérique approximatif. Cette tendance se retrouvera plus loin sous différents titres; il suffira de dire ici que cela amène à : 1° l'habileté dans le calcul numérique; 2° une réalisation plus vivante des résultats ainsi illustrés.

15. — Travaux de laboratoire en mathématiques. Actuellement, dans nombre d'établissements, les garçons de 13 à 15 ans, suivent comme faisant partie des mathématiques, un cours de travaux expérimentaux dans un laboratoire. Dans ce cours on leur enseigne à mesurer et à peser. Ils apprennent incidemment à voir les avantages du système décimal, à déterminer les surfaces et les volumes d'objets réels, à déterminer les densités et les poids spécifiques,

à découvrir les lois les plus simples de l'hydrostatique, etc. La quantité de connaissances acquises dans ce cours n'est peut-être pas très grande, mais il n'y a pas de doute sur le fait que ce cours donne un aperçu pratique et vulgarisateur des mathématiques et qu'il satisfait au besoin de coordination entre le cerveau, les yeux et les mains, besoin que bien des maîtres pensent être inhérents à la nature des jeunes Anglais.

III. — Géométrie.

16. — Géométrie plane. Les changements les plus remarquables ont été effectués dans l'enseignement de la Géométrie. Il y a 5 ans les Universités et la plupart des corps examinateurs exigeaient la suite des propositions d'Euclide. Les preuves mêmes d'Euclide n'étaient pas demandées ; mais aucune preuve n'était acceptée si elle violait la suite logique d'Euclide.

Cette restriction était depuis longtemps gênante et il semblait possible de perfectionner la suite d'Euclide. La restriction consacrait et fixait un mode d'enseignement sans vie. Un maître capable avait les mains liées. Il n'y avait pas de place pour l'originalité ou la nouveauté dans la manière de présenter les choses ; on enseignait sans doute beaucoup de bonnes choses, mais la plupart des maîtres se contentaient de développer la mémoire plutôt que la véritable compréhension des démonstrations. Ils considéraient les exercices ou les « déductions » comme au dessus des forces des jeunes gens.

Les constructions étaient très rarement faites avec de vrais instruments. La plus grande partie des jeunes gens n'étaient pas familiarisés avec les notions sur lesquelles ils étaient censés raisonner ; par exemple, il arrivait fréquemment de trouver un élève ayant lu tout le livre II d'Euclide (aire des rectangles) sans faire la distinction entre rectangle et angle droit (right angle).

17. — Le parti réformateur maintenait qu'une perception plus vivante des formes et des propriétés des figures géométriques était nécessaire avant que ces propriétés puissent être exposées logiquement avec profit. Il appréciait tout autant que les conservateurs l'éducation logique que peut fournir la Géométrie, mais il arguait que si la logique doit être plus qu'un mot, il faut premièrement être familiarisé avec le sujet.

Prenons comme exemple le théorème de Pythagore relatif aux carrés des côtés d'un triangle rectangle. L'ancienne méthode d'enseignement consistait à dire : Voici donc un fait remarquable. Nous voulons vous montrer qu'il est possible de partir des principes les plus simples, d'employer des arguments qui convaincront les plus ignorants et d'arriver finalement à ce résultat étonnant.

Les adeptes de la nouvelle école, tout en admettant la nécessité

et la valeur du moyen ci-dessus, maintenaient qu'il faut davantage. Il est, disaient-ils, non seulement nécessaire d'intéresser et de conquérir par la force de la logique pure, mais aussi d'inculquer l'art d'appliquer l'œuvre de la logique à de nouvelles conquêtes. Dans le cas du théorème de Pythagore le besoin d'une preuve logique ne se fait pas sentir jusqu'à ce que l'élève ait été convaincu par d'autres moyens que les faits sont bien tels qu'ils ont été énoncés. Il devra mesurer les côtés et calculer les carrés, il devra vérifier l'équivalence en découpant et superposant (et peut-être en pesant). De plus les faits ne devront pas être énoncés crûment comme une chose à vérifier. Ils devront plutôt être présentés de telle façon que l'élève ait l'occasion de penser par lui-même et d'anticiper ainsi les résultats. De toute façon il devra être encouragé à diriger plutôt qu'à suivre.

18. — La Géométrie était considérée comme étant un sujet propre à l'expérience. Pour expérimenter en Géométrie, un enfant doit apprendre à dessiner et mesurer avec une exactitude suffisante. Il peut faire aussi d'autres essais, par exemple en coupant et pliant du papier, en employant du papier quadrillé, du papier transparent, de la ficelle, des blocs de bois, etc. Mais il peut difficilement aller bien loin sans une habitude suffisante des instruments servant à dessiner. Il devra donc, en vue de ces exercices, avoir une règle graduée, un rapporteur (pour mesurer les angles), un compas, une équerre (pour dessiner les perpendiculaires et les parallèles).

Ces instruments lui seront utiles pour une autre raison encore. Un problème de construction n'a pas de signification s'il n'est pas spécifié quels sont les instruments autorisés. Le problème consistant à diviser un angle donné en 3 parties est possible s'il est permis de se servir d'une règle sur laquelle une longueur donnée peut être marquée. Mais le problème est impossible avec les instruments admis par Euclide. Les problèmes de construction ne peuvent donc être entrepris intelligemment sans que l'élève comprenne ces restrictions concernant les instruments et il est peu probable qu'il les comprenne à moins d'avoir manié et s'être servi des instruments autorisés.

De plus, l'usage des instruments géométriques satisfait les besoins d'activité physique de l'enfant. Il réfléchira mieux si ses doigts sont occupés. Des idées lui seront suggérées par l'action de dessiner des figures. Son attitude devient active au lieu de passive.

19. — De pareils arguments ont été employés pour justifier l'usage des instruments dans les écoles. On n'oublia naturellement pas que dans bien des professions le dessin géométrique à une valeur utilitaire, par exemple pour les ingénieurs, l'architecture, la navigation et les travaux militaires. Sous l'ancien système l'enseignement du dessin géométrique avait été séparé de l'étude

théorique de la Géométrie au détriment des deux études. Il était fréquemment enseigné comme une branche des beaux-arts plutôt que comme une branche des mathématiques. Il en résultait un respect exagéré pour le fini artistique et le lavis et, ce qui était plus grave, c'est que le dessin géométrique ne consistait qu'en une vaste collection de règles spéciales et sans relation entre elles; la valeur éducative du sujet était nulle.

20. — Les maîtres demandaient un système d'enseignement géométrique plus libre et plus expérimental, pensant qu'une familiarisation plus grande avec la Géométrie augmenterait sa valeur comme moyen d'éducation logique. D'un autre côté les ingénieurs et les autres critiques s'inquiétaient peu de l'éducation logique, mais désiraient vivement que leurs élèves eussent quelques connaissances géométriques, ce qui n'était évidemment pas le cas avec le système alors en vigueur.

21. — Quoique issu de points de vue différents le besoin d'un changement défini était trop pressant et unanime pour qu'on pût y résister. Les universités revisèrent leurs programmes d'examens. L'université de Cambridge donna le ton de la réforme : 1° en exigeant l'usage des instruments; 2° en acceptant toute preuve d'un théorème qui « paraîtrait aux examinateurs comme faisant partie d'un raisonnement systématique. » Elle publia une liste modeste de théorèmes et constructions qui devaient être considérés comme fondamentaux. Cette liste supprimait du traité d'Euclide quelques-unes des propositions les moins utiles et les moins intéressantes. Le second livre d'Euclide (aire des rectangles) fut reconnu inapte au raisonnement logique formel, des propositions principales furent introduites comme une « illustration géométrique des identités algébriques. »

Un pas important fut fait par l'introduction de « preuves seulement applicables à des grandeurs commensurables. » Le raisonnement d'Euclide pour les proportions est rigoureux et comprend toutes les grandeurs commensurables ou incommensurables. Il est du plus grand intérêt pour un étudiant avancé et pourrait convenablement figurer dans un cours d'université, bien qu'une méthode plus moderne dans l'usage des incommensurables serait sans doute préférable. Mais la théorie d'Euclide était une pierre d'achoppement pour les commençants, et la façon dont elle était généralement enseignée dans les écoles anglaises était incompréhensible, le livre V étant toujours supprimé. L'université décida que la théorie des figures semblables pouvait être étudiée dans les écoles sans s'attaquer prématurément à la théorie beaucoup plus difficile des incommensurables.

Des constructions hypothétiques furent permises; par exemple pour prouver l'égalité des angles adjacents à la base d'un triangle isocèle, on considéra comme légitime d'employer la bissec-

trice de l'angle au sommet, alors même que la construction de cette bissectrice par la règle et le compas n'avait pas encore été donnée et prouvée à ce moment. On admet de fait le théorème d'existence qu'un angle a une bissectrice. Le choix d'une méthode particulière pour tracer la bissectrice n'est pas considéré comme faisant partie de la discussion.

22. — Le changement de règlement donna libre cours à une grande quantité d'énergie latente. Tous les enthousiastes sentirent qu'ils pouvaient enseigner la Géométrie à leur façon. Il parut un grand nombre de manuels représentant toutes les nuances d'opinion. Comme on pouvait s'y attendre, bien des nouveaux développements furent extravagants et n'eurent pas de durée. Il y eut pendant un temps une tendance à surenchérir sur le côté pratique et expérimental. Mais on comprit vite que cela ôterait toute consistance au sujet. Il doit y avoir un certain élément de sérieux dans toute branche d'étude et au point de vue de l'éducation générale la Géométrie vivra ou tombera suivant son influence sur l'éducation logique. Les plus usités des nouveaux manuels ne différèrent pas de celui d'Euclide dans leur manière d'exposer et de réunir les théorèmes. Quant à la partie expérimentale certains livres la restreignirent à une introduction, tandis que d'autres préférèrent développer les expériences et la théorie simultanément. Dans tous les cas les constructions devaient être faites avec des instruments ; on eut largement recours aux données numériques et à des exemples variés. En ce qui concerne la succession des théorèmes aucun système qui puisse être appelé révolutionnaire n'a obtenu la faveur générale ; il n'y a pas eu de séparation radicale avec la tradition euclidienne. Les divers auteurs diffèrent d'Euclide : 1° Par un nouvel arrangement des premiers théorèmes soit dans l'ordre suivant : angles en un point, lignes parallèles, angles des triangles et polygones, triangles semblables. 2° Par les théorèmes relatifs à l'aire des triangles, parallélogrammes et polygones présentés plutôt sous l'aspect de règles de mesure que de théorèmes géométriques.

23. — Quant à l'effet de tous ces changements sur l'éducation, il est peut-être trop tôt encore pour conclure. Nous sommes encore dans la période transitoire. Sans doute les jeunes gens trouvent la Géométrie beaucoup plus intéressante qu'autrefois. Ils ont plus d'habileté pour résoudre les exercices et ne la considèrent plus comme une entreprise sans but. Ils sont capables de mieux *voir* un dessin géométrique. Ils ont acquis de l'assurance et peuvent être facilement poussés à entreprendre de petites recherches pour eux-mêmes ; ils font par exemple des levés de plans, etc., et inventent des modèles mécaniques pour illustrer divers points.

D'autre part on peut donner beaucoup moins de temps à écrire des raisonnements formels et il y a quelque raison de penser que

les jeunes gens ont perdu quelque chose de leur facilité à exprimer le raisonnement géométrique en mots. C'est un déficit qui se corrigera avec le temps et il vaut peut-être tout autant que le langage euclidien type fasse place à une expression plus individuelle, même au prix d'une diminution dans la précision de l'expression. Il paraissait un moment à craindre que les vérifications expérimentales ne fussent prises comme des preuves, mais la distinction a été si souvent répétée que probablement ce reproche ne peut plus être fait aux nouvelles méthodes.

24. — Géométrie a trois dimensions. La place de cette branche dans les écoles n'est pas encore satisfaisante. Elle ne fait pas encore partie de la Géométrie demandée dans les examens préliminaires d'Oxford et de Cambridge, ce qui ne veut pas dire qu'il serait avantageux de la comprendre dans ces programmes.

Quand un jeune homme a parcouru le cours élémentaire de Géométrie plane, il est censé avoir reçu une éducation suffisante dans les méthodes logiques, pour autant que celle-ci peut être donnée par des études de Géométrie. S'il s'attaque à la Géométrie à trois dimensions (géométrie des solides), son but principal doit être d'acquérir la faculté de réaliser mentalement les relations des figures dans l'espace ; il doit apprendre à « penser dans l'espace.» Parmi les jeunes gens qui étudiaient le livre XI d'Euclide bien peu arrivaient à acquérir cette faculté ; c'est pourquoi on ne peut guère regretter que ce livre ne soit, pour ainsi dire, pas lu dans les écoles.

Pendant des années, des tentatives furent faites par le Département des Sciences et des Arts (maintenant fondu avec le *Board of Education*), pour encourager l'étude de la Géométrie des solides. Des examens publics furent établis pour la Géométrie appelée « Géométrie descriptive [1], » par exemple : La représentation des solides au moyen du plan et de l'élévation et des projections perspectives. Les mêmes jurés examinaient le dessin géométrique dans le plan, et le système d'examen avait malheureusement fini par réduire les deux études à un simple amoncellement de procédés spéciaux, souvent enseignés par des maîtres qui n'avaient pas reçu d'instruction mathématique. Les tentatives échouèrent. L'effet sur les écoles publiques fut nul, ces écoles ne se servant pas des examens du Département.

25. — Un cours satisfaisant de Géométrie à trois dimensions devrait comprendre :

(1) La détermination des surfaces et volumes des solides élémentaires.

(2) La discussion des relations des points, des lignes et des

[1] C'est la « Géométrie descriptive » de Monge, qu'il ne faut pas confondre avec la Géométrie projective ou non métrique de Chasles et d'autres auteurs.

plans dans l'espace. Ceci sans s'attacher à la forme devrait être comparativement simple et illustré par toute sorte de moyens tels que des modèles en carton ou en fil, des vues stéréoscopiques, des ossatures de solides, etc., et être intercalé incidemment dans le cours de Géométrie plane ; par exemple, quand on expose les lignes parallèles et perpendiculaires dans le plan il serait avantageux de discuter les lignes et les plans parallèles et perpendiculaires dans l'espace. En réalité, la première étude de la Géométrie ne devrait-elle pas commencer par s'occuper de solides concrets, pour passer ensuite à des abstractions comme le point et la ligne ?

3) Un cours des constructions réellement fondamentales en Géométrie descriptive. Probablement que si ce cours était donné intelligemment il ferait plus que tout autre pour développer la faculté de voir dans l'espace.

Il n'existe aucun cours accepté ou donné comme exemple qui réponde à ces conditions. Les maîtres de mathématiques formés par l'enseignement universitaire ignorent généralement absolument la Géométrie descriptive. Ce reproche disparaîtra graduellement, puisque la Géométrie descriptive est exigée dans les nouveaux cours pour l'obtention de grades à Cambridge ; en attendant il faut espérer que ce sujet fera peu à peu son chemin dans les écoles publiques.

IV. — Algèbre.

26.— La réforme dans l'enseignement de la Géométrie fut accompagnée d'une certaine activité en ce qui concerne l'Algèbre. Bien des maîtres et des examinateurs trouvaient que l'enseignement avait donné une trop grande importance aux exercices pratiques au détriment de l'étude intelligente du pourquoi et des causes. On employait certainement beaucoup de temps à résoudre de longues séries d'exercices gradués sur les facteurs, les équations, les fractions, etc. Il y eut une sorte de rébellion contre cette coutume, et les maîtres essayèrent de faciliter le travail en introduisant relativement de bonne heure des graphiques, des tables de logarithmes et d'autres choses intéressantes.

Tout ceci eut un effet stimulant. C'est une révélation pour un élève d'apprendre qu'une fonction d'une variable peut être associée à une courbe ; qu'il peut résoudre des équations, extraire des racines, etc., par des méthodes graphiques.

Comme toujours la réforme alla trop loin. Certains maîtres et certains manuels ne se contentèrent pas de considérer en passant les graphiques, si suggestifs pour un garçon de 13 ans, ils développèrent le sujet jusqu'à empiéter prématurément sur la Géométrie analytique. Il y eut une certaine tendance à abandonner les

méthodes analytiques pour les méthodes géométriques et graphiques. La résolution laborieuse des exercices d'Algèbre fut de plus en plus écourtée, de sorte qu'il fut à craindre que les jeunes gens ne devinssent incapables d'employer les expressions algébriques les plus simples.

Le balancier penche maintenant dans la direction opposée. Si ses oscillations peuvent être modérées à temps, on parviendra à obtenir un système qui donnera une habitude suffisante des applications directes et en même temps donnera à la partie graphique la place qu'elle doit occuper dans l'enseignement élémentaire.

27. — Pour parler franchement, il n'est pas facile de déterminer le rôle exact de l'enseignement de l'Algèbre dans l'éducation secondaire. On peut admettre que la conception de l'Algèbre comme généralisation de l'Arithmétique est d'une grande valeur éducative. Lorsqu'un garçon est amené à voir qu'une seule formule algébrique est une sorte de porte-manteaux auquel viennent se rattacher un nombre infini de données arithmétiques, il aura acquis l'une des idées les plus fertiles que l'éducation mathématique puisse lui donner. Cela seul peut justifier l'enseignement de l'Algèbre et ce but peut être atteint sans donner beaucoup de temps à des exercices pratiques.

Ce qui précède est un exemple de ce qu'on peut appeler les *idées* de l'Algèbre. Tout le monde se trouvera bien d'avoir acquis ces idées. La majorité des jeunes gens des écoles publiques n'auront pas l'occasion plus tard, dans leur vie, de se servir des mathématiques qu'ils ont apprises à l'école : on serait tenté de croire que pour cette classe nombreuse de jeunes gens il suffirait des *idées* jointes au minimum d'exercices nécessaires pour les rendre intelligibles.

Il en est autrement au contraire pour ceux qui doivent plus tard se *servir* des mathématiques. Pour eux, l'Algèbre est un instrument indispensable. S'ils n'ont pas de facilité à manier les expressions algébriques, leur chemin sera épineux. Ils ne peuvent pas éviter le travail pénible de résolution des exercices ; et pour le mathématicien, comme pour le musicien, l'habileté est la récompense d'une longue et patiente pratique, pratique qui a peut-être peu de valeur par elle-même, mais est seulement désirable pour le but en vue.

La distinction ci-dessus entre l'amateur et l'étudiant professionnel de l'Algèbre est peut-être sans importance en Angleterre, étant donné que le but de l'éducation anglaise est en somme de passer des examens. Les examens mettent en jeu l'habileté ; mais non les idées. Il s'en suit que tous les jeunes gens anglais reçoivent l'enseignement comme s'ils étaient destinés à se servir plus tard des mathématiques.

V. — Trigonométrie.

28. — Trigonométrie plane. Ce sujet est actuellement introduit de bonne heure dans bien des écoles, soit entre 13 et 15 ans.

Il est convenu que tous les écoliers doivent pouvoir apprendre de la Trigonométrie comme développement de la Géométrie.

Cette introduction précoce est devenue possible grâce à l'habitude d'insister sur la Trigonométrie numérique. Un cours d'introduction de Trigonométrie numérique comprend : le sinus, le cosinus, la tangente des angles aigus, la détermination graphique de ces fonctions, l'usage des tables, la résolution des triangles rectangles et des problèmes pratiques qui en dépendent ; ceci étant en étroite relation avec le dessin à l'échelle qui fait maintenant partie de l'enseignement de la Géométrie. Les autres triangles sont résolus en les décomposant en triangles rectangles.

Traités de cette façon, les commencements de la Trigonométrie ne présentent pas de difficulté. La possibilité d'exécuter le travail à cette période semble dépendre de :

1° Une progression très graduelle et l'exposition des difficultés les unes après les autres, car l'usage, par exemple, des sinus logarithmiques à cette période amènerait de la confusion.

2° L'ajournement de ce que l'on peut appeler la Trigonométrie algébrique, soit par exemple les transformations d'expressions contenant les fonctions trigonométriques.

La résolution des problèmes pratiques est souvent basée sur des observations faites par les élèves avec un théodolite simplifié.

Quand les éléments ont été complètement digérés, on trouve que les progrès sur les sujets ordinaires sont normaux.

VI. — Mécanique.

29. — La Mécanique se borne à la *Statique* et la *Cinématique*. Il n'y a pas de règle uniforme sur ce qui doit être traité en premier. La tendance graphique des dernières années tend cependant à placer la Statique en premier lieu.

La meilleure méthode pour l'étude de la Statique est basée, aujourd'hui, sur un cours expérimental donné dans le laboratoire ou atelier mathématique. Là, l'élève établit le parallélogramme des forces, les lois des moments, du frottement, etc. ; et il apprend à faire les expériences sur des machines simples variées. Ensuite, ou en même temps, il suit un cours de Statique graphique, qui est graduellement combinée avec le raisonnement analytique pour lequel la Trigonométrie l'a préparé. Tout ceci peut être fait à l'âge de 15 à 16 ans.

Si cette méthode est adoptée, la Cinématique vient ensuite. Il

n'est pas facile d'organiser des travaux expérimentaux sur ce sujet, et l'enseignement est presque purement théorique. L'élève de force moyenne trouve la Cinématique beaucoup plus difficile que la Statique, et peut-être la Trigonométrie et la Statique formeront-elles pendant un certain temps la limite des études mathématiques de la plupart des jeunes gens d'une école publique.

VII. — Eléments de mathématiques supérieures.

30.— Les jeunes gens qui ont l'intention de continuer les études mathématiques à l'université doivent travailler les sujets suivants : Géométrie moderne, Géométrie analytique, Géométrie des sections coniques au point de vue géométrique et analytique, Algèbre supérieure, Trigonométrie, Mécanique, Calcul différentiel et intégral.

Géométrie moderne, comprenant la Géométrie du triangle, les propriétés des pôles et polaires, l'inversion, les projections orthogonales et coniques, etc.

Les coniques sont un sujet auquel on a donné une importance peut-être exagérée dans les écoles anglaises. C'est sans doute dû au fait que Newton avait été forcé de mettre son principe sous une forme géométrique, ses contemporains étant incapables d'apprécier la méthode des « fluxions » par laquelle il était arrivé à ses résultats.

Géométrie analytique, principalement de la droite, du cercle et des sections coniques. Ici encore les sections coniques ont une large part ; elles sont étudiées avec beaucoup de détails, et l'élève atteindra une grande habitude dans le maniement de méthodes comme celle des coordonnées trilinéaires par exemple. La tendance moderne cherche à réduire à sa vraie proportion l'étude (analytique et géométrique) des sections coniques et de consacrer plus de temps aux méthodes plus fructueuses de l'Analyse.

Algèbre supérieure, soit : un ensemble hétéroclite et antiscientifique, comprenant la sommation et la convergence des séries, les fractions continues, la théorie des nombres, les inégalités, les probabilités, la théorie des équations, etc. La nomenclature des sujets serait alarmante, si on n'expliquait pas qu'il ne s'agit que de l'étude de propositions élémentaires et isolées.

Trigonométrie supérieure. Espèce d'Algèbre généralement classée par les maîtres d'école comme un sujet à part. Les nombres complexes y font leur première apparition. Les jeunes gens trouvent ce premier travail très attrayant. Plus tard, l'étude des séries et des produits infinis devient laborieuse et bien des maîtres pensent que sous la pression des examens on donne trop d'importance à cette partie.

Calcul différentiel et intégral. Il était autrefois considéré

comme le point culminant des mathématiques à l'école. Mais il y a un fort courant, aujourd'hui, en faveur d'un usage précoce de ce calcul. On n'a pas encore précisé à quel moment il peut être commencé, mais il est prouvé qu'une connaissance minime de différentiation et d'intégration simplifie et généralise l'étude de la Géométrie analytique et de la Cinématique, sujets auxquels la tradition assigne un rang antérieur.

C. Godfrey Osborne.

SUR LES CONGRUENCES DU TROISIÈME DEGRÉ

---

§ 1. — A propos d'un livre récent de M. G. Arnoux[1], M. D. Mirimanoff[2] a présenté aux lecteurs de ce journal quelques observations sur les congruences du troisième degré et les conditions de leur résolubilité. On sait que la détermination effective des racines d'une congruence binôme s'effectue le plus souvent en calculant, dans la série des puissances de la base, un terme dont le rang est assigné par les propositions les plus simples de la théorie des nombres. Comme on peut, par une transformation linéaire, ramener l'équation du troisième degré à la forme cubique pure, on doit présumer que cette même méthode, convenablement modifiée, permettra non-seulement de discerner les cas de résolubilité de la congruence cubique, mais encore d'en trouver les racines au moins dans la majeure partie des cas. En développant cette idée, on reconnaît aisément que la théorie des congruences du troisième degré peut être rattachée à celle des suites récurrentes du second ordre à échelle de relation constante; la résolution se fait alors suivant une marche de tout point comparable à celle donnée par Gauss pour les congruences du deuxième degré.

Un ancien mémoire de G. Oltramare[3] contient dans cette

---

[1] *Arithmétique graphique. Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques.* Paris, 1906.
[2] *L'Enseign. Math.*, 1907, p. 381-384.
[3] *Journ. de Crelle*, 1853, t. 45, p. 316.

direction d'intéressants essais et un grand nombre de résultats particuliers. Mais cet auteur ne me semble pas avoir porté la méthode au degré de précision et de simplicité qu'elle doit recevoir pour devenir vraiment applicable, et ses théorèmes sont restés peu connus. On me permettra donc de revenir sur cette question après l'article de M. Mirimanoff auquel celui-ci servira de complément. Les résultats précédemment énoncés se présenteront d'ailleurs à nous d'une manière toute naturelle.

§ 2. — Commençons par rappeler succinctement les principales propriétés algébriques et numériques des récurrences du second ordre.

Soient r et s deux nombres entiers premiers entre eux, a et b les racines de l'équation $\omega^2 - r\omega - s = 0$ donnant

$$a + b = r\,, \quad \text{et} \quad ab = -s\,.$$

Nous supposons a et b inégaux, ou le discriminant

$$r^2 + 4s = (a - b)^2 \neq 0\,.$$

La récurrence est définie par les termes initiaux u_0, u_1, et par la loi de formation des suivants

$$u_{n+1} = ru_n + su_{n-1}\,.$$

On sait que toutes les solutions de cette equation aux différences sont linéairement composées avec deux quelconques d'entre elles ; nous choisirons pour celles-ci les suivantes

$$x_n = a^n + b^n\,, \quad \text{et} \quad y_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}\,,$$

correspondant aux valeurs initiales $x_0 = 2$, $x_1 = r$, et $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. La seconde nous servira presque seule ; la récurrence correspondante 0, 1, r, $r^2 + s$, ... sera souvent représentée par la notation $[r, s]$. La première solution se ramène d'ailleurs immédiatement à la seconde à cause de la relation $x_n y_n = y_{2n}$.

L'identité

$$(a^{m+1} - b^{m+1})(a^n - b^n) - ab(a^m - b^m)(a^{n-1} - b^{n-1}) = (a - b)(a^{m+n} - b^{m+n})\,,$$

donne la propriété fondamentale

$$y_{m+n} = y_{m+1} y_n - ab y_m y_{n-1}, \tag{1}$$

$$= y_m y_{n+1} - ab y_n y_{m-1}. \tag{2}$$

En y faisant $m = 2$, on retrouve la récurrence de définition

$$y_{n+2} = (a+b) y_{n+1} - ab y_n ;$$

de même, si l'on pose $m = n$ ou $m = n + 1$, on aura les formules de duplication

$$y_{2n} = y_n (2y_{n+1} - (a+b) y_n), \tag{3}$$

$$y_{2n+1} = y_{n+1}^2 - ab y_n^2, \tag{4}$$

dont la première s'écrit aussi

$$x_n = y_{n+1} - ab y_{n-1}.$$

Par la même voie on obtiendra les formules de triplication qu'il convient de remarquer à cause de leur rapport avec les congruences du troisième degré ; ce sont

$$y_{3n} = (a^2 + ab + b^2) y_n^3 - 3(a+b) y_n^2 y_{n+1} + 3 y_n y_{n+1}^2, \tag{5}$$

$$y_{3n+1} = y_{n+1}^3 - 3ab y_{n+1} y_n^2 + ab(a+b) y_n^3, \tag{6}$$

$$y_{3n+2} = a^2 b^2 y_n^3 - 3ab y_n y_{n+1}^2 + (a+b) y_{n+1}^3. \tag{7}$$

Observons enfin que l'ensemble des quantités $z_n = y_{pn+q}$, où p et q désignent des paramètres fixes, tandis que n parcourt toute la série des valeurs entières 0, 1, 2, ... , autrement dit la suite des quantités y prises de p en p à partir de y_q, forme une nouvelle récurrence du second ordre dans laquelle les quantités a^p et b^p jouent le rôle assigné précédemment à a et b eux-mêmes. En particulier, la série

$$y_0, \ y_p, \ y_{2p}, \ \dots \ y_{np}, \ \dots$$

dont tous les termes sont divisibles par y_p, a pour terme général

$$y_{np} = \frac{a^{np} - b^{np}}{a - b} = \frac{a^p - b^p}{a - b} \, \frac{a^{np} - b^{np}}{a^p - b^p} = y_p \, Y_n.$$

Cette suite Y_0, Y_1, ... avec les valeurs initiales $Y_0 = 0$, $Y_1 = 1$, n'est autre que la récurrence $[a^p + b^p, - a^p b^p]$. Si D est le discriminant de cette récurrence, d celui de la suite primitive $[a + b, - ab]$, on a

$$D = (a^p - b^p)^2 \qquad d = (a - b)^2 ,$$

et par conséquent

$$D = dy_p^2 .$$

§ 3. — Passons maintenant aux propriétés arithmétiques des quantités y_n, et rappelons que les nombres $r = a + b$, et $s = - ab$, ont été supposés premiers entre eux.

Dans cette hypothèse tous les y_n sont premiers avec ab. Car x_{n-1} étant entier, on voit par l'équation

$$x_{n-1} = y_n - aby_{n-2}$$

que tout facteur commun à y_n et ab diviserait aussi x_{n-1}. Or

$$x_{n-1} = a^{n-1} + b^{n-1} = (a + b)^{n-1} - abE ,$$

E désignant un entier. Le facteur commun supposé ne saurait donc être premier avec $(a + b)$, ce qui implique contradiction.

En second lieu, deux y_n consécutifs tels que y_n, y_{n+1}, sont premiers entre eux.

Car, puisque

$$y_{n+1} = (a + b)y_n - aby_{n-1} ,$$

tout facteur commun à ces deux quantités, étant premier avec ab, devrait diviser y_{n-1}, et ainsi de suite en rétrogradant jusqu'à $y_1 = 1$.

Grâce à cette double propriété la détermination des diviseurs communs à deux nombres y_m, y_n n'offre aucune difficulté ; nous allons voir que, θ désignant le plus grand commun diviseur entre m et n, y_θ sera celui de y_m et y_n.

En effet, en vertu des égalités

$$\begin{aligned} y_{m+n} &= y_{n+1}y_m - aby_ny_{m-1} , \\ y_m &= y_{m-n+1}y_n - aby_{m-n}y_{n-1} , \end{aligned}$$

on voit que tout facteur commun à y_m et y_n divisera y_{m+n} et y_{m-n}, donc aussi $y_{m\alpha-n\beta}$. α et β étant deux arbitraires. On sait que ces dernières peuvent être choisies de manière que $m\alpha - n\beta = \theta$. En outre y_θ est diviseur de y_m et de y_n ; c'est donc bien le plus grand commun diviseur cherché.

Déterminons, en troisième lieu, la forme des facteurs premiers l des y_n. Observons que $\sqrt{d} = a - b$ est, en général, une irrationnelle algébrique qui disparaît de la formule

$$y_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1} . \qquad (8)$$

Rien n'empêche dès lors, quand on cherche le reste de y_n selon le module l, de supprimer dans les expressions a^n ou b^n les termes, même irrationnels, qui contiennent le module en facteur. En d'autres termes, si a et a' sont deux entiers algébriques du domaine $\sqrt{d}$, quand $a' \equiv a$, on a aussi $a'^n \equiv a^n$.

Distinguons plusieurs cas et remarquons qu'aucun des facteurs l cherchés ne peut diviser ab, comme on a vu plus haut; ainsi aucun des nombres a et b ne peut être divisible par l.

1° Si l est diviseur du discriminant, on a $a \equiv b \equiv \frac{r}{2}$; par suite, le second membre de l'équation (8) donne

$$y_l \equiv 0 , \qquad (\text{mod } l)$$

et de même, comme on voit aisément,

$$y_{l^\nu} \equiv 0 \quad \text{et} \quad y_{l^\nu m} \equiv 0 . \qquad (\text{mod } l^\nu)$$

2° Si d est résidu quadratique de l, a et b sont réels (mod l), différents entre eux, et tous deux différents de zéro. On a donc

$$a^{l-1} \equiv b^{l-1} \equiv 1 ,$$

par suite

$$y_{l-1} \equiv 0 . \qquad (\text{mod } l)$$

3° Si d est non-résidu quadratique, a et b sont des imaginaires de Galois dans le domaine $\sqrt{N}$, N désignant un non-résidu quelconque. Comme a et b sont conjugués

$$a = m + n\sqrt{N} \qquad b = m - n\sqrt{N} .$$

on aura

$$a^l \equiv m^l + n^l N^{\frac{l-1}{2}} \sqrt{N} \equiv b$$

et de même $b^l \equiv a$. Donc $a^{l+1} \equiv b^{l+1} \equiv ab$, par suite

$$y_{l+1} \equiv 0 . \qquad \pmod{l}$$

De là résultent deux propriétés fondamentales.

Si M est un module quelconque, premier avec ab, et décomposé en ses facteurs premiers sous la forme

$$M = l^\lambda l'^{\lambda'} l''^{\lambda''} \dots ,$$

il existera toujours des y_n admettant M comme diviseur.

On aura par exemple $y_n \equiv 0 \pmod{M}$, si $n = \psi(M)$, avec

$$\psi(M) = l^{\lambda-1} l'^{\lambda'-1} \dots (l + \varepsilon)(l' + \varepsilon') \dots ;$$

on pose $\varepsilon = 0, -1$, ou $+1$ selon que d est multiple de l, résidu quadratique, ou non-résidu de l ; autrement dit

$$-\varepsilon = \left(\frac{d}{l}\right) .$$

Le fait a été déjà établi plus haut pour $\varepsilon = 0$, puisque dans ce cas $\psi(M)$ est divisible par l^λ et y_n aussi. Si $\varepsilon = \mp 1$, on posera $\psi(M) = (l \mp 1) M'$, et $y_n = y_{l\mp1} Y_{M'}$. Or le discriminant D de la récurrence $Y_{M'}$, étant égal à $dy^2_{l\mp1}$, sera divisible par l, puisque $y_{l\mp1}$ est divisible : donc $Y_{M'}$ sera divisible par $l^{\lambda-1}$, comme on vient de le voir, et y_n le sera par l^λ. On prouverait de même la divisibilité par $l'^{\lambda'}$, $l''^{\lambda''} \dots$

Si on nomme, en second lieu, diviseurs *propres* de y_n ceux qui n'appartiennent à aucun nombre $y_{n'}$ d'indice inférieur à n, il est facile de constater que tous les facteurs premiers propres de y_n sont contenus dans la formule

$$l = np \pm 1 , \qquad (9)$$

le signe étant $+$ ou $-$ selon que d est ou n'est pas résidu quadratique de l.

En effet on a, par supposition, $y_n \equiv 0 \pmod{l}$, mais aussi

$y_{l\mp1} \equiv 0$, et si $l \mp 1$ n'était pas divisible par n, on aurait $y_\theta \equiv 0$, pour un nombre $\theta < n$, à savoir le plus grand commun diviseur de n et $l \mp 1$. La démonstration n'est évidemment pas valable pour les facteurs premiers diviseurs du discriminant ; un tel nombre l est diviseur propre de y_l.

J'ajoute qu'on pourra, dans la recherche des facteurs premiers, limiter souvent les essais exigés par la formule (9). Si, par exemple, l'indice n est impair, la formule de duplication

$$y_{2m+1} = y_{m+1}^2 - aby_m^2 ,$$

montre que les facteurs cherchés admettent ab comme résidu quadratique ; on exclura tous ceux qui ne vérifieraient pas cette condition supplémentaire.

Observons enfin que si on a $y_n \equiv 0 \pmod{l}$, on aura à cause de (2)

$$y_{pn+q} \equiv y_{n+1}^p y_q ,$$

et par conséquent

$$y_{pn+q} : y_{pn+q'} \equiv y_q : y_{q'} . \qquad \pmod{l}.$$

§ 4. — Après ces préliminaires, qui ne sont pas indispensables mais jettent une vive clarté sur ce qui suit, venons à la congruence du troisième degré

$$x^3 + px + q \equiv 0 . \qquad (\text{mod } l > 3).$$

Nous adopterons, pour la résoudre, une marche analogue à celle qui donne en Algèbre la racine de l'équation cubique et conduit à la formule de Cardan. Parmi les différentes manières d'obtenir cette dernière, prenons la suivante.

J'écris la proposée sous la forme

$$x^3 - 3abx + ab(a + b) \equiv 0 , \qquad \pmod{l} \quad (10)$$

en déterminant a et b par la résolvante

$$z^2 + \frac{3q}{p} z - \frac{p}{3} \equiv 0 , \qquad \pmod{l} \quad (11)$$

dont il est aisé de trouver la relation avec les fonctions cycliques. Si x_0, x_1, x_2 représentent trois racines hypothé-

tiques de (10), et α une racine de $\alpha^2 + \alpha + 1 \equiv 0 \pmod{l}$, on trouve en effet facilement

$$z \equiv \frac{(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2)^3}{9p} . \qquad (12)$$

Les relations entre les racines et les coefficients de (11) donnent encore

$$ab \equiv -\frac{p}{3}, \qquad a + b \equiv -\frac{3q}{p}, \qquad (a-b)^2 \equiv \frac{4p^3 + 27q^2}{3p^2} .$$

Nous exclurons le cas où la proposée serait binôme, ou p divisible par l. Si $4p^3 + 27q^2 = \Delta$ était divisible par l, on voit que a et b seraient congrus entre eux, chacun d'eux valant $-\frac{3q}{2p} \pmod{l}$. Mais alors la congruence proposée admettrait cette même racine, car on a,

$$a^3 + pa + q \equiv a^3 - 3a^2b + ab(a+b) \equiv a(a-b)^2 \equiv 0 ,$$
$$b^3 + pb + q \equiv b^3 - 3b^2a + ab(a+b) \equiv b(a-b)^2 \equiv 0 .$$

La dite racine fonctionne, en outre, comme racine double, et ce cas est le seul où la congruence puisse posséder une racine multiple, ainsi qu'on le démontre immédiatement.

Nous le laisserons encore de côté; il ne reste dès lors plus que deux éventualités. Si 3Δ est résidu quadratique de l, a et b sont réels et distincts; si 3Δ est non-résidu, ce sont des imaginaires congruentielles dans le domaine $\sqrt{\mathrm{N}}$; dans ce dernier cas nous élargissons le problème en essayant de résoudre la congruence dans le même domaine de rationalité. Remarquons que, quelle que soit la nature de a et b, les quantités $a + b$ ou $-\frac{3q}{p}$, ab ou $-\frac{p}{3}$, peuvent toujours être supposées entières et sans facteurs communs, puisque, r et s étant deux de leurs valeurs (mod l), la suite linéaire $r + ml$, qui est l'expression générale de la première d'entre elles, contient une infinité de nombres premiers. Nous admettrons donc constamment que r et s sont premiers entre eux.

Cela posé, et x désignant toujours une racine de (10), qui ne saurait être ni a ni b, posons

$$y \equiv \frac{x-a}{x-b}, \qquad \text{ou} \qquad x \equiv \frac{a - by}{1-y},$$

substitution qui transforme la proposée en

$$\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta \equiv 0\,,$$

avec les valeurs suivantes des coefficients

$$\begin{aligned}
\alpha &= -(b^3 + pb + q) = -b(a-b)^2\,,\\
\delta &= \quad a^3 + pa + q = \quad a(a-b)^2\,,\\
\gamma &= -3a^2b + 3ab(b+2a) - 3ab(a+b) = 0\,,\\
\beta &= \quad 3ab^2 - 3ab(a+2b) + 3ab(a+b) = 0\,.
\end{aligned}$$

La transformée est donc simplement

$$y^3 \equiv \frac{a}{b}\,, \qquad (\text{mod } l)$$

et sa résolution formelle donne pour x la valeur

$$x \equiv -(ab)^{1/3}(a^{1/3} + b^{1/3})\,, \qquad (\text{mod } l)$$

dans laquelle on reconnaît la formule de Cardan. Il est, du reste, préférable de prendre pour la solution l'ensemble des formules

$$x \equiv \frac{a - by}{1 - y} \qquad \text{et} \qquad y^3 \equiv \frac{a}{b}\,.$$

Nous poserons, pour abréger, $A = \frac{a}{b}$, et nous distinguerons maintenant quatre cas.

Premier cas. — Le module l est de la forme $3m - 1$, 3Δ en est résidu quadratique, A est réel. Alors, de la condition $y^{3m-2} \equiv 1$ et de la congruence $y^3 \equiv \frac{a}{b}$, on tire

$$y \equiv \left(\frac{b}{a}\right)^{m-1}\,,$$

puis, pour la seule racine de la proposée,

$$x \equiv \frac{a^m - b^m}{a^{m-1} - b^{m-1}} \equiv \frac{y_m}{y_{m-1}}\,.$$

La suite auxiliaire $y_0, y_1, \ldots$ est formée avec l'échelle de relation $[a + b, -ab]$; on le voit, pour résoudre (10), il sera inutile de calculer a et b. La formule de triplication (6) permet d'ailleurs de vérifier immédiatement le résultat qu'on vient d'obtenir.

Soit, comme exemple, à résoudre la congruence

$$x^3 - 3x + 3 \equiv 0 . \qquad \pmod{521}$$

On a ici $(a - b)^2 = 5$ et $\left(\frac{5}{521}\right) = 1$; ainsi la congruence n'a qu'une racine, qui vaut $x \equiv \frac{y_{174}}{y_{173}}$, la récurrence ayant comme échelle de relation [3, — 1]. On peut écrire aussi $x \equiv \frac{y_{348}}{y_{346}}$ les y étant calculés maintenant suivant la récurrence de Fibonacci [1, 1]. Dans cette dernière supposition, on a, comme on voit aisément, $y_{26} \equiv 0 \pmod{521}$, et en employant la réduction mentionnée à la fin du § 3, on obtient

$$x \equiv \frac{y_{348}}{y_{346}} \equiv \frac{y_{10}}{y_8} \equiv \frac{55}{21} \equiv 474 .$$

Comme second exemple, considérons la congruence

$$x^3 + 3x - p \equiv 0 ; \qquad (\text{mod } l = 3m - 1)$$

on suppose toujours $\left(\frac{p^2 + 4}{l}\right) = 1$, et on a

$$ab \equiv -1 \qquad a + b \equiv p \qquad (a - b)^2 \equiv p^2 + 4 ,$$

d'où l'on conclut, m étant pair et $m - 1$ impair,

$$a^{3m} - b^{3m} \equiv (a^m - b^m)^3 + 3(a^m - b^m) ,$$

$$a^{3m-3} - b^{3m-3} \equiv (a^{m-1} - b^{m-1})^3 - 3(a^{m-1} - b^{m-1}) ,$$

ou

$$y_{3m} \equiv (a - b)^2 y_m^3 + 3y_m ,$$

$$y_{3m-3} \equiv (a - b)^2 y_{m-1}^3 - 3y_{m-1} .$$

Mais, par suite des propriétés de divisibilité, $y_{3m-3} \equiv 1$, $y_{3m-2} \equiv 0$, $y_{3m-1} \equiv 1$, $y_{3m} \equiv p$ et enfin $x \equiv \frac{y_m}{y_{m-1}}$. On obtient ainsi le théorème que voici.

Si p est un entier tel que $p^2 + 4$ soit résidu d'un nombre premier $l = 3m - 1$, chacune des congruences

$$x^3 + 3x - p \equiv 0 ,$$

$$(p^2 + 4)y^3 + 3y - p \equiv 0 ,$$

$$(p^2 + 4)z^3 - 3z - 1 \equiv 0 ,$$

admet une seule racine (mod l), et l'on a entre ces trois racines la relation $y \equiv xz$. On prouvera, au reste, facilement que ces trois congruences se transforment l'une dans l'autre par substitution linéaire.

Deuxième cas. — Le module l est de la forme $3m + 1$, et 3Δ en est résidu quadratique, $\left(\frac{3\Delta}{l}\right) = 1$; a et b sont de nouveau réels ainsi que leur quotient A. Ce dernier devant être résidu cubique, la congruence ne sera résoluble que si $A^m \equiv 1$, autrement dit si le nombre y_m de la récurrence auxiliaire $[a + b, -ab]$ est $\equiv 0$. Quand cette condition est satisfaite, y a trois valeurs qui se suivent cycliquement, et la proposée aura trois racines.

Supposons que m ne soit pas divisible par 3, ou plus généralement, que l'indice n auquel appartient A (mod l) soit de l'une des deux formes $n = 3\mu \mp 1$, l'identité

$$A^{3\mu} \equiv A \qquad \text{ou} \qquad A^{-3\mu} \equiv A$$

montre qu'une des valeurs de y sera, selon le cas,

$$y \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^{\mu}, \qquad \text{ou} \qquad y \equiv \left(\frac{b}{a}\right)^{\mu}.$$

Quant à x, une des trois valeurs qu'il peut prendre, sera en conséquence

$$n = 3\mu - 1 \qquad x \equiv ab\,\frac{y_{\mu-1}}{y_{\mu}} \equiv \frac{y_{2\mu}}{y_{2\mu-1}},$$

$$n = 3\mu + 1 \qquad x \equiv \frac{y_{\mu+1}}{y_{\mu}}.$$

Les deux autres racines ne s'expriment pas par la suite y_n. Soit, par exemple, la congruence

$$x^3 - 3x + 3 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3001).$$

L'échelle de relation de la suite auxiliaire est $[3, -1]$, et la condition de possibilité est $y_{1000} \equiv 0$ (mod 3001). Si on substitue à $[3, -1]$, la récurrence $[1, 1]$, la condition devient $y_{2000} \equiv 0$, et elle est satisfaite, car on trouve déjà $y_{25} \equiv 0$.

L'une des racines cherchées se présente ensuite sous la forme

$$x \equiv \frac{y_{18}}{y_{16}} \equiv \frac{2584}{987} \equiv 2207 .$$

Si n était de la forme $3^\lambda(3\mu \pm 1)$, et, par suite, l de la forme $3^{\lambda+1}m + 1$, les racines de la proposée ne pourraient plus s'exprimer en fonction de la récurrence auxiliaire; mais on pourrait encore tirer avantage de la réduction à la forme monôme. En effet les racines $3^{\lambda+1}$ iemes de l'unité existent ici, et en désignant par α l'une d'entre elles, différente de l'unité, on conclut de $A^n \equiv 1$ l'identité $A^{3\mu\pm1} \equiv \alpha^3$ et, par conséquent, pour une des valeurs de y

$$y \equiv \alpha A^{-\mu} \qquad \text{ou} \qquad y \equiv \alpha^{-1} A^{\mu} ,$$

selon le cas.

Troisième cas. — Le module l est de la forme $3m + 1$, 3Δ en est non-résidu quadratique, et $\left(\frac{3\Delta}{l}\right) = -1$; a et b sont des imaginaires de Galois de la forme $r \pm s\sqrt{N}$; A est une imaginaire de la même forme. Nous avons démontré que dans la récurrence auxiliaire $[a + b, -ab]$, le terme y_{3m+2} est divisible par l; ainsi on a

$$A^{3m+2} \equiv 1 \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{3m+3} \equiv \frac{a}{b} .$$

Une valeur de y est donc $y \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^{m+1}$; elle donne pour x la solution réelle

$$x \equiv ab\,\frac{y_m}{y_{m+1}} \equiv \frac{y_{2m+2}}{y_{2m+1}} ,$$

qu'on vérifiera facilement sur les formules de triplication (6) et (7).

Quant aux autres racines, elles sont nécessairement imaginaires. En effet dans le cas présent les racines cubiques de l'unité sont réelles; si donc x_0, x_1, x_2 l'étaient, la résolvante aurait deux solutions réelles a et b, ainsi que le démontre l'égalité (12).

Prenons, comme exemple, la congruence

$$x^3 + 3x - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 67).$$

La condition $\left(\frac{3\Delta}{l}\right) = -1$ est satisfaite; la récurrence auxiliaire est [1, 1]. On a donc, pour unique racine

$$x \equiv -\frac{y_{22}}{y_{23}} \equiv 40 \qquad (\text{mod } 67).$$

Quatrième cas. — Le module l est de la forme $3m - 1$, 3Δ est non-résidu quadratique, ou $\left(\frac{3\Delta}{l}\right) = -1$; a et b sont ici encore des imaginaires congruentielles. Comme les racines cubiques de l'unité font partie du domaine $\sqrt{N}$, il est clair que y, et par suite x, a dans ce domaine trois racines ou aucune.

Si x admet trois valeurs, une est réelle, puisque l'existence d'une racine imaginaire entraîne celle de sa conjuguée; je dis que les deux autres racines seront aussi réelles. Car si x_0 désigne la racine réelle et x_1, x_2 deux racines conjuguées, et que α et α^2 soient de même les racines conjuguées de $\alpha^3 \equiv 1$, les quantités

$$x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 \qquad \text{et} \qquad x_0 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_1$$

seraient réelles, ainsi que a et b, en vertu de (12), ce qui contredit l'hypothèse $\left(\frac{3\Delta}{l}\right) = -1$.

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de ces racines est donc que A soit résidu cubique (mod l) ou que $A^{\frac{l^2-1}{3}} \equiv 1$. Cette condition s'écrit encore $A^{3m^2-2m} \equiv 1$ ou $A^m \equiv A^{-3m^2+3m}$. Mais la récurrence auxiliaire donne $y_{3m} \equiv 0$, ou $A^{3m} \equiv 1$; donc enfin la condition de possibilité prend la forme simple $A^m \equiv 1$, soit $y_m \equiv 0$ (mod l).

Une fois reconnue la possibilité de la solution, on procédera pour trouver les racines comme il a été expliqué à l'occasion du deuxième cas. Ainsi, si le nombre m, ou plus généralement, si l'indice auquel appartient A (mod l) est

de la forme $3\mu \pm 1$, on aura, pour l'une des valeurs de x

$$x \equiv \frac{y_{\mu+1}}{y_\mu}, \qquad \text{ou} \qquad x \equiv ab\frac{y_{\mu-1}}{y_\mu} \equiv \frac{y_{2\mu}}{y_{2\mu-1}} .$$

Toutes ces propriétés peuvent être facilement contrôlées au moyen des formules de triplication (6) et (7) et des théorèmes de divisibilité énoncés §§ 3.

Soit, comme exemple, à résoudre la congruence

$$x^3 + 3x - 1 \equiv 0 . \qquad \pmod{47}$$

La récurrence auxiliaire est toujours [1, 1], et son discriminant 5 est non-résidu de 47. De plus $y_{16} = 987 = 21 \times 47$. La congruence proposée a donc trois racines ; l'une d'elles sera

$$x \equiv \frac{y_6}{y_5} \equiv \frac{8}{5} \equiv 11 ;$$

les autres sont 41 et 42.

C. Cailler (Genève).

SUR LE 5me LIVRE DE GÉOMÉTRIE

Première partie.

1. — L'article intitulé « Parallélisme et translation rectiligne », publié dans le numéro du 15 septembre 1907 de la Revue *L'Enseignement mathématique* (pp. 367-381), impose de nouvelles définitions pour le parallélisme de droites et de plans et par suite un nouveau procédé de démonstration des propriétés qui les concernent. Nous nous bornerons à énoncer simplement les propositions dont la démonstration est devenue classique et surtout celles qui sont relatives à la perpendicularité d'une droite et d'un plan.

On est convenu d'appeler *surface plane* ou *plan* une sur-

face telle que si on y marque deux points à volonté, la droite qui les joint est toute entière sur la surface.

On démontre qu'un plan est déterminé de position :

1° par deux droites qui se coupent ;

2° par trois points qui ne sont pas en ligne droite ;

3° par une droite et un point extérieur à cette droite ;

4° par deux droites parallèles.

Nous rappelons également les deux propositions suivantes :

1° L'intersection de deux plans qui se coupent est une ligne droite ;

2° Par un point pris hors d'une droite on peut lui mener une parallèle et une seule.

Ces préliminaires posés nous continuerons comme il suit.

I. Droites parallèles. Angle de deux droites.

2. — Théorème I. Si par deux droites parallèles AX et BY on fait passer deux plans P et Q se coupant suivant une droite CZ, cette droite est parallèle à chacune des deux autres.

Démonstration. Désignons par R (fig. 1) le plan des deux parallèles AX et BY : il forme avec les deux autres une figure invariable. Concevons qu'on lui fasse subir une translation *rectiligne* de directrice AX ; si on assujettit le plan R à glisser sur lui-même, chacun des plans P et Q glissera également sur lui-même. Quand le point A de AX aura décrit sur cette droite un segment $AA' = l$, le point B de BY, parallèle à AX, aura décrit sur cette droite un segment $BB' = AA' = l$. Le point C de CZ aura décrit dans le plan P un segment de droite égal et parallèle à AA′ et dans le plan Q un segment de droite égal et parallèle à BB′; or le point C a effectué un trajet *unique* qui appartient à chacun des plans P et Q; il a donc décrit sur leur intersection CZ un segment $CC' = l$ parallèle à la fois à AX et à BY. Donc l'intersection CZ des deux plans P et Q est parallèle à chacune de ces droites.

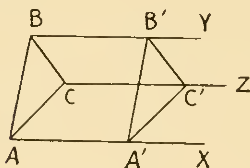


Fig. 1

C. Q. F. D.

Corollaire. Si, dans l'espace, deux droites BY et CZ sont respectivement parallèles à une 3e droite AX, ces droites sont parallèles entre elles.

Démonstration. Un point C de la droite CZ (fig. 1) détermine avec AX un plan P et avec BY un plan Q lesquels se coupent suivant une droite Δ passant par le point C; or cette droite est parallèle à AX et à BY; mais par le point C on ne peut mener qu'une seule parallèle à AX; donc la droite Δ se confond avec CZ et par conséquent les droites BY et CZ sont parallèles. C.Q.F.D.

Remarque. Ce théorème fournit la démonstration classique bien connue du théorème suivant:

Théorème II. Si deux angles ont leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens, ces angles sont égaux.

Supposons que les deux angles ACB, A′C′B′ (fig. 1) répondent à la question, on peut aussi démontrer le théorème comme il suit:

Les deux côtés parallèles CA et C′A′ déterminent un plan P; de même les côtés parallèles CB et C′B′ déterminent un plan Q, ces deux plans se coupent suivant une droite CC′. Cela posé, concevons que l'on fasse subir à l'angle ACB une translation rectiligne égale et parallèle à CC′; si on assujettit le plan P à glisser sur lui-même, le plan Q glissera également sur lui-même et les droites CA et CB viendront simultanément coïncider avec leurs parallèles respectives C′A′ et C′B′; dès lors l'angle ACB coïncidera avec l'angle A′C′B′, donc ces angles sont égaux. C.Q.F.D.

Angle de deux droites non situées dans le même plan.

3. — Définition. Si deux droites orientées D et D′ ne sont pas dans le même plan, on appelle angle de ces droites *l'angle plan* que l'on obtient en menant par un point O de l'espace deux demi-droites D_1 et D'_1 (fig. 2) respectivement parallèles aux deux premières et de même sens. Si on recommence la même construction pour un autre point O′ les nouvelles demi-droites, respectivement parallèles à D et à D′ le seront également

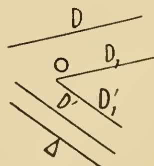


Fig. 2

à D_1 et à D'_1. On aura donc deux angles plans ayant leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens et par conséquent ces angles seront égaux. Le point O peut donc être choisi arbitrairement et au besoin sur l'une des droites données. La définition qui précède est donc ainsi complètement justifiée.

Si l'angle plan ainsi formé est droit, on dit que les deux droites D et D′ sont *perpendiculaires* ou bien *orthogonales*.

Il est bon d'observer que si une droite D est orthogonale à une droite D′, elle l'est également à toute parallèle Δ à la droite D′, car la parallèle à Δ par le point O est parallèle à D′ et se confond par conséquent avec D'_1.

II. Perpendicularité d'une droite et d'un plan.

4. — Les propositions qui font l'objet de ce paragraphe, le plus important du 5me livre, sont établies d'une façon très simple et en même temps très générale grâce à l'emploi de l'angle de deux droites, dans les *Eléments de Géométrie* de H. Bos et A. Rebière, publiés en 1881 par la Librairie Hachette et Cie.

Nous utiliserons dans ce qui va suivre les propositions suivantes :

1° Si une droite D est perpendiculaire à un plan P, toute parallèle D′ à D est aussi perpendiculaire au même plan.

En effet puisque la droite D est orthogonale à une droite quelconque du plan P, il en est de même de sa parallèle D′, donc la droite D′ est perpendiculaire au plan P.

2° Si deux droites D et D′ sont parallèles, tout plan P perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre. Cette proposition est une conséquence de la précédente.

3° Réciproquement : Si deux droites D et D′ sont perpendiculaires à un même plan P, ces droites sont parallèles.

Si par un point M de D′ on mène la parallèle à D, elle sera perpendiculaire au plan P ; donc elle se confondra avec D′ et par conséquent D′ est parallèle à D. — C. Q. F. D.

4° Enfin nous utiliserons également le *théorème des 3 perpendiculaires*.

DEUXIÈME PARTIE.

III. Parallélisme d'une droite et d'un plan.

5. — DÉFINITION. On dit qu'une *droite* et un *plan* sont parallèles lorsque la droite a tous ses points à la *même* distance du plan.

THÉORÈME I. Si une droite AB a deux points A et B à la même distance l d'un plan P, elle est parallèle au plan.

Démonstration. Des points A et B (fig. 3) menons les perpendiculaires AA′ et BB′ sur le plan P. Ces droites sont parallèles et déterminent un plan R qui coupe le plan P suivant la droite A′B′; d'ailleurs, par hypothèse, AA′ = BB′, donc, puisque ces droites sont en outre l'une et l'autre perpendiculaires sur A′B′ le quadrilatère AA′B′B est un rectangle. D'un point M quelconque de AB menons dans le plan R la parallèle MM′ à BB′ par exemple. Cette droite est perpendiculaire au plan P et par suite perpendiculaire sur A′B′; le quadrilatère BB′M′M a ses côtés parallèles 2 à 2, c'est donc un parallélogramme et, de plus, c'est un rectangle dans lequel on a MM′ = BB′. Donc la distance au plan P des divers points de AB est partout la même ; cette droite est donc parallèle au plan P. C. Q. F. D.

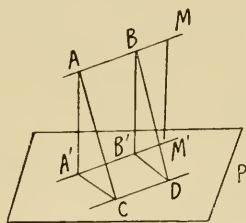


Fig. 3

6. — THÉORÈME II. Si une droite AB est parallèle à une droite CD du plan P, elle est parallèle à ce plan.

Démonstration. De deux points A et B de la droite AB (fig. 3) menons les perpendiculaires AA′ et BB′ sur le plan P. Menons ensuite dans le plan P les perpendiculaires A′C et B′D sur la droite CD et traçons enfin les droites AC et BD.

D'après le théorème des 3 perpendiculaires ces droites sont l'une et l'autre perpendiculaires sur CD ; elles sont par conséquent parallèles et en outre égales puisque les droites AB et CD sont parallèles par hypothèse. Dès lors les deux triangles rectangles AA′C et BB′D ont leurs hypoténuses

égales; en outre leurs angles aigus en A et en B sont égaux parce qu'ils ont leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens. Donc les deux triangles sont égaux et l'on a AA′ = BB′. La droite AB a donc deux points à la même distance du plan P; elle est par conséquent parallèle au plan. C. Q. F. D.

7. — Théorème III. Si par une droite AB parallèle à un plan P, on fait passer un plan Q qui le coupe suivant une droite CD, cette droite est parallèle à la droite AB.

Démonstration. De deux points A et B de la droite AB (fig. 3) menons d'abord les perpendiculaires AA′ et BB′ sur le plan P; menons ensuite dans le plan Q les perpendiculaires AC et BD à la droite CD. Ces deux couples de droites sont parallèles 2 à 2 et de même sens et par conséquent les angles aigus A′AC et B′BD sont égaux; dès lors si on trace les droites A′C et B′D on forme deux triangles rectangles, AA′C et BB′D qui ont un côté égal AA′ = BB′ adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ces triangles sont égaux; il en résulte AC = BD; mais ces droites sont parallèles, et par conséquent le quadrilatère ACDB est un parallélogramme dans lequel CD est parallèle à AB. C. Q. F. D.

8. — Théorème IV. Si une droite AB est parallèle à un plan P et que par un point C du plan on lui mène une parallèle, cette droite est contenue toute entière dans le plan P.

Démonstration. En effet (fig. 3) le point C et la droite AB déterminent un plan Q qui coupe le plan P suivant une droite CD parallèle à la droite AB; mais par le point C on ne peut mener qu'une parallèle à la droite AB; donc la parallèle en question est la droite CD située toute entière dans le plan P.

Remarque particulière. Si par deux droites parallèles AX et BY d'un plan R (fig. 1) on fait passer deux plans P et Q qui se coupent suivant une droite CZ, cette droite est parallèle au plan R.

En effet, la droite CZ est parallèle à une droite AX du plan R, donc elle est parallèle à ce plan.

9. Pour terminer ce paragraphe nous nous bornerons à énoncer les propositions suivantes:

1° Si une droite AB est parallèle à un plan P toute per-

pendiculaire au plan P est perpendiculaire ou orthogonale à la droite AB.

Corollaire. — Une droite et un plan parallèles sont partout également distants: de sorte que si la droite a un de ses points dans le plan, elle y est contenue toute entière.

2° Les portions de deux droites parallèles comprises entre une droite AB et un plan P qui lui est parallèle sont égales.

3° Si une droite AB est parallèle à un plan P on peut, par une translation rectiligne, placer cette droite dans le plan.

Démonstration. — En effet, par la droite AB (fig. 3) menons un plan Q qui coupe le plan P suivant une droite CD. Puisque ces deux droites sont parallèles on sait que par une translation rectiligne en peut amener AB à coïncider avec CD. La droite AB sera ainsi placée dans le plan P.

C. Q. F. D.

IV. — Parallélisme de deux plans.

10. — Définition. On dit que deux plans P et Q sont *parallèles* lorsque l'un des deux a tous ses points à la *même* distance de l'autre.

Théorème I. — Si deux plans P et Q sont perpendiculaires à une même droite LL′, en deux points différents A et B, ces plans sont parallèles.

Démonstration. — Nous allons prouver que le plan P a tous ses points à la même distance AB du plan Q (fig. 4).

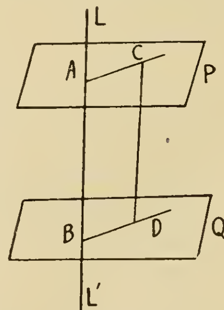


Fig. 4

Dans le plan P prenons arbitrairement un point C et de ce point menons la droite CD perpendiculaire sur le plan Q. Les droites AB et CD perpendiculaires au plan Q sont parallèles; mais la droite BA est aussi perpendiculaire au plan P, donc il en est de même de sa parallèle DC. Le quadrilatère ABCD a donc ses quatre angles droits; c'est un rectangle dans lequel les côtés opposés AB et CD sont égaux. Le plan P a donc

tous ses points à la même distance AB = l du plan P ; donc ces deux plans sont parallèles. C. Q. F. D.

Remarque. — Puisque DC = BA = l et que DC est perpendiculaire au plan P on constate que le plan Q a tous ses points à la *même* distance l du plan P. Si donc on envisage les deux plans P et Q au point de vue de la distance à l'un d'eux de tous les points de l'autre il y a *réciprocité* entre ces deux plans.

Corollaire. — Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite située dans l'un d'eux est parallèle à l'autre.

En effet, si cette droite est dans le plan P par exemple, elle a tous ses points à la même distance du plan Q ; donc elle est parallèle à ce plan. C. Q. F. D.

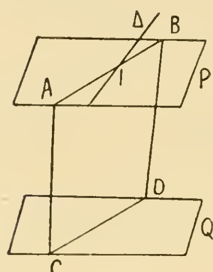


Fig. 5

11. — Théorème II. Les intersections de deux plans parallèles P et Q par un 3e plan R sont parallèles.

Démonstration. Par une droite AB du plan P et un point C du plan Q (fig. 5) faisons passer un plan R qui coupe le plan Q suivant une droite CD. Puisque la droite AB du plan P est parallèle au plan Q, l'intersection CD des plans R et Q est parallèle à la droite AB. C. Q. F. D.

Corollaire. Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite Δ qui rencontre l'un, rencontre l'autre.

Démonstration. Supposons que la droite Δ (fig. 5) rencontre le plan P au point I. Par cette droite et un point C du plan Q faisons passer un plan R.

Il coupe les plans P et Q suivant deux droites parallèles AB et CD ; or, la droite Δ rencontre AB au point I, donc elle ira rencontrer sa parallèle CD dans le plan R ; donc la droite Δ rencontre le plan Q. C. Q. F. D.

12. — Théorème III. Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Démonstration. Supposons (fig. 4) que les plans P et Q soient parallèles. Si, en un point A du plan P, on mène la perpendiculaire à ce plan elle ira rencontrer le plan Q en un cer-

tain point B. Par la droite AB faisons passer un plan R ; il coupera les deux plans P et Q suivant deux droites parallèles AC et BD. Or, la droite AB, perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire sur AC ; elle est par conséquent perpendiculaire à sa parallèle BD dans le plan. On voit ainsi que la perpendiculaire AB au plan P est perpendiculaire à une droite quelconque BD passant par son pied dans le plan Q ; donc toute perpendiculaire au plan P est perpendiculaire au plan Q. C. Q. F. D.

Corollaire. Si deux plans P et Q sont parallèles à un même plan R, ces plans sont parallèles.

Démonstration. En effet, une perpendiculaire quelconque au plan R sera perpendiculaire à chacun des plans P et Q. Donc (th. I) ces plans sont parallèles. C. Q. F. D.

Remarque. Si deux plans parallèles P et Q ont un point commun M ces plans coïncident.

Démonstration. La perpendiculaire en M au plan P, par exemple, est également perpendiculaire au plan Q qui lui est parallèle ; il suit de là que les deux plans P et Q sont perpendiculaires à une même droite, au même point M ; donc ces plans coïncident. C. Q. F. D.

13. — Théorème IV. Par un point A, extérieur à un plan Q, on peut mener un plan P parallèle au plan Q, et on n'en peut mener qu'un seul.

Démonstration. Du point A (fig. 4) on peut mener la perpendiculaire AB sur le plan Q ; on peut ensuite mener au point A un plan P perpendiculaire sur AB. Ce plan sera parallèle au plan Q puisqu'ils seront l'un et l'autre perpendiculaires à la même droite AB.

Si on imagine par le point A un autre plan P′ parallèle au plan Q, les deux plans P et P′ parallèles au même plan Q seront parallèles entre eux, et à cause de leur point commun A ces plans coïncideront. Donc par le point A on peut mener un plan et un seul parallèle au plan Q. C. Q. F. D.

Corollaire. Si par un point A, extérieur à un plan Q, on mène des parallèles en nombre quelconque à ce plan, elles sont toutes situées dans le plan P parallèle au plan Q et passant par le point A.

Il suit de là que : Si deux angles ont leurs côtés parallèles 2 à 2 leurs plans sont parallèles.

Nous nous bornons à l'énoncé de ces propositions ainsi que des suivantes.

14. — 1°. Deux plans parallèles P et Q sont partout également distants.

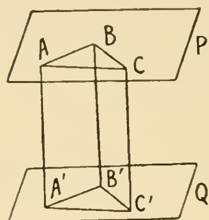


Fig. 6

Cela résulte des théorèmes I et III de ce paragraphe.

2°. Les portions de deux droites parallèles comprises entre deux plans parallèles P et Q sont égales.

3°. Enfin nous terminerons par le théorème suivant.

THÉORÈME V. Si deux plans P et Q sont parallèles, on peut, par une translation *rectiligne*, amener l'un d'eux en coïncidence avec l'autre.

Démonstration. Entre les deux plans donnés (fig. 6), plaçons 3 droites parallèles AA', BB' et CC' non situées dans le même plan ; ces trois droites ont la même longueur l.

Si on fait subir au triangle ABC et par suite au plan P une translation rectiligne égale et parallèle à AA', chacune des 3 droites AA', BB' et CC' glissera sur elle-même ; et comme elles sont égales, les 3 points A, B et C viendront simultanément se placer sur les points A', B' et C' du plan Q.

Dès lors le plan P coïncidera avec le plan Q.

C. Q. F. D.

V. HIOUX (Paris).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les projections des droites perpendiculaires.

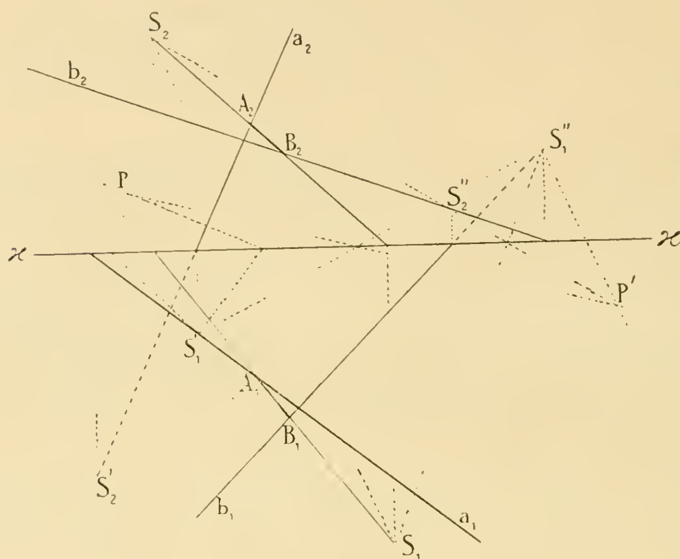
Extrait d'une lettre de M. V. Martinetti (Messine)
à M. G. Loria (Gênes).

L'Enseignement mathématique a publié récemment trois Notes, de MM. Lehr (T. IX, p. 119), Majcen (Id., p. 460) et Loria (T. X, p. 141), sur la condition d'orthogonalité de deux droites représentées par la méthode de Monge. A ces trois manières de formuler la condition, on en peut ajouter une quatrième, qui, à ce que je crois, est nouvelle; son énoncé simple et d'une application facile. Elle peut être considérée comme la traduction graphique de cette propriété bien connue : « lorsque deux droites sont perpendiculaires entre elles, on peut par l'une d'elles mener un plan normal à l'autre, et réciproquement ». En effet de cette proposition on tire :

Etant données les projections orthogonales de deux droites, la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient perpendiculaires entre elles est que les normales menées par les traces de l'une d'entre elles (supposées déterminées, à distance finie et extérieures à la ligne de terre) aux projections du même nom de l'autre (supposées non perpendiculaires à la ligne de terre) se coupent sur la ligne de terre.

Si l'une des droites considérées se trouve dans une position générale, tandis que l'autre, sans être un rayon projetant, est parallèle à un plan de projection ou située dans un tel plan, la condition que je viens d'énoncer se traduit dans une autre généralement connue. Dans les cas où cette condition cesse d'être applicable il est aisé de la remplacer par un critère *ad hoc* particulier à chaque cas; si par exemple une des droites est normale au premier (second) plan de projection, l'autre droite devra être parallèle au deuxième (premier) ou appartenir à ce plan; si au contraire les deux droites sont perpendiculaires à la ligne de terre, pour qu'elles soient perpendiculaires entre elles, il faut que celle-ci arrive par leurs projections sur le plan de profil. Si les deux droites rencontraient la ligne de terre il faudrait mettre à la place d'une d'elles une droite qui lui soit parallèle et appliquer ensuite le théorème général.

Étant données deux droites qui ne sont pas parallèles entre elles, les droites qui sont perpendiculaires à toutes les deux passent toutes par un point situé à l'infini. Leurs traces sur les plans de projection se correspondent, par conséquent, dans une affinité Ω dont l'axe est la ligne de terre ; le point correspondant dans Ω à un point quelconque P peut s'obtenir sans peine en appliquant la condition exposée ci-dessus par le procédé suivant : si



$a \equiv (a_1, a_2)$, $b \equiv (b_1, b_2)$ sont les droites données, on mène par P les normales à a_1, b_1 : de leurs points de rencontre avec la ligne de terre on mène les normales à a_2, b_2 ; le point où elles se coupent est le point cherché.

Je remarque en finissant que la plus petite distance entre les droites a, b aura comme traces S_1, S_2 deux points correspondants dans l'homologie Ω ; et les droites qui projetant de S_1, S_2 les traces du même nom de la droite a (ou b), se coupant sur la ligne de terre, seront également des droites correspondantes en Ω. Cette remarque donne une construction, probablement nouvelle et qui n'est pas plus longue que celle que l'on connaît, du problème ayant pour but la recherche de la plus petite distance entre deux droites $a \equiv (a_1, a_2)$, $b \equiv (b_1, b_2)$ (voyez la figure). On trouve les traces S_1' et S_2' de a et les traces S_1'', S_2'' de b ; l'homologie Ω relative aux droites a, b donne les points P', P'' correspondants de S_1' et S_1'' et on les unit respectivement à

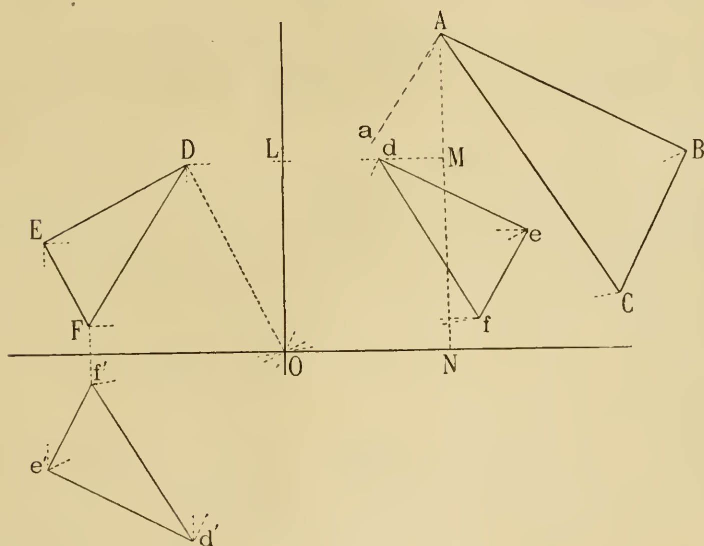
S_2' et S_2'' ; le point où se coupent ces droites est la seconde trace S_2 de la droite cherchée, tandis que la première est le point qui correspond à S_2 en Ω^{-1} ; ayant de la sorte les traces de la droite cherchée, les projections s'ensuivent immédiatement.

30 juillet 1908.

A propos d'un article de M. Laisant sur les Propriétés d'un système de deux triangles ou de deux tétraèdres.

Les élégantes propriétés étudiées par M. Laisant dans l'*Enseign. Math.* du 15 janvier 1908, me suggèrent le problème ci-après :

Etant donnés deux triangles ABC, DEF symétriquement semblables, ayant m : n *comme rapport de similitude, trouver le centre et les axes de similitude.*



Menez Aa parallèle à DF et la bissectrice AMN de l'angle aAC. Menez DM perpendiculaire à AMN. Prenez sur DM un point L tel que LM : DL $=$ m : n et sur AMN un point N tel que

$$NA : NM = m : n .$$

Complétez le rectangle LMNO. O sera le centre et OL, ON les axes de similitude.

En effet,

$$DL : LO = ON : NA ;$$

donc

$$\widehat{DOL} = \widehat{NAO} = \widehat{AOL} ,$$

par suite d est le symétrique de D par rapport à OL.

Menez df symétrique de DF. Comme OL est parallèle à la bissectrice des directions DF et AC, df sera parallèle à AC et

$$df : AC = m : n = MN : AN = Od : OA .$$

Par suite Ofc est une ligne droite.

A remarquer que ON est un second axe.

W. Gallatly (Londres).

A propos d'un article de M. A. Pleskot sur la droite de Simson.

Les propositions établies par M. Pleskot dans son article sur une « généralisation du Théorème sur la droite de Simson » (*Ens. math.*, n° de mai 1908, p. 207-211) peuvent se rattacher d'une façon très simple au théorème classique de M. Aubert (*Nouvelles Annales*, 3me série, t. VIII) :

Si deux triangles ABC, abc inscrits dans une conique sont homologiques, et si l'on prend un point D sur la conique, les points de concours α, β, γ des droites BC et Da, CA et Db, AB et Dc sont situés sur une même droite L passant par le centre d'homologie O.

On trouvera une démonstration de ce théorème dans le Traité de géométrie de Rouché et Comberousse, t. II, p. 455. La proposition réciproque est également vraie, c'est-à-dire que *si les points α, β, γ sont en ligne droite, les triangles ABC, abc sont homologiques.*

Voici une démonstration simple de cette propriété, qui n'avait peut-être pas été remarquée :

Soient M et N les points d'intersection de la conique et de la droite L, qui est supposée couper en a, b, c, les côtés de ABC. Du point C projetons la ponctuelle ($a_1 b_1 c_1$ MN) ; déterminons les intersections du faisceau projetant avec la conique ; projetons-les du point c_1 ; recoupons par la conique le faisceau ainsi obtenu. Nous formerons ainsi la ponctuelle du second degré (ABCNM) projective à ($a_1 b_1 c_1$ MN). D'autre part, cette dernière ponctuelle projetée du point D donne (abcMN) projective à chacune des deux précédentes.

Les ponctuelles du second degré (ABC), (abc), dans lesquelles se correspondent doublement les éléments M et N, sont donc en involution. Par conséquent les droites Aa, Bb, Cc sont concourantes, ce qui démontre le théorème proposé.

Si, après avoir constaté l'homologie des triangles ABC, abc, on applique le théorème direct de M. Aubert, on voit que, S étant un

point quelconque de la conique, les droites Sa, Sb, Sc, couperont les côtés correspondants de ABC en trois points en ligne droite.

Quand on suppose la droite L rejetée à l'infini, on obtient ainsi le théorème II de M. Pleskot.

Si en outre les points S et D sont diamètralement opposés sur la conique, on obtient le théorème I.

P. de Lepiney (Buenos-Aires)

Sur la résolution des équations quadratiques et cubiques, à l'aide des fonctions circulaires et hyperboliques[1].

1. — Supposons connus les premiers éléments de la théorie des fonctions d'un variable complexe, et notamment les équations qui définissent les fonctions hyperboliques et circulaires, l'argument étant réel.

Comme exercice, on se propose souvent de résoudre les équations quadratiques et cubiques. Habituellement on opère sur les formules de résolution elles-mêmes ; mais il nous semble tout aussi intéressant de partir directement de l'équation donnée : c'est ce point de vue que nous cherchons à développer, dans cette petite note.

Afin d'abréger, nous désignons par ε la quantité ± 1 ; nous laissons de côté le cas des racines égales ; enfin, nous supposons que les lettres a, b, c, q et r représentent des quantités essentiellement positives, différentes de zéro.

2. — Equation quadratique. — Il suffit de considérer la suivante :

$$ax^2 - bx + \varepsilon c = 0 ,$$

que nous écrivons ainsi :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{c}{a}}} + \varepsilon\frac{\sqrt{\frac{c}{a}}}{x}\right) = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

C'est une équation réciproque de forme normale. Soit

$$X = \frac{x}{\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

une des racines : $\frac{\varepsilon}{X}$ sera nécessairement l'autre.

[1] *L'Enseign. mathém.* a publié en nov. 1900 (t. II, p. 443-447) un intéressant article de M. Barbarin sur *les fonctions hyperboliques dans l'enseignement moyen* contenant aussi la résolution des équations quadratiques et cubiques. — Voir également *Essai sur les fonctions hyperboliques*, de C.-A. Laisant. *Réd.*

Trois cas peuvent se présenter.

Premier cas. — Si ε est négatif, nous sommes en droit de poser :

$$\text{Sh}\,\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}} ,$$

et l'on a immédiatement :

$$x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}} \; {}^{\pm \alpha} .$$

Deuxième cas. — Si $\varepsilon = 1$ et le rapport $\frac{b}{2\sqrt{ca}} > 1$, il est permis d'écrire

$$\text{Ch}\,\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}} ,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}\, e^{\pm \alpha} .$$

Troisième cas. — Si $\varepsilon = 1$ et rapport $\frac{b}{2\sqrt{ac}} < 1$, il faudra poser :

$$\cos \alpha = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}} ,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}\, e^{\pm \alpha i} = \sqrt{\frac{c}{a}}\, (\cos \alpha \pm i \sin \alpha) .$$

Dans le calcul des racines l'on pourrait — nous ne disons pas que le procédé soit très pratique — déterminer l'argument réel α et les exponentielles $e^{\pm\alpha}$, au moyen des tables. (Consulter, par exemple, les « Tables des fonctions cosinus et sinus », par Dr Carl Burrau).

3. — Equation cubique. — Il suffit d'étudier la suivante :

$$z^3 + \varepsilon q z - r = 0 .$$

En posant, avec Hudde,

$$z = x + y ,$$

on est conduit à la résolvante

$$u^2 - ru - \varepsilon \frac{q^3}{27} = 0 .$$

admettant x^3 et y^3 comme racines.

Cette réduite peut s'écrire sous la forme, plus commode, à notre point de vue :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}} - \varepsilon\frac{\sqrt{\frac{q^3}{27}}}{u}\right) = \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}}.$$

Cette forme, nous l'avons étudiée ci-dessus. Ici encore, il faudrait distinguer trois cas, et pour chacun de ces cas, nous trouverions des résultats bien connus.

Ainsi, par exemple, quand $\varepsilon = 1$, nous poserons

$$\text{Sh}\,(\alpha + 2k\pi i) = \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}},$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} x &= +\sqrt{\frac{q}{3}}\,e^{\frac{\alpha+2k\pi i}{3}} \\ y &= -\sqrt{\frac{q}{3}}\,e^{-\frac{\alpha+2k\pi i}{3}} \end{aligned}\right. \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Afin que le produit xy soit réel, il faut prendre la même valeur de k, simultanément dans ces deux relations.

Nous trouverons finalement

$$z = 2\sqrt{\frac{q}{3}}\,\text{Sh}\,\frac{\alpha + 2k\pi i}{3},$$

la racine réelle correspondant à $k = 0$.

Louis Casteels (Louvain).

Sur les formules fondamentales des Combinaisons.

Nous nous proposons de montrer dans cette Note que l'on peut obtenir les formules fondamentales des combinaisons en les envisageant comme cas particuliers d'une propriété générale.

A cet effet nous allons d'abord démontrer le théorème suivant sans avoir recours aux expressions P_n, C_m^n et A_m^n.

1. Théorème. — *Etant donnés* p *nombres* $n_1, n_2, \ldots, n_p$ *tels que* $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = m$, *le produit*

$$C_{n_1+n_2}^{n_2} \cdot C_{n_1+n_2+n_3}^{n_3} \cdots C_{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_p}^{n_p}$$

qui s'écrit plus brièvement

$$\prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k}$$

est constant, quelque soit l'ordre dans lequel on épuise les nombres n_k.

En effet, partageons m lettres en p classes, respectivement de $n_1, n_2, \ldots, n_p$ lettres. On peut former la 1e classe, quant aux lettres qui y entrent de $C_m^{n_1}$ manières ; les deux premières classes peuvent se former simultanément de $C_m^{n_1} \cdot C_{m-n_1}^{n_2}$ manières et ainsi de suite. Enfin, les $(p-1)$ premières classes peuvent être formées de

$$C_m^{n_1} C_{m-n}^{n_2} \ldots C_{m-(n_1+n_2+\ldots+n_{p-2})}^{n_{p-1}}$$

manières, tout en *coexistant*. La dernière classe se trouve formée d'elle-même. On voit donc, que le nombre total de manières dont les p classes peuvent coexister est indépendant de la classe choisie comme dernière. De là résulte, avec un changement de notations, le théorème annoncé.

2. Valeur du produit

$$\prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k}.$$

Chaque manière de former l'ensemble des p classes donne lieu à $P_{n_1} . P_{n_2} \ldots P_{n_p}$ permutations des m lettres. Donc

$$\prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k} = \frac{P_m}{P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_p}}.$$

3. Corollaires : A. *Expression* de P_m. Faisons $p = m$; $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1$. Alors (1) donne

$$P_m = 1 . 2 . 3 \ldots m = m\,!$$

B. *Expression* de C_m^n. — Faisons $p = 2$, et l'on voit que (1) est la généralisation de la formule :

$$C_m^n = C_m^{m-n} = \frac{m\,!}{n\,!\,(m-n)\,!}\,;$$

celle-ci est donc démontrée.

C. *Expression* de A_m^n. Elle résulte de la formule évidente :

$$A_m^n = P_n . C_m^n.$$

4. Remarques. — La formule (1) montre que si $m = \Sigma_{n_k}$, le nombre $\frac{m!}{n_1!\, n_2! \dots n_p!}$ est entier. En particulier $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]!$ est divisible par $1^n 2^{n-1} 3^{n-2} \dots (n-1)^2 n$.

Si nous partageons les m lettres, en n_1 classes de α_1 lettres, etc. en n_p classes de α_p lettres, on a $\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_p n_p = m$. Si l'on décompose alors le nombre m, de toutes les manières possibles sous la forme indiquée, il est visible que l'on a l'identité :

$$\sum \frac{(\alpha_1 - 1)!^{n_1} (\alpha_2 - 1)!^{n_2} \dots (\alpha_p - 1)!^{n_p}}{n!\, n_2! \dots n_p!} \prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k} = m!$$

Si l'on remplace les produits Π par leurs valeurs déduites de

$$\prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k} = \frac{m!}{(\alpha_1!)^{n_1} \dots (\alpha_p!)^{n_p}}$$

on trouve l'identité connue :

$$\sum \frac{1}{n_1!\, \alpha_1^{n_1} n_2!\, \alpha_2^{n_2} \dots n_p!\, \alpha_p^{n_p}} = 1 .$$

J. Malaise (Liège).

CHRONIQUE

Les mathématiques au IIIe Congrès international de Philosophie, Heidelberg, 1908.

Au IIIe Congrès international de philosophie, qui a eu lieu à Heidelberg, du 31 août au 5 septembre derniers, les communications se rattachant aux Sciences mathématiques n'ont pas eu autant de relief que dans les deux Congrès précédents, de Paris (1900) et de Genève (1904).

La cause de ce fait doit peut-être être cherchée dans la séparation, beaucoup plus tranchée, que ce n'est le cas dans d'autres pays, qui subsiste en Allemagne entre les mathématiciens ou physiciens spécialistes et les « philosophes » dans le sens universitaire du mot. Tandis qu'en France par exemple, des savants tels que

M. Poincaré ou M. Duhem sont bien loin de se fâcher lorsqu'on les classe parmi les philosophes, ou même parmi les métaphysiciens, en Allemagne on a vu tout récemment le plus illustre représentant des études historiques et critiques sur le développement et les méthodes des sciences physico-mathématiques, le professeur Ernest Mach, désavouer explicitement (dans la préface à son volume sur « *la Connaissance et l'Erreur* ») toute solidarité, même de nom, avec les « philosophes » et les professeurs de philosophie.

Un épisode assez caractéristique de cette attitude de contraste et de méfiance des savants allemands à l'égard de spéculations philosophiques, a été le sujet d'une intéressante communication de M. Paul Mansion (Gand), dans laquelle les appréciations assez sévères exprimées par Gauss sur la théorie kantienne de la connaissance mathématique, ont été commentées d'une façon très brillante et caustique (« *Gauss contre Kant sur la géométrie non-euclidienne* »). Les remarques de M. Mansion ont donné lieu à une discussion assez vivace à laquelle ont pris part les jeunes représentants du nouveau groupe philosophique de Göttingue, qui prend le nom du philosophe Fries (« *Fries'sche Schule* ») : MM. L. Nelson et L. Hessenberg.

Dans la même section (II : *Philosophie générale, Métaphysique et Philosophie des Sciences* ») on a entendu une communication de M. Kuntze (Nordhausen) sur la *portée philosophique de l'Ausdehnungslehre de H. Grassmann*, et une autre de M. M. Winter (Paris) sur les *rapports de l'intuition et de la pensée mathématique*.

Parmi les communications présentées aux autres sections, sur la philosophie ou la méthodologie des sciences mathématiques et physiques, nous signalons les suivantes :

A. Rey (Dijon) sur l'*a priori et l'expérience dans les méthodes scientifiques* ;

E. Meyerson (Paris) sur les *explications scientifiques et la réalité du sens commun* ;

F. Enriques (Bologna) sur le *principe de raison suffisante* ;

Dufumier (Paris) sur la *notion d'une logique formelle positive*.

Dans la IVme Section (« *Logique et théorie de la connaissance* ») on a eu une série de communications se rapportant à la logique mathématique :

M^rss Ladd Franklin, de l'Université John Hopkins (Baltimore) a développé des idées sur l'opportunité d'une entente internationale entre les philosophes qui s'occupent particulièrement de questions logiques et s'intéressent au progrès des procédés déductifs.

Eugen Müller (Constance) a donné un rapport sur l'état de la publication des *œuvres posthumes de Ernst Schröder*.

Sont aussi à signaler, dans cette section, les multiples communications de M. G. Itelson (Berlin), sur *la position de la logique dans le système des sciences*, sur les *écrits de Erhardt Weigel*, sur

la *question de la possibilité de déduire de conséquences fausses de prémisses vraies,* sur la *notion de la vérité* et sur le *pragmatisme.*

Les rapports qui subsistent entre ce dernier sujet et les progrès récents de la logique mathémathique, aux Etats-Unis, ont fait l'objet d'appréciations très intéressantes développées par M. Royce (de l'Université de Harvard) dans son discours à la séance d'inauguration du Congrès.

La communication de M. L. Couturat, sur les *rapports entre la linguistique et la logique dans le problème de la langue internationale,* a donné lieu à une discussion intéressante à laquelle ont pris part, parmi les mathématiciens, M. Mansion et M. Peano.

La proposition, présentée par M. Enriques au nom du groupe italien, que le prochain Congrès soit tenu à *Bologne*, en 1911, a été adoptée à l'unanimité dans la séance de clôture du Congrès.

G. Vailati (Rome.)

Société italienne pour l'avancement des Sciences.

La « Società italiana per il progresso delle scienze » a tenu sa réunion annuelle à Florence du 18 au 23 octobre dernier, sous la présidence de M. Volterra. Les travaux étaient répartis sur vingt sections ; voici la liste de ceux qui ont été présentés à la première section (mathématique) ou qui peuvent intéresser les mathématiciens :

L. Amoroso, *Sur l'extension du problème de Dirichlet aux fonctions de plusieurs variables complexes.*

T. Boggio, *Résolutions de quelques questions se rapportant au potentiel d'une sphère non homogène.*

U. Crudeli, *Dernières recherches sur la théorie des figures d'équilibre d'une masse liquide animée d'un mouvement de rotation uniforme.*

A. Favaro, *Galilée et la détermination du poids de l'air.*

G. Loria, *La géométrographie et ses transformations.*

G. Gianfranceschi, *Les progrès récents dans l'électrodynamique des corps en mouvement.*

M. Gremigni, *Sur l'importance du postulat d'Archimède dans la théorie de l'équivalence géométrique.*

P. Pizzetti, *L'astronomie et la géodésie comme sciences mathématiques* (discours d'ouverture des sections réunies de mathématiques, d'astronomie et de géodésie).

F. Severi, *Sur les intégrales doubles de première espèce, attachées à une variété algébrique.*

C. Somigliana, *Sur une représentation mécanique de quelques champs de forces.*

A. Venturi, *Sur la théorie de la balance de Eötvös.*

G. Vivanti, *Sur l'état actuel de la théorie des fonctions entières* (en l'abscence de l'auteur, un résumé de ce rapport a été lu par M. Grandi).

Congrès des mathématiciens allemands
Cologne, septembre, 1908.

La réunion ordinaire des mathématiciens allemands *(Deutsche Mathematiker-Vereinigung)* a eu lieu cette année à Cologne, du 20 au 26 septembre, en même temps que le 80e Congrès des naturalistes et médecins allemands. Les travaux étaient inscrits au programme de la section 1 *a* du Congrès. Ils ont été répartis sur trois séances présidées par MM. Schwernig, président de la section, F. Klein et Rudio. Ils devaient, cette année, porter plus particulièrement sur la mécanique. Les communications présentées dans ce domaine ont offert un grand intérêt. Nous devons toutefois nous borner à en donner la liste :

1. H. Minkowski (Göttingen), *Raum und Zeit.* (L'espace et le temps.)

2. G. Hamel (Brünn), *Ueber die Grundlagen der Mechanik.* (Sur les fondements de la mécanique.)

3. E. Timerding (Strassburg), *Die historische Entwicklung des Kraftbegriffs.* (La notion de force dans son développement historique.)

4. P. Stäckel (Karlsruhe), *Ausgezeichnete Kreiselbewegungen.* (Sur des mouvements remarquables de la toupie.)

5. R. v. Mises (Brünn), *Probleme der technischen Hydromechanik.* (Problèmes de l'hydromécanique technique.)

6. H. Reissner (Aachen), *Wissenschaftliche Probleme der Flugmechanik.* (Problèmes scientifiques de l'aviation.)

Puis viennent, d'autre part, les communications suivantes :

7. H. Wiener (Darmstadt), *Zur Geometrie der binären Formen.* (Sur la géométrie des formes binaires.)

8. H. Jung (Marburg), *Ueber algebraische Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen.* (Sur des fonctions algébriques à deux variables indépendantes.)

9. F. Müller (Dresden), *Ueber Pläne zur Herausgabe von Abhandlungen Leonhard Eulers.* (Sur les projets de publication de mémoires d'Euler.) Dans cette dernière communication, qui a été vivement applaudie, l'auteur donne un aperçu des projets antérieurs de la publication des *œuvres d'Euler ;* il insiste à nouveau sur l'utilité incontestable d'une pareille entreprise et fait ressortir le rôle important que joue la lecture des mémoires du grand géomètre suisse dans la préparation scientifique des professeurs de mathématiques.

On sait qu'au précédent Congrès, tenu à Dresde, en 1907, la Commission d'enseignement instituée par la Société des naturalistes et médecins allemands a terminé ses travaux par un rapport sur la *préparation scientifique des candidats à l'enseignement secondaire supérieur*[1]. Les propositions de Dresde ont fait l'objet d'un intéressant débat, organisé par la section 12 (Enseignement) et auquel ont pris part les représentants des différentes sections des sciences mathématiques, physiques et naturelles. Après une introduction de M. le Prof. Dr Klein, qui a rappelé les points essentiels du rapport, la discussion a principalement porté sur le groupement des branches scientifiques dans les études des candidats à l'enseignement, sur les liens entre la Physique et les Mathématiques, et sur les conditions que devrait remplir un cours universitaire de Physique.

Séance administrative de l'Association des mathématiciens allemands. — La séance est présidée par M. Klein, président. M. Krazer donne un aperçu de l'état actuel de la société qui compte 727 membres ; puis viennent les rapports de différentes commissions, notamment celui de M. Eug. Müller, sur la publication des travaux de Schröder et celui de M. Stæckel, sur la publication des œuvres d'Euler. Sur la proposition de son comité, l'Association décide à l'unanimité d'appuyer par tous ses moyens la publication des travaux d'Euler et de mettre 5000 fr. à la disposition du *Fonds Euler* qui vient d'être créé par la Commission suisse en faveur de la dite publication. C'est là un mouvement généreux et dont on ne peut que féliciter vivement les mathématiciens allemands.

M. Klein donne ensuite un aperçu de l'organisation de la *Commission internationale de l'enseignement mathématique,* dont il est président. Le plan de travail très vaste qui a été élaboré par le Comité central exige la création de sous-commissions nationales ; pour l'Allemagne celle-ci sera constituée par la Commission (Deutscher Ausschuss) qui a collaboré aux rapports destinés à la Société des naturalistes et médecins allemands.

Le prochain Congrès aura lieu à *Salzbourg,* en 1909. H. F.

Association Suisse des Professeurs de Mathématiques, Baden 1908.

L'Association suisse des professeurs de mathématiques a tenu sa 9e assemblée à Baden, le 4 Octobre 1908, sous la présidence de M. H. Fehr. La réunion avait été organisée de manière à permettre à ses membres d'assister aux séances de la Société suisse des professeurs de Gymnase, qui siégeait à Baden les 4 et 5 Octobre.

---

[1] La traduction in extenso de ce rapport a été reproduite dans l'*Ens. math.* du mois de janvier 1908 (p. 5-49).

Communications : 1. RUEFLI (Berne). *Ueber grösste und kleinste Werte und ihre Behandlung in der Sekundarschule* (des maxima et minima aux écoles secondaires). — L'auteur rattache son exposé à la notion de fonction qui peut être utilisée sous une forme tout à fait élémentaire déjà dans l'enseignement des écoles secondaires (écoles primaires supérieures). Il étudie successivement les problèmes les plus simples sur les maxima et minima : 1° au point de vue du calcul purement numérique ; 2° à l'aide du calcul algébrique dans leurs exemples les plus élémentaires ; 3° par les constructions graphiques.

Dans la résolution algébrique, les problèmes élémentaires empruntés à la Géométrie, notamment ceux qui concernent l'aire d'une figure, donnent généralement lieu à deux types :

$$y = a^2 - x^2 \; ; \qquad y = a^2 + x^2$$

auxquels se ramènent

$$y = a + bx \pm x^2 .$$

Puis viennent les problèmes conduisant à l'un des deux types suivants :

$$y = ax^2 - x^3 \; , \qquad y = ax - x^3 .$$

Pour quelques groupes de problèmes géométriques il existe des solutions élémentaires qui sont si simples, qu'elles peuvent être traitées sans difficulté dans toute école secondaire.

2. JACCOTET (Lausanne), *Démonstration du théorème de Descartes.* Il s'agit du théorème de Descartes dans la théorie des équations algébriques. L'auteur présente une démonstration qui est une simple conséquence de la notion de continuité.

3. FEHR et GUBLER, *Le 4e Congrès international des mathématiques ;* Rome, avril 1908. M. Fehr présente un rapport d'ensemble sur le congrès, tandis que M. Gubler examine plus particulièrement les travaux de la section 4 (Histoire, Philosophie et Enseignement).

4. *Commission internationale de l'enseignement mathématique.* M. Fehr, secrétaire général de la Commission, donne un aperçu de l'organisation de la commission et du plan général des travaux.

5. *Publication des œuvres d'Euler.* Le président expose l'état actuel des pourparlers concernant la publication des *œuvres d'Euler.* On sait que la Société helvétique des sciences naturelles a été appelée à examiner cette question et qu'elle prendra sans doute une décision à la prochaine réunion annuelle en 1909. Après discussion, l'assemblée de Baden a voté à l'unanimité une résolution dans laquelle *elle se déclare favorable à cette publication, qui, non seulement est d'un grand intérêt historique, scientifique et patriotique, mais qui aura également une heureuse influence sur l'enseignement des mathématiques.*

Séance administrative. — L'assemblée a réélu le comité sortant de charge ; Président, H. Fehr (Genève) ; secrétaire-trésorier, O. Juzi (Zurich), et H. Egli (Lucerne).

La prochaine réunion aura lieu à *Berne*, le 22 mai 1909.

Pour la publication des œuvres d'Euler.

La question de la publication des œuvres d'Euler a fait un progrès très sensible au cours de l'année 1908. Il faut espérer qu'en 1909 elle pourra faire un pas décisif dans la voie de la réalisation des vœux qui ont été exprimés dans les réunions mathématiques et tout particulièrement à Rome, au 4e Congrès international des mathématiciens. La Société helvétique des sciences naturelles a été sollicitée de prendre en main cette entreprise. Elle a renvoyé l'étude de la question à une commission de sept membres, présidée par M. Rudio, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale.

Etant donné les difficultés de toute nature que présente une publication de ce genre, il est de toute nécessité que l'étude préalable du projet soit faite d'une manière approfondie, et que la commission suisse obtienne, non seulement une collaboration active de mathématiciens d'autres pays, mais qu'elle trouve aussi l'appui financier indispensable à cette entreprise.

La société mathématique allemande a compris que ce double appui était indispensable. La commission d'Euler, qu'elle a nommée à Dresde en 1907, (MM. Pringsheim, Stäckel et Krazer), a déjà prêté son concours à la commission suisse et s'est assuré la collaboration d'autres savants ; de plus, comme on l'a vu plus haut, la société a voté un subside de 5000 fr. en faveur de la publication.

En Suisse, sans qu'aucun appel n'ait encore été lancé, la Commission a déjà reçu 15,000 fr. Il y a lieu d'espérer que, dès que la souscription pour le *Fonds Euler* sera rendue publique, de nouvelles sommes ne tarderont pas à parvenir au comité et viendront en quelque sorte appuyer la demande qui sera adressée aux pouvoirs publics.

Il n'est guère besoin d'insister dans cette Revue sur l'importance d'une publication partielle ou totale des œuvres d'Euler. Nous croyons cependant intéresser nos lecteurs en reproduisant un passage de la communication sur « des projets de publication de mémoires d'Euler » présentée à Cologne par M. Félix Muller.

« L'étude des travaux d'Euler, qui serait considérablement facilitée par une nouvelle édition, doit être vivement recommandée à tous les étudiants en mathématiques. Dans son discours sur Jacobi, Dirichlet dit que le grand géomètre développa ses connaissances mathématiques non pas par la fréquentation des cours,

mais par l'étude approfondie des travaux d'Euler et de Lagrange. Euler est le meilleur maître ; tous les professeurs devraient s'en inspirer. L'étude de ses mémoires n'apporte pas seulement des connaissances, mais par leur exposé simple et clair, elle procure un véritable plaisir et elle développe à la fois le savoir et la faculté de travail. Les méthodes par lesquelles Euler aborde et résoud les problèmes servent constamment de modèles. Avec une grande franchise il montre le ou les chemins par lesquels il est parvenu aux résultats ; mieux que tout autre, il sait communiquer à ses élèves l'amour avec lequel il étudie les problèmes, et, sans effort, ses lecteurs s'approprient peu à peu ses méthodes de travail ».

« On ne saurait trop recommander l'étude des mémoires d'Euler aux candidats à l'enseignement mathématique, et nous sommes persuadés qu'une nouvelle édition d'un choix de mémoires appropriés à ce but serait bien accueillie de tous les côtés. Elle contribuerait à maintenir et à développer dans une large mesure l'intérêt scientifique des maîtres de l'enseignement secondaire supérieur ».

Personne ne contestera cette influence heureuse, mais pour que le but puisse être atteint, ne conviendrait-il pas de publier dans une langue moderne ceux des mémoires qui ont été imprimés en latin ? La réponse ne fait pas de doute. De nos jours, les étudiants en sciences qui ont passé par les études classiques forment déjà une petite minorité, et leur nombre tendra à diminuer de plus en plus. C'est là un fait dont il faut tenir compte, si l'on veut faire une œuvre vraiment utile à la Science et à l'enseignement.

Nous sommes certains d'être l'interprète de la plupart de nos lecteurs en exprimant le vœu que, malgré les objections et les difficultés que soulèvera la question des langues, la Commission de publication tienne compte de l'intérêt général et fasse de cette nouvelle édition un ouvrage qui pourra être consulté et étudié par un nombre de mathématiciens aussi grand que possible.

H. Fehr.

Etats-Unis d'Amérique.

Thèses de doctorat

Thèses présentées aux principales universités américaines pendant l'année universitaire 1907-1908 ; le nom de l'université est indiqué entre parenthèses, après le nom de l'auteur :

F. G. Bill (Yale) : An *a priori* existence theorem for three dimensions in the calculus of variations. — R. L. Börger (Chicago) : On the determination of ternary linear groups in the Galois field of order p^2. — G. G. Chambers (Pennsylvania) : The groups of isomorphisms of the abstract groups of order p^2q. — G. M. Conwell (Princeton) : The 3-space P.G. (3,2) and its group. — Miss E. B.

Cowley (Columbia) : Plane curves of the eighth order having two four-fold points with distinct tangents and no other point singularities. — C. F. Craig (Cornell) : On a class of hyperfuchsian functions. — F. J. Holder (Yale) Multiple series. — L. Ingold (Chicago) : Vector interpretation of symbolic parameters. — F. Irwin (Harvard) : The invariants of linear differential expressions. — A. J. Lennes (Chicago) : Curves in non-metrical analysis situs with applications to the calculus of variations and differential equations. — J. J. Luck (Virginia) : The structures of the nonintegrable groups of seven parameters. — L. B. Lytle (Yale) : Multiple series over iterable fields. — C. N. Moore (Harvard) : On the theory of convergence factors and some of its applications. — F. W. Owens (Chicago) : The introduction of ideal elements and construction of projective n-space in terms of a plane system of points involving order and Desargues's theorem. — E. C. F. Phillips (Johns Hopkins) : On the pentacardioid. — J. H. Scarborough (Vanderbilt) : The computation of the orbit of planet. — H. L. Slobin (Clark) : On plane quintic curves. — Miss M. E. Sinclair (Chicago) : On a compound discontinuous solution connected with the surface of revolution of minimum area. — Miss A. L. Van Benschoten (Cornell) : The birational transformations of algebraic curves of genus 4. — N. R. Wilson (Chicago) : Isoperimetric problems which are reducible to non-isoperimetric problems. — H. C. Wolff (Wisconsin) : The continuous plane motion of a liquid bounded by two right lines. —Miss E. R. Wortington (Yale) Some theorems on surfaces.

D'après le journal *Science* le nombre total des doctorats a été de 360, dont 184 pour les sciences (22 pour les mathématiques).

Prix WOLFSKEHL concernant le grand théorème de FERMAT.

Nous avons annoncé, il y a un an, que la Société scientifique de Göttingue a reçu d'un mathématicien, P. Wolfskehl, décédé à Darmstadt, une somme de 100.000 marks, qui sera délivrée à celui qui donnera le premier une démonstration du grand théorème de Fermat. Voici quelques extraits des conditions du concours :

« Dans son testament, M. P. Wolfskehl observe que Fermat (*Œuvres*, Paris, 1891, t. I, p. 291, observ. II) affirme *mutatis mutantis* que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions entières pour tous les exposants n qui sont des nombres premiers impairs. Il y a lieu de démontrer ce théorème soit en général, suivant les idées de Fermat, soit en particulier, conformément aux recherches de Kummer (*Journal de Crelle*, t. 40, p. 130 et suiv. ; *Abh. der Akad. d. Wiss.*, Berlin, 1857), pour tous les exposants n pour lesquels il a, en somme, une valeur. Pour plus amples renseignements, consulter : Hilbert, *Theorie der algebraischen Zahlkörper*

(*Jahresb. der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. IV, 1894-1895, § 172-173, et *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, *Bd. I*, Teil. 2, Arithmetik und Algebra, 1900-1904, IC. *4b*, p. 713).

« La fondation du prix a lieu sous les conditions suivantes : La *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen* décidera en toute liberté à qui le prix doit être attribué. Elle refuse d'accepter *tout manuscrit* ayant pour objet de concourir à l'obtention du prix du théorème de Fermat ; elle ne prendra en considération que les Mémoires mathématiques qui auront paru sous forme de monographie dans des journaux périodiques ou qui sont en vente sous forme de volumes, en librairie. La Société prie les auteurs de pareils Mémoires de lui en adresser au moins cinq exemplaires imprimés.

« L'attribution du prix par la Société aura lieu au plus tôt deux ans après la publication du Mémoire à couronner. Cet intervalle de temps a pour but de permettre aux mathématiciens allemands et étrangers d'émettre leur opinion au sujet de l'exactitude de la solution publiée. »

Les lecteurs qui désirent des renseignements plus complets, pourront consulter les *Math. Ann.* (1908), ou le *Jahresber. der deutschen Mathematiker-Vereinigung* (1908, p. 111 à 113) ; ils y trouveront quelques remarques de M. Klein, dans lesquelles le savant professeur insiste, entre autre, sur le fait qu'il s'agit d'une étude scientifique basée sur la décomposition en facteurs des nombres algébriques et se rattachant nécessairement aux travaux cités plus haut. Le désir de gagner 100,000 marks est évidemment beaucoup plus répandu que la compréhension des théories fondamentales des mathématiques modernes. Aussi, comme on devait s'y attendre, plusieurs centaines de soi-disantes démonstrations sont déjà parvenues à la Société scientifique de Göttingue. La participation des mathématiciens proprement dits est en réalité très faible. Les envois sont dus à des étudiants ou étudiantes, des ingénieurs, directeurs de banques, etc.

La Société scientifique de Göttingue ne publiera pas de rapport sur les envois qu'elle continuera sans doute à recevoir encore pendant longtemps. S'il y a lieu, elle se bornera à faire connaître le lauréat dans le délai indiqué ci-dessus.

Nominations et distinctions.

M. P. Boutroux est chargé du cours de Mécanique rationnelle à l'Université de Poitiers, en remplacement de M. Lebesgue, qui prend la chaire de Calcul différentiel et intégral.

M. C. Caratheodory, privat-docent, est nommé professeur à l'Université de Bonn.

M. G. Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris, est nommé membre de l'Académie des Sciences de Halle.

M. G.-H. Darwin, de Cambridge, est nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences de Berlin.

M. Goursat, répétiteur adjoint, est nommé répétiteur titulaire d'Analyse à l'Ecole polytechnique de Paris, en remplacement de M. H. Laurent, décédé.

M. Hagen, directeur de l'Observatoire du Vatican, est nommé membre de l'Académie des Sciences de Halle.

M. W. Hartwell est nommé professeur extraordinaire de mathématique à l'Université de Kansas, E.-U.

M. Helmert, directeur de l'Institut géodésique de Potsdam, est nommé membre associé étranger de la Royal Society de Londres.

M. Herglotz, professeur extraordinaire à l'Université de Göttingue, est nommé professeur extraordinaire à l'Ecole technique supérieure de Vienne.

M. Laisant, répétiteur auxiliaire de Mécanique, est nommé répétiteur titulaire à l'Ecole polytechnique de Paris, en remplacement de M. Fouret, admis à la retraite.

M. G. Loria, professeur à l'Université de Gênes, est nommé membre honoraire de la Société mathématique d'Amsterdam.

M. E. Maillet, répétiteur auxiliaire d'Analyse, est nommé répétiteur adjoint à l'Ecole polytechnique de Paris, en remplacement de M. Goursat, nommé répétiteur titulaire.

M. Ernst Neumann, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Marbourg.

M. Erhard Schmidt (Dorpat), privat-docent à l'Université de Bonn, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Zurich.

M. Schur, de l'Ecole technique supérieure de Karlsruhe, est nommé professeur à l'Université de Strasbourg, en remplacement de M. Reye, admis à la retraite.

M. Volterra, de l'Université de Rome, est nommé membre de l'Académie des Sciences de Halle.

NOTES ET DOCUMENTS

Rapport sur la réforme de l'enseignement mathématique dans les universités autrichiennes[1].

« Le nombre des professeurs de mathématiques et, par suite, l'organisation de l'enseignement de cette branche fondamentale dans les facultés de philosophie des universités autrichiennes est bien loin de satisfaire aux exigences, même les plus modestes, de la science moderne. Aussi, lorsque la Faculté de Philosophie de l'Université de Cracovie proposa aux autres universités de présenter au Ministère de l'Instruction publique un rapport sur ce sujet, sa proposition rencontra-t-elle une approbation générale.

Depuis un demi-siècle, les exigences auxquelles doit satisfaire l'enseignement des mathématiques à l'Université se sont profondément modifiées et multipliées.

Si l'enseignement universitaire des Mathématiques, considérées comme branche principale, veut répondre d'une facon rigoureuse aux exigences modernes, il ne doit plus être la simple continuation de l'enseignement au gymnase : il faut, au contraire, qu'il s'occupe aussi des Mathématiques élémentaires, brièvement il est vrai, mais d'une façon rigoureusement scientifique. En d'autres termes, il faut consacrer actuellement un certain nombre d'heures à l'enseignement des mathématiques élémentaires.

En outre, de nouvelles branches mathématiques se sont développées et l'importance scientifique qu'elles ont actuellement est si réelle, qu'elles doivent être introduites nécessairement dans les programmes d'une manière régulière. Comment pourrait-on, par exemple, laisser de côté dans l'enseignement universitaire la nouvelle *Théorie des fonctions* ou la *Géométrie synthétique?* L'enseignement de ces nouvelles branches exige nécessairement des heures supplémentaires. Mais, en raison du caractère déductif des mathématiques, on ne dispose que de peu de place pour les branches nouvelles dans l'ensemble des cours actuels ; d'autre part, il est nécessaire que les cours élémentaires soient donnés chaque année, d'autant plus qu'ils sont indispensables aux étudiants qui désirent suivre avec profit l'enseignement de la Physique. Or cela n'est possible qu'avec un nombre suffisant de professeurs.

Mais il y a encore une autre raison pour laquelle *l'enseignement des Mathématiques, considérées comme branche principale*, exige un plus grand nombre de professeurs. De même que l'Histoire naturelle ou les sciences historiques, les Mathématiques se sont différenciées, à l'heure actuelle si profondément, qu'on doit les diviser en plusieurs branches spéciales différant

[1] Ce rapport a été rédigé, sur l'initiative de l'Université de Cracovie, dans une réunion tenue à Vienne par les délégués des différentes Facultés de Philosophie de l'Autriche (Czernowitz, Graz, Innsbruck, Cracovie, Lemberg, Prague (univ. allem.), Prague (univ. bohème), Vienne). Il a été transmis aux Ministères de l'Instruction publique et des Finances, après avoir été approuvé à l'unanimité par les dites Facultés. — (*La Red.*)

entre elles par le contenu et la méthode. Il faut distinguer pour le moins dans les *Mathématiques pures* les trois grands domaines suivants :

1° Théorie des nombres et Algèbre supérieure.

2° L'Analyse supérieure, qui comprend le Calcul différentiel et intégral, la théorie des équations différentielles, le Calcul des variations, la Théorie des fonctions, etc.

3° La Géométrie analytique et synthétique, y compris la théorie des groupes de transformation.

En dehors de ces domaines, appartenant aux Mathématiques pures, il faudrait encore mentionner celles des branches des *Mathématiques appliquées* qui ne peuvent être enseignées que par des spécialistes, étant donné leur relation étroite avec les Mathématiques pures. Parmi celles-ci il faut nommer avant tout, abstraction faite de l'Astronomie théorique et de la Physique mathématique :

1° Le Calcul des probabilités y compris ses applications diverses.

2° La Mécanique analytique, et enfin,

3° La Géométrie descriptive et les diverses méthodes graphiques (Statique graphique, méthodes graphiques d'intégration), d'une importance capitale pour la conception de l'espace.

Si, d'une part, l'on tient compte du fait qu'aucun mathématicien, exception faite de quelques rares esprits de génie, ne peut posséder à fond plus d'un des domaines mentionnés ; si l'on considère d'autre part qu'un enseignement captivant, capable d'inspirer à l'auditeur l'amour de la science et de l'initier à la méthode d'investigation, ne peut être donné que par un professeur s'adonnant lui-même aux recherches, on comprendra qu'il est impossible que toute la charge de l'enseignement des Mathématiques ne soit supportée que par deux professeurs.

Considérons maintenant *les Mathématiques comme branche secondaire*. A ce propos, il faut appuyer sur le fait que l'importance des Mathématiques pour les autres sciences s'est considérablement accrue depuis un demi-siècle. La Physique, et avec elle les Mathématiques, se sont profondément introduites dans les sciences naturelles (physiques et chimiques) et s'y introduisent tous les jours plus profondément. Tous les naturalistes devraient connaître la Thermodynamique, et la Chimie théorique n'est accessible aujourd'hui qu'aux personnes versées dans cette science. Mais alors il ne peut être question, pour l'étudiant, de Thermodynamique, sans qu'il possède certaines connaissances du Calcul différentiel et intégral. Il faut donc que ceux qui se destinent à l'étude des sciences naturelles aient la possibilité d'acquérir certaines connaissances des Mathématiques supérieures. Or cet enseignement ne peut être donné par aucun des cours du programme des mathématiques considérées comme branche principale. En effet, en raison du peu de temps dont on dispose, l'enseignement des Mathématiques considérées comme branche secondaire doit être tout autre. On devra laisser une part plus grande à l'intuition ; en outre, pour faciliter la compréhension de certaines notions et de certaines propositions, il ne faudra pas les traiter dans toute leur généralité, mais savoir, au contraire, se limiter comme il convient. On s'est déjà rendu compte de cet état de choses dans la littérature mathématique ; des auteurs de premier ordre ont publié toute une série de livres d'études conformes à cet ordre d'idées, en allemand, français, italien et anglais (Lorentz, Appell, Burkhardt, Nernst et Schönflies, Perry, etc.).

En d'autres termes, l'enseignement des Mathématiques considérées comme

branche secondaire, doit posséder une organisation spéciale, indépendante de celle concernant l'enseignement des Mathématiques considérées comme branche principale.

Pour déterminer le nombre minimum de professeurs pouvant fournir un enseignement répondant dans une certaine mesure aux besoins qui viennent d'être mentionnés, nous devons nous représenter le programme qui s'y rapporte. Les particularités d'un tel programme dépendront naturellement des vues personnelles des professeurs en question et des circonstances particulières auxquelles ce programme devra se soumettre dans chaque université. Cependant, en ce qui concerne seulement les Mathématiques pures, il ne différerait pas essentiellement du modèle suivant. (Pour abréger l'exposé, nous indiquons la division des études par années et non pas par semestres).

Plan d'un programme normal d'études a l'université.

Première année. — Introduction à l'Analyse mathématique et au Calcul différentiel, éléments du Calcul intégral, avec exercices, 5 heures par semaine.

Introduction à la Géométrie. Premiers principes de la Géométrie analytique et synthétique, avec exercices, 3 heures par semaine.

En outre :

Un cours de mathématiques pour les étudiants en sciences naturelles (physiques et chimiques), avec exercices, 5 heures par semaine.

Deuxième année. — Calcul intégral et premiers principes de la théorie des fonctions de variables complexes, avec exercices, 5 heures par semaine.

Géométrie analytique et Géométrie différentielle, avec exercices, 5 heures par semaine.

Propriétés principales des équations algébriques et éléments de la théorie des nombres, avec exercices, 3 heures par semaine.

Troisième et quatrième année, et éventuellement années subséquentes. — Cours supérieurs sur la théorie des équations différentielles, le Calcul des variations, la théorie des fonctions, la théorie des groupes de transformation, sur les principes de l'Arithmétique et de la Géométrie, etc., au moins 3 heures par semaine.

Séminaire pour l'Analyse mathématique, 2 heures par semaine.

Séminaire pour la Géométrie, 2 heures par semaine.

Séminaire pour la théorie des nombres et l'Algèbre supérieure, 2 heures par semaine.

Mais il faut encore bien spécifier que le programme ci-dessus mentionné n'indique que ce qui est absolument nécessaire aux futurs maîtres de gymnases ; si l'on veut obtenir une préparation plus étendue, ce qui est du reste la tâche principale de l'université, il faut encore augmenter ce programme de toute une série de cours sur les domaines spéciaux des mathématiques pures et sur les différentes branches des mathématiques appliquées.

Le programme indiqué ne correspond donc qu'à un *minimum*. Or, l'exécution d'un tel programme demande au moins trois professeurs, et encore ce nombre ne suffit-il que si deux de ces trois chaires disposent chacune d'un assistant ; les exercices correspondant aux cours élémentaires devront être dirigés en effet par les assistants sous le contrôle des professeurs. Car, pour que les exercices soient vraiment profitables, il faut qu'ils soient individualisés, comme c'est le cas depuis longtemps dans les écoles supérieures techniques pour toutes les branches pratiques et pour la Géométrie descriptive.

C'est-à-dire qu'il ne suffit pas d'exécuter dans la salle de cours des exemples au tableau noir avec un ou plusieurs étudiants, mais il faut leur proposer un choix d'exemples parmi lesquels ils prendront alors d'eux-mêmes les problèmes à résoudre sous la direction personnelle du professeur et de l'assistant. L'activité personnelle, même à un degré si faible, est une condition particulièrement nécessaire au futur maître, car il devra apporter lui-même, dans son enseignement, de la sûreté et de l'entrain. D'autre part, la réforme proposée pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires exige aussi préalablement une préparation conforme du maître.

Etant donné que dans tout pays l'instruction publique dans son ensemble dépend en première ligne de l'enseignement dans les universités, c'est-à-dire qu'une bonne organisation de l'enseignement universitaire est d'une importance capitale pour l'instruction générale, les Facultés de Philosophie des universités autrichiennes estiment qu'il est urgent de satisfaire ces exigences de l'enseignement universitaire.

Il devrait donc y avoir au moins trois chaires de mathématiques dans la Faculté de Philosophie de toute université autrichienne, avec les attributions suivantes :

1) Pour la théorie des nombres et l'algèbre supérieure,

2) pour l'Analyse mathématique,

3) pour la Géométrie.

Au moins deux de ces chaires devront être des chaires ordinaires pourvues d'*assistants*.

Mais, comme dans tout grand pays, il doit y avoir des universités pouvant offrir aussi dans une plus large mesure des études scientifiques spéciales, il est nécessaire, qu'en outre des chaires et des places d'assistants qui viennent d'être mentionnées, les Facultés philosophiques des grandes universités présentent aussi, pour le moins, les chaires suivantes :

1) Une deuxième chaire ordinaire pour l'Analyse supérieure,

2) une chaire ordinaire, pourvue d'un assistant, pour les mathématiques appliquées, chaires qui manquent encore dans les universités autrichiennes.

C'est une comparaison avec les universités des autres pays qui nous permettra le mieux de voir combien ces prétentions sont modestes. Pour établir cette comparaison sur une base solide, nous avons établi dans le *supplément* un tableau des professeurs de mathématiques pures et appliquées dans les universités allemandes, italiennes, françaises et russes ; pour cela nous nous sommes basés sur le « Jahrbuch Minerva. » Pour l'Autriche, l'Allemagne, l'Italie et la Russie, nous n'avons indiqué que les professeurs ; pour la France, par contre, nous y avons ajouté les « Chargés de Cours » et les « Maîtres de Conférences » et cela, parce que ces derniers doivent être considérés comme correspondant aux professeurs extraordinaires des universités autrichiennes, allemandes, italiennes et russes. Parmi les universités italiennes, nous avons complètement laissé de côté celles de Camerino, Macerata, Perrugia, Sassari, Siena et Urbino, car aucune de ces dernières ne renferme une « Facolta di Scienze fisiche, matematiche e naturali. » Avant d'établir la comparaison, nous devons encore faire les remarques suivantes : il est parfois difficile de savoir si telle ou telle chaire doit être considérée comme une chaire de mathématiques ; des difficultés de ce genre ne se rencontrent pas dans les universités autrichiennes, mais bien dans celles des autres pays ; or il suffira au connaisseur de jeter un coup d'œil dans le « Jahrbuch Minerva » pour se rendre compte que toutes les chaires pour lesquelles la moindre apparence

de doute se présentait, ont toujours été omises dans la liste du supplément. Par conséquent l'état actuel des choses dans les universités autrichiennes est encore passablement plus désavantageux que ne le montre la comparaison qui va suivre :

Du tableau général qui a été placé à la fin du Rapport, nous pouvons déduire les moyennes suivantes :

Nombre moyen des professeurs de mathématiques pures et appliquées calculé pour une université de chaque pays[1]

	Professeurs ordinaires.	Professeurs extraordinaires.	TOTAUX
Autriche	1.6	0.4	2.0
Allemagne	2.1	1.3	3.4
Italie	3.9	0.5	4.4
France	2.7	1.0	3.7
Russie	3.7	0.4	4.1

Dans ce tableau, les professeurs honoraires (Honorarprofessoren) des universités allemandes, et, conformément à une remarque déjà faite, les « Chargés de Cours » et les « Maîtres de Conférences » des universités françaises ont été comptés parmi les professeurs extraordinaires.

La seule inspection de ce tableau démontre directement, même sans autres commentaires, la supériorité manifeste des conditions actuelles des universités allemandes, italiennes, françaises et russes sur celles des universités autrichiennes, même au cas où les désirs exprimés plus haut trouveraient leur satisfaction de la part du Ministère. Mais, pour se rendre compte réellement du désavantage des universités autrichiennes sur les universités françaises, il faut encore faire les observations suivantes :

Les Lycées français possèdent une *classe de mathématiques* et une *classe de mathématiques spéciales:* ces classes sont fréquentées après l'obtention du baccalauréat (diplôme de maturité) par tous ceux qui se destinent aux sciences mathématiques et sciences physiques; dans ces classes, les élèves restent au moins deux ans, s'occupent presque exclusivement de mathématiques et y apprennent très à fond l'Arithmétique théorique, la théorie des

[1] Pour la *Suisse*, ces nombres sont 2,8 ; 0,6 ; 3,5.

séries, la théorie des fractions continues, la théorie des fonctions réelles de variables réelles, le Calcul différentiel, l'Algèbre supérieure et la Géométrie analytique et synthétique. Par conséquent, plus de la moitié des cours qui ont été incorporés dans le programme proposé plus haut, ne se trouvent pas dans les « Facultés des Sciences » de France.

Si l'on compare ensuite spécialement l'université de Vienne, la seule qui possède plus de deux professeurs de mathématiques, à celles des autres pays, on trouve que les universités suivantes sont aussi bien et souvent mieux conditionnées que celle de Vienne :

1) En Allemagne : Fribourg, Heidelberg, Munich, Strasbourg, Berlin, Breslau, Göttingue, Halle, Leipzig et Iena.

2) En Italie ; Bologne, Catane, Messine, Naples, Padoue, Palerme, Pavie, Pise, Rome et Turin.

Ainsi, dans ces deux pays, le nombre des universités mieux conditionnées que celle de Vienne dépasse celui de toutes les universités autrichiennes.

3) En France : Lille, Nancy, Paris et Toulouse.

4) En Russie : Kasan, Kiev, Moscou, Odessa et St-Pétersbourg.

« En présence de ces circonstances, les Facultés de Philosophie des universités autrichiennes se font un devoir d'attirer l'attention du Ministère sur le fait que le nombre des chaires de mathématiques ne répond plus aux exigences scientifiques et didactiques croissantes, et qu'à ce point de vue l'Autriche est bien en arrière des autres pays mentionnés. Chacune de nos universités se rend compte de cet état de choses, et présentera, conformément à ses besoins, des propositions concernant l'augmentation du nombre des chaires de mathématiques. Les Facultés de philosophie de toutes les universités autrichiennes prient le Ministère, auquel sont confiés tous les intérêts scientifiques du pays, de défendre avec insistance la réalisation de ces propositions.»

Note de la Rédaction. — Le Rapport est suivi d'un supplément contenant les noms des professeurs de mathématiques pures et appliquées des universités autrichiennes, allemandes, italiennes, françaises et russes. Nous le résumerons en un tableau[1] donnant le *nombre des chaires de mathématiques*.

* * *

Ce rapport montre que dans la plupart des universités autrichiennes, l'enseignement mathématique est encore insuffisant. Les réformes proposées en vue d'une meilleure organisation des études ont l'avantage d'être à la fois très rationnelles et fort modestes ; aussi, peut-on espérer qu'elles seront bien accueillies et réalisées dans un avenir très prochain.

Dans d'autres pays des réformes analogues sont désirables, aussi avons-nous cru utile de signaler ici cette démarche collective et unanime des universités autrichiennes. Leur rapport constitue un document précieux qui sera examiné avec profit par tous ceux qui travaillent à la réorganisation de l'enseignement mathématique. A l'appui de leur demande les auteurs peuvent encore rappeler le vœu suivant adopté à l'unanimité par le 3me Congrès international des mathématiques, (Heidelberg. 1904) : « Le 3me Congrès exprime sa plus vive sympathie aux efforts des mathématiciens tendant à obtenir partout les moyens indispensables aux études mathématiques sous

[1] Pour la *Suisse* les nombres correspondants sont : Bâle (3 ; 0 ; 3) ; Berne (3 ; 2 ; 5) ; Genève (2 ; 0 ; 2) ; Lausanne, Faculté technique (3 ; 1 ; 4), Zurich, Ecole polyt., section normale (5 ; 0 ; 5) ; Zurich, université (1 ; 1 ; 2). — *(Réd.)*

leur forme moderne (nombre suffisant de chaires, bibliothèques bien fournies, salles de dessin et de travaux pratiques, collections de modèles, etc.) et émet le vœu que les Gouvernements et Autorités scolaires donnent aux mathématiciens l'appui qui leur est nécessaire. »

	UNIVERSITÉS	Professeurs ordinaires.	Professeurs extraordinaires.	TOTAUX
Autriche.	Czernowitz	1	—	1
	Graz	2	—	2
	Innsbruck	2	—	2
	Cracovie	2	—	2
	Lemberg	1	—	1
	Prague (univ. allem.)	1	1	2
	Prague (univ. bohême)	1	1	2
	Vienne	3	1	4
Allemagne.	Fribourg	2	2	4
	Heidelberg	1	3	4
	Erlangen	2	—	2
	München	3	3	6
	Wurzbourg	2	—	2
	Strasbourg	2	2	4
	Berlin	3	2	5
	Bonn	1	2	3
	Breslau	3	1	4
	Göttingen	4	1	5
	Greifswald	2	1	3
	Halle	3	1	4
	Kiel	2	—	2
	Königsberg	2	1	3
	Marbourg	1	2	3
	Münster	2	—	2
	Leipzig	4	2	6
	Tübingen	2	1	3
	Giessen	2	1	3
	Jena	2	2	4
	Rostock	1	—	1
Italie.	Bologne	4	—	4
	Cagliari	1	1	2
	Catania	4	2	6
	Ferrara	1	—	1
	Gênes	2	1	3
	Messine	4	—	4
	Modena	1	1	2
	Naples	7	—	7
	Padoue	5	1	6
	Palerme	5	1	6
	Parme	1	1	2
	Pavie	4	—	4
	Pise	6	—	6
	Rome	7	—	7
	Turin	6	—	6
France.	Besançon	2	—	2
	Bordeaux	2	1	3
	Caen	2	1	3
	Clermont-Ferrand	2	—	2
	Dijon	2	1	3
	Grenoble	2	1	3
	Lille	2	2	4
	Lyon	2	1	3
	Marseille	3	—	3
	Montpellier	2	1	3
	Nancy	4	—	4
	Paris	9	4	13
	Poitiers	2	—	2
	Rennes	2	1	3
	Toulouse	2	2	4
Russie.	Charkov	3	—	3
	Dorpat	3	—	3
	Helsingfors	1	—	1
	Kasan	4	—	4
	Kiev	4	1	5
	Moscou	4	2	6
	Odessa	3	1	4
	St-Pétersbourg	7	—	7
	Varsovie	3	—	3

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1908-1909.

(Suite).

AUTRICHE-HONGRIE

Graz. — DANTSCHER : Allgemeine Arithmetik (auch für Naturhistoriker etc.), Einleitung in die Analysis, 5 ; Math. Seminar, 2. — DAUBLEBSKY v. STERNECK : Algebra, 4 ; Ausgew. Kapitel der Integralrechnung, 1 ; Math. Seminar, 2. — STREISSLER : Darst. Geometrie (Zentralprojektion), 3.

Innsbruck. — GMEINER : Analyt. Geometrie des Raumes, 3 ; Zahlentheorie, 3 ; Uebungen im math. Seminar, 2. — ZINDLER : Anwendungen der Diff. und der Integralrechnung auf Geometrie und Bewegungslehre, 6 ; Math. Seminar, 1. — MENGER : Linearperspektive, 4.

Prag. *Deutsche Universität.* — PICK : Uebersicht der Infinitesimalrechnung, 3 ; Gruppentheorie und algebr. Gleichungen, 2 ; Seminar, 2. — GRÜNWALD : Elemente der Differentialgeometrie, 3 ; Ausgew. Kapitel aus der analyt. Geometrie, 2. — WEINEK : Ueber Refraktion, Aberration, Praecession und Nutation, 3. — OPPENHEIM : Einf. in die Theorie der Kartenprojektionen, 1 ; Niedere und Einleitung in die höh. Geodäsie, 2.

Wien ; *Universität.* — v. ESCHERICH : Einl. in die Diff. u. Integralrechnung, 5 ; Proseminar, 1 ; Seminar, 2 ; MERTENS : Zahlentheorie, 5 ; Uebungen im math. Seminar, 2 ; Ueb. im math. Proseminar, 1. — WIRTINGER : Funkiönentheorie, 5 ; Math. Seminar, 2 ; Math. Proseminar, 1. — KOHN : Einleitung in die synth. Geometrie, 4 ; Ueb. zu dieser Vorlesung, 1 ; Kontinuierliche Gruppen, 2. — TAUBER : Versicherungsmathemathik, 4. — BLASCHKE : Einf. in die mathematische Statistik, 1. 3. — HAHN : Variationsrechnung, 3. und v. SCHRUTKA : Besprechung neuerer math. Arbeiten, 2. — HANNI : Theorie der ganzen transzendenten Funktionen, 2. — v. SCHRUTKA : Theorie und Anwendung der Determinanten, 1. — v. HEPPERGER : Sphär. Astronomie, 4. Geogr. Ortsbestimmung, 1. — SCHRAM : Astron. Chronologie (mit besonderer Rücksicht auf Historiker), 1. — PREY : Die Figur der Erde, 2. — HERZ : Bahnbestimmung, 1.

FRANCE

Paris ; *Faculté des Sciences.* — Cours de mathématiques du 1er semestre 1908-09 (Ouverture le 3 novembre 1908). — G. DARBOUX : Des principes généraux de la Géométrie infinitésimale. Il étudiera en particulier la théorie des systèmes triples orthogonaux. (2 leçons par semaine). — GOURSAT : Des opérations du Calcul différentiel et intégral. Eléments de la Théorie des Fonctions analytiques (2). — P. PAINLEVÉ : Des lois générales de l'équilibre et du mouvement. (2) — P. APPELL : Partie du Cours de mathématiques générales. (2) — L. RAFFY : Théorie des courbes gauches et propriétés des lignes tracées sur les surfaces. (1) — H. POINCARÉ : Théorie des marées. (2) — J. BOUSSINESQ : Propriétés thermomécaniques des corps et Courants de convection calorifiques. (2) — G. KŒNIGS : Des moteurs thermiques (2). — E. BOREL : Théorie du prolongement analytique et ses généralisations, quelques applications du calcul des probabilités à la statistique et aux sciences expérimentales (2).

Conférences. — L. Raffy : Conférence en vue du Certificat de Géométrie supérieure (1) et en vue du Certificat du Calcul différentiel et intégral (1). — Hadamard : Conférences de Calcul différentiel et intégral (1) et d'analyse supérieure (1). — P. Puiseux : Conférences sur la mécanique (2). — Blutel : Conférences en vue du Certificat de mathématiques générales (2). — Servant : Conférences de Mécanique physique et expérimentale et travaux pratiques. (1) — Caron : Travaux graphiques du Certificat de Géométrie supérieure (1).

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1909. — 1 vol. in-16°, de plus de 950 p., avec figures et planches ; 1 fr. 50 (franco 1 fr. 85) ; Gauthier-Villars, Paris.

Suivant l'alternance adoptée, ce volume, contient, outre les données astronomiques, des Tableaux relatifs à la Physique, à la Chimie, à l'Art de l'Ingénieur. Cette année, nous signalons tout spécialement les Notices de M. G. Bigourdan : *Les Étoiles variables*, et celle de M. Ch. Lallemand : *Mouvements et déformations de la croûte terrestre.*

Oeuvres de Charles Hermite, publiées sous les auspices de l'académie des sciences par Emile Picard. *Tome II,* 1 vol. 8°, 520 pages avec un portrait ; 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Comme pour le tome premier M. Picard a groupé les mémoires à peu près dans l'ordre chronologique. Ces mémoires, qui vont de 1858 à 1872, se rapportent principalement aux remarquables travaux d'Hermite sur la résolution de l'équation du 5me degré, la théorie des équations modulaires, la théorie des fonctions elliptiques et un certain nombre d'autres questions d'Algèbre et d'Analyse supérieures qui faisaient, à cette époque, l'objet des recherches du grand géomètre. M. E. Picard y a joint des Notes publiées par Hermite dans différents Ouvrages, quelques pages de son *Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique* et une lettre à M. Jules Tannery se rapportant aux fonctions modulaires. Le texte et les épreuves ont été revus avec soin par M. Bourget qui a refait ou tout au moins contrôlé tous les calculs.

En tête de l'Ouvrage, les éditeurs ont placé un portrait d'Hermite qui le représente aux environs de sa cinquantième année.

Comme nous l'avons déjà dit pour le premier volume, la lecture des mémoires d'Hermite est d'un grand intérêt non seulement pour tous les mathématiciens, mais aussi pour l'étudiant bien doué qui désire s'initier aux recherches d'Algèbre et d'Analyse supérieures.

Gomes Teixeira. — **Obras sobre Mathematica** publicadas por ordem do Governo Português. *Volume IV: Traité des courbes spéciales remarquables, planes et gauches.* tome I. — 1 vol. gr. in-4°, 401 p. ; 20 fr. ; Imprensa da Universidade, Coimbra.

Ce tome IV des Oeuvres mathématiques de M. Gomes Teixeira est entièrement consacré à la traduction revue et augmentée du *Tratado de las curvas especiales notables*, couronné par l'Académie des Sciences de Madrid en 1899. Celle-ci avait proposé, en 1892 et en 1895, le travail suivant : faire un « Catalogue méthodique de toutes les courbes d'une classe quelconque ayant reçu un nom spécial, avec une idée succinte de la forme, des équations, et des propriétés générales de chacune d'elles, et une notice des ouvrages ou des auteurs qui en ont fait la première mention ».

Le nouvel exposé que publie actuellement M. Teixeira comprendra deux volumes. Le premier, qui fait l'objet du présent compte rendu, est consacré à l'étude des courbes algébriques planes d'après le programme ci-dessus. On y trouve une étude très approfondie de cubiques et de quartiques, ainsi que de quelques courbes du 6me et du 8me degré.

Dans chacune de ces classes l'auteur a résumé un grand nombre de courbes remarquables, dont il étudie la forme, la construction, la rectification, la quadrature, ainsi que les principales propriétés ; il a soin d'y joindre toujours les indications historiques relatives à la courbe. Il considère aussi les relations de chaque courbe avec les autres

Dans un second volume M. Teixeira réunira de nombreuses courbes transcendantes planes, quelques classes de courbes planes et les courbes gauches les plus remarquables.

Cette étude méthodique des courbes les plus remarquables représente un travail considérable. Elle sera particulièrement bien accueillie par les professeurs qui cherchent à renouveler leurs exercices et problèmes de Géométrie analytique et d'applications géométrique du Calcul différentiel et intégral. H. F.

G. Arnoux. — **Arithmétique graphique.** *Les espaces arithmétiques, leurs transformations.* (Essais de psychologie et de mét iphysique positives). — 1 vol. gr. in 8°. XII + 84 p. ; 3 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Nous avons signalé ici-même (9e année, p. 326) l'apparition du deuxième volume de l'Arithmétique graphique, consacré à l'étude des fonctions arithmétiques et des congruences. On se rappelle le rôle qu'ont joué dans cette étude les assemblages de points ou de cases appelés espaces arithmétiques, qui dans le cas du plan se réduisent aux réseaux de carrés. C'est la considération de ces espaces arithmétiques qui a permis à M. Arnoux de deviner, de retrouver et de découvrir les propriétés des nombres entiers et des congruences qu'il établit dans les deux premiers volumes de son Arithmétique graphique.

Il était utile de réunir les propriétés essentielles de ces espaces arithmétiques. C'est ce que MM. Arnoux et Laisant se sont proposé de faire en publiant ce troisième volume de l'Arithmétique. Tandis que les deux premiers volumes contiennent surtout des applications des méthodes imaginées par M. Arnoux, le 3e volume rédigé aussi en grande partie par M. Laisant est consacré à l'étude des espaces arithmétiques en eux mêmes.

Pour simplifier, les auteurs s'occupent plus spécialement des espaces arithmétiques à deux dimensions. Mais ils montrent comment les résultats obtenus s'étendent aux espaces arithmétiques à un nombre quelconque de dimensions. Les procédés de la géométrie analytique peuvent être appliqués à cette étude, car de même qu'en géométie analytique, les positions des éléments constitutifs des espaces arithmétiques sont définies par leurs coor-

données. Seulement ces coordonnées sont des nombres entiers. Mais c'est la théorie des vecteurs qui fournit l'instrument de recherches le mieux approprié à l'étude des espaces de M. Arnoux.

Les deux premiers chapitres sont consacrés aux espaces illimités et à leurs transformations. Dans les chapitres suivants les auteurs étudient les espaces modulaires. Le 3e chapitre, dû à M. Laisant, traite de la structure de ces espaces; le chapitre IV est consacré à leurs transformations.

Les chapitres V et VI traitent des espaces multi-modulaires et partiellement modulaires. Enfin dans le chapitre VII M. Arnoux donne quelques applications se rapportant surtout aux questions traitées par M. Gaston Tarry.

On saura gré à MM. Arnoux et Laisant d'avoir réuni en un petit volume facile à lire les propriétés essentielles des espaces arithmétiques, base des recherches originales de M. Arnoux.

D. Mirimanoff (Genève).

H. Bouasse. — **Cours de Physique** conforme aux programmes des Certificats et de l'Agrégation de Physique. Fascicule III. *Electricité et Magnétisme*. — 1. vol. gr. in-8° de 412 pages ; 12 fr.; Ch. Delagrave, Paris[1].

C'est surtout dans l'étude des phénomènes électriques et magnétiques que la Physique emploie les théories mathématiques qui semblent les plus difficiles et les plus redoutables aux débutants. Les notions d'intégrales simples, doubles, triples, étendues à des lignes, à des aires planes ou courbes, à des volumes, si on les présente dans l'abstraction, sont choses qui semblent appartenir aux plus hauts domaines de la spéculation analytique. En fait, cette partie de la Science n'aurait probablement jamais été imaginée si elle n'avait traduit de manière absolument nécessaire les réalités de la mécanique des milieux continus. Aussi M. Bouasse paraissant craindre d'une part l'accusation d'employer trop l'analyse, je crois d'autre part avec lui qu'une accusation bien plus terrible est à craindre dans le camp des analystes : celle de ne plus voir assez la Physique dans les théories analytiques qu'elle a fait naître. Au temps de Coulomb et même d'Ampère on connaissait encore trop peu de choses en Electricité et les lacunes étaient trop grandes pour que l'on puisse se représenter l'appareil mathématique admirablement réduit qui donnerait le moyen d'aborder toutes les questions avec la même économie de pensée. Depuis, cet appareil s'est précisé, il tient quelques pages dans le nouveau volume de M. Bouasse ; on l'étudiera d'abord non comme une sèche nomenclature de formules, mais comme un résumé des faits physiques qui, dans la suite, sortiront de là avec une très grande élégance.

Le point capital sur lequel l'auteur insiste d'abord est la formule due à Stokes qui lie le *flux* à travers une aire à la *circulation* le long du contour de la même aire. Avec les physiciens anglais il appelle *curl* du vecteur X, Y, Z le nouveau vecteur

$$\xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Le flux du second égale la circulation du premier. De ce théorème peuvent sortir d'innombrables applications et notamment toute l'électro-optique.

[1] Voir dans l'*Enseign. mathém.*, les analyses du fascicule I (T. IX. 1907, p. 329) et du fascicule II (T. X. 1908, p. 346).

D'ailleurs, sans qu'on ait besoin d'attendre les applications électriques, on trouve dans ce premier chapitre des applications hydrodynamiques matérialisant, pour ainsi dire, des notions telles que celle du flux. Un autre point qu'il serait bien regrettable de passer sous silence est relatif à la définition du potentiel et notamment au cas où son expression est une fonction multiforme des coordonnées. Alors le travail accompli le long de certains contours ne reste constant dans la déformation de ceux-ci que si cette déformation a lieu sans que soient franchis certains points, certaines lignes ou certaines surfaces.

Le chapitre II est consacré aux actions en raison inverse du carré de la distance. Remarquons notamment qu'une couche sphérique est sans action sur un point intérieur et que réciproquement ce phénomène ne peut avoir lieu que pour une action de la nature indiquée. Ceci nous conduit tout naturellement aux couches en équilibre sur un conducteur, lesquelles font naître à l'intérieur un potentiel constant.

Le chapitre III traite de la polarisation. Une molécule polarisée ou aimant élémentaire est constituée par deux masses $+ m$ et $- m$ situées à une distance dl. De telles molécules peuvent s'arranger en files (solénoïdes) ou en nappes (feuillets). En général les corps polarisés agissent les uns sur les autres et se modifient ainsi réciproquement (polarisation induite).

Le théorème de Stokes trouve une application immédiate avec le *potentiel vecteur* défini comme ayant pour *curl* le vecteur induction. A propos de l'attraction newtonienne M. Bouasse montre rapidement le rapport de la loi de Newton et des lois de Képler, il indique la détermination expérimentale de la constante de la gravitation puis, suivant l'hypothèse cosmogonique de Laplace, examine les conditions de condensation de la nébuleuse solaire jusqu'à la formation du Soleil ; il explique l'origine de la chaleur solaire en admettant surtout la contraction, encore possible à l'heure actuelle, du diamètre de cet astre. Dans le même ordre d'idées il expose une théorie dynamique des marées.

Nous passons maintenant à la *seconde partie du livre*, divisée en dix chapitres, partie où sont exposés en détail les phénomènes électriques et magnétiques proprement dits.

Dans le chapitre I (Electricité statique, Distribution, Capacités) on peut remarquer dès le début la démonstration de Cavendish quant à l'action en raison inverse du carré de la distance. Elle consiste à vérifier qu'une couche sphérique ne peut charger un corps placé à son intérieur. Cela démontre la loi de Coulomb d'après ce que nous avons vu tout à l'heure dans le chapitre II de l'Introdution. La théorie des électromètres les plus divers est déduite d'une manière uniforme de l'étude du travail des forces électriques dans le déplacement des conducteurs.

Dès le début de l'étude des diélectriques (Ch. II) on est frappé de la rapidité avec laquelle M. Bouasse marche vers les idées de Maxwell et prépare la théorie électro-magnétique de la lumière. Nous apprenons tout de suite qu'un diélectrique n'est pas le corps stupide qui s'oppose toujours de la même manière inerte au passage de l'électricité. Il est caractérisé par un *pouvoir inducteur spécifique*. De là à imaginer que des diélectriques puissent être le siège des courants de déplacement de Maxwell et jouer vis-à-vis de l'électricité un rôle aussi complexe que les conducteurs, il n'y a qu'un pas. La théorie, on le sait, est loin d'être exempte de contradictions ; il a fallu pousser plus loin que ne l'avait fait le physicien anglais l'étude de la défor-

mation électrique dans l'isolant ; M. Bouasse rappelle à ce sujet les résultats plus complets de MM. Duhem et Liénard et cela par une application des équations de la déformation élastique étudiées dans le premier fascicule du Cours.

La détermination des champs des aimants et de courants (Ch. III) offre encore bien des sujets de réflexion. Remarquons de suite une belle application de la formule de Stokes quant à l'expression du travail correspondant à un déplacement effectué autour d'un courant fermé, c'est-à-dire effectué en traversant un nombre quelconque de fois une surface passant par le contour figurant ce courant. Puis, dans l'action des champs sur les courants, M. Bouasse discute d'une façon très serrée la loi de Laplace. Quoi, cette loi déjà si ancienne et qui donne notamment une expression si simple de l'action d'un champ sur un élément de courant n'est pas quelque chose à l'abri de toute discussion ? Il faut s'entendre et rien ne démontre mieux la différence entre l'électrodynamique de Laplace et celle d'aujourd'hui. Si l'on ne veut d'abord considérer que des éléments de courants, *ouverts* bien entendu, comment les obtiendra-t-on ? Et même qu'est ce que cela signifiera, au juste, si d'après les théories maxwelliennes il n'y a que des courants fermés. Ce que l'on peut montrer raisonnablement, et ce qui permettra non pas de déplorer tragiquement la mort des principes mais de les retrouver vivants sous des formes plus rigoureuses, c'est que la loi de Laplace reste expérimentalement vraie en tant que loi intégrale. Il n'est pas interdit d'étudier d'autres lois élémentaires donnant les mêmes résultats intégraux.

Je signale aussi les résultats fondamentaux d'Ampère sur l'équivalence d'un petit circuit fermé et d'un aimant normal parce que, au point de vue théorique, tout cela est encore supporté par la formule de Stokes et qu'au point de vue pratique on tirera de là toute la théorie des galvanomètres.

Nous entrons plus que jamais dans les théories modernes en étudiant les diverses formes du transport de l'Electricité (Ch. IV).

On s'est efforcé de rapprocher tous les genres de conductibilité en prenant pour type les phénomènes électrolytiques Les conducteurs contiendraient des corpuscules électrisés négativement (électrons) et d'autres électrisés positivement mais beaucoup moins mobiles. Les courants des conducteurs seraient des phénomènes de convection et par suite le déplacement rapide d'un corps électrisé devrait créer un courant. La vérification d'un tel fait, dans la mesure où elle était possible, est constituée par les célèbres expériences de Rowland. La charge du corps en mouvement dépend de phénomènes statiques, le résultat du déplacement doit se traduire par des phénomènes électro-magnétiques ; le premier problème à résoudre est donc de savoir comparer les unités électrostatique et électromagnétique.

Là encore transparaît déjà un des points fondamentaux de la théorie électro-magnétique de la lumière. Le chapitre se termine par un aperçu sur la télégraphie sous-marine, le cable, par sa substance isolante séparant une âme de métal d'un conducteur liquide, est un condensateur à ranger avec tous les autres appareils du même nom.

Les courants dans les gaz (Ch. V) peuvent aussi être considérés comme résultant de phénomènes d'ionisation. D'ailleurs celle-ci peut être produite de manières diverses et bien intéressantes par la chaleur, la lumière, les rayons ultra-violets, les réactions chimiques, etc... Ce qu'on sait à l'heure actuelle des rayons électrisés est exposé commodément en les considérant

dans l'ordre où ils naissent les uns des autres (rayons cathodiques, canaux, X).

Les phénomènes d'induction (Ch. VI) sont ramenés à une notion unique. Quand un circuit se déplace dans un champ magnétique il peut subir des modifications de natures diverses que l'on peut toutes ramener aux effets d'une seule force dite *force électromotrice d'induction*. Il y eut d'abord là une sorte d'intuition expérimentale. M. Bouasse examine la question de savoir si cela ne découle pas simplement du principe de la conservation de l'énergie. Il y a ici une heureuse mise en lumière de la réciprocité des forces électro-magnétiques et des forces électro-motrices d'induction. Beaucoup de difficultés surgissant pour les unes sont levées sans peine par l'examen des autres.

Je passe rapidement sur les chapitres VII, VIII, IX (Courants alternatifs. Magnétisme induit et Circuits magnétiques. Dynamos, alternateurs et transformateurs) non pas qu'ils aient moins d'importance mais parce que l'importance est ici d'une nature différente. Il était impossible notamment de négliger le point de vue industriel d'où des descriptions expérimentales fort détaillées, et qui sans doute seront très appréciées pour cela, mais où les idées générales jouent par contre un rôle moins important. Et encore faut-il remarquer des lignes bien intéressantes sur les oscillographes et l'arc puis sur l'hystérésis magnétique. Un corps aimanté est-il une réserve d'énergie ? C'est la considération de l'hystérésis seule qui permet de trancher la question ; on peut d'ailleurs facilement concevoir qu'un aimant ayant fourni un certain travail, il faille plus d'énergie ensuite pour désaimanter que pour aimanter et de telle sorte qu'en fin de compte il y ait perte.

Le dixième et dernier chapitre du volume est consacré aux unités absolues et au rapport des unités magnétiques et statiques. M. Bouasse montre notamment comment on peut réaliser de façon concrète les unités absolues et, reprenant soigneusement toutes les définitions, montre ce que l'on doit entendre par l'homogénéité des formules de l'électro-mécanique. Il démontre notamment que le nombre qui exprime une force électro-motrice en unités statiques est v fois plus petit que celui qui l'exprime en unités magnétiques, v étant le fameux nombre de Maxwell.

Cette brève analyse étant terminée je me fais un grand plaisir de mentionner que le plan primitif que M. Bouasse s'était tracé pour la rédaction de ce grand Cours de Physique s'est encore élargi. Le cours comprendra non quatre volumes, mais six consacrés aux matières suivantes ;

I — Mécanique physique.
II — Thermodynamique. Théorie des ions.
III — Electricité et magnétisme.
IV — Optique. Instruments.
V — Electroptique.
VI — Etude des symétries.

En somme la première moitié est déjà faite et répond suffisamment de ce que sera la suite. Pour ne parler que du troisième volume qui n'a évidemment pas la prétention de traiter l'Electroptique, puisque ce sera là le but du cinquième, il présente cependant les idées de Maxwell d'une manière si séduisante qu'on se sent admirablement préparé pour aborder la théorie que le génie de Hertz devait asseoir sur des bases définitives.

A. Buhl (Montpellier).

H. Burkhardt. — **Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung** und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen : 1 vol. in-8°, 252 p. 6 Mk. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce cours d'éléments de mathématiques supérieures est destiné plus particulièrement aux étudiants en sciences naturelles. Le temps restreint dont ils disposent pour les mathématiques oblige le professeur à se limiter aux notions les plus indispensables. Il doit les établir par les moyens les plus simples en ayant recours aux méthodes basées sur des considérations géométriques. C'est à ce point de vue que se place l'auteur dans cet exposé des Eléments du calcul différentiel et intégral. Dans l'introduction, il fait ressortir, à l'aide d'exemples concrets, qu'une étude quantitative des phénomènes de la nature conduit nécessairement aux notions fondamentales concernant les grandeurs variables et naturellement aux deux problèmes fondamentaux qui font l'objet du calcul différentiel et intégral.

M. Burkhardt ne parcourt qu'une champ très restreint, mais il l'étudie avec beaucoup de soin, non seulement au point de vue théorique, dans le sens indiqué plus haut, mais aussi à celui des applications numériques C'est le cas, par exemple, dans les problèmes d'interpolation qui interviennent fréquemment dans la pratique ; l'auteur leur consacre un chapitre d'une vingtaine de pages. — Voici les titres des principaux chapitres :

Différentiation de fonctions rationnelles, de fonctions irrationnelles. — Eléments du Calcul intégral. — Le logarithme et la fonction exponentielle. Application à des problèmes de Chimie. — Dérivées d'ordre supérieur. Théorème de la moyenne et formule de Taylor. — Interpolation. — Fonction de deux variables. — Les fonctions trigonométriques et circulaires ; applications ; représentation de fonctions périodiques.

De la façon dont il est conçu, cet ouvrage est appelé à rendre de grands services aux étudiants en sciences naturelles ; il fournit aussi une excellente introduction à l'étude des mathématiques supérieures en vue des études de Physique. En dehors de cet important cercle de lecteurs le livre de M. Burkhardt sera encore lu avec profit par les maîtres qui enseignent les premières notions de Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire supérieur.

Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik in München. — *Führer durch die Sammlungen.* — Une brochure de 24×21 cm, de 158 p. avec figures ; 1 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

La brochure que nous venons présenter aux lecteurs de l'*Ens. Math.* n'est pas une sèche nomenclature des objets exposés dans les salles du Musée technique allemand. C'est un catalogue explicatif, copieusement illustré, donnant sur presque tous les sujets traités des renseignements historiques ou techniques. Mais avant de relever comme il convient les particularités de cette intéressante publication, rappelons que le « Deutsches Museum », dont l'idée première date de 1903 et est due à M. Oscar von Miller, doit, d'après son programme, « représenter l'évolution historique des recherches des sciences naturelles, de la technique et de l'industrie, par l'exposition des chefs-d'œuvre qu'elles ont produits. »

Provisoirement logé dans l'ancien musée national de la Maximilian-Strasse, le Museum occupe deux étages et les combles d'un bâtiment de 150 m. de long, et comprend une cinquantaine de salles. Chacune des subdivisions de

ce vaste ensemble est sous la direction d'un spécialiste qui a rédigé pour le catalogue une description succincte des objets exposés.

Il ne saurait être question de détailler ici le contenu de la brochure, mais ce que nous pouvons affirmer pour avoir nous-même parcouru le musée, catalogue en main, c'est que nous avons là un guide intéressant et sûr, dont l'étude à domicile sera véritablement fructueuse même pour ceux qui n'ont pas eu l'occasion de se rendre compte *de visu* des richesses accumulées à Munich.

Ajoutons qu'un bâtiment spécial, devisé à plus de sept millions de marks, est en construction dans une île de l'Isar et suffira à peine pour abriter les collections déjà existantes. E. STEINMANN (Genève).

F. G-M. — **Exercices de Géométrie** comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues. 4me édition. — 1 vol. gr. in-8° de XXI-1228 pages et 1600 figures ; 14 fr. 45 ; Tours, Mame et fils ; Paris Vve Ch. Poussielgue.

Cette quatrième édition des *Exercices de Géométrie* forme un volume énorme, quoique d'aspect relativement réduit, que l'on parcourt avec autant de charme que de profit, quel que soit l'enseignement géométrique dont on ait à s'occuper. Par les exercices élémentaires qu'il contient il peut servir à un élève commençant ses études, et, par une graduation aussi savante qu'habile, il suit le développement de questions de plus en plus complexes et peut devenir d'une extrême utilité aux candidats à l'Agrégation des Sciences mathématiques. Et encore ce serait peut être faire à l'ouvrage un tort bien peu mérité que de vouloir le comparer aux questions tirées de programmes pédagogiques plus ou moins heureux. Au fond il donne une idée de tous les problèmes de la géométrie, de toutes les méthodes, de tous les artifices depuis Thalès et Pythagore jusqu'à Mannheim, Lemoine et les nombreux géomètres contemporains qui n'ont pas dédaigné les élégants résultats que la géométrie pure fournira toujours.

Rien n'est négligé de ce qui peut faire de l'œuvre un instrument de recherche. Il débute par un historique rapide. Il se termine par un lexique géométrique où l'on trouve des définitions brèves de termes tel que droite de Simson, droite d'Euler, point de Brianchon, point de Gergone, points concycliques, etc.... cercles, ellipses de.... etc., etc. D'excellents géomètres n'ont pas toujours dans l'esprit toutes ces dénominations dont le nombre s'est considérablement accru depuis vingt ans. Je signale aussi une table des problèmes et théorèmes auxquels une désignation spéciale ou un nom d'auteur est resté attaché, puis une table de toutes les questions particulièrement originales et enfin des index bibliographiques extrêmement riches. D'ailleurs l'auteur a fait d'innombrables emprunts à l'*Intermédiaire des mathématiciens* aux *Nouvelles Annales*, à *Mathesis* et à une foule d'autres périodiques tant étrangers qui français.

L'ouvrage peut, dans son corps principal, être divisé en deux parties bien distinctes.

La première partie (environ 200 pages) a trait aux méthodes considérées dans toute leur généralité et indépendamment de la classification qui rangerait un problème plutôt dans tel livre d'Euclide que dans tel autre. Ainsi étant donnés deux points fixes A et B, cherchons le lieu d'un point M tel que $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$ soit constant. Ce lieu est un cercle. Soit maintenant à trouver

le lieu d'un point tel que le produit de ses distances à deux droites fixes soit constant. Le lieu est une hyperbole. Par suite les deux problèmes seraient séparés dans bien des ouvrages. Ici ils sont rapprochés et à mon avis, avec beaucoup de raison. Les méthodes de résolution reposent au fond sur un petit nombre de procédés. L'auteur étudie successivement l'emploi des lieux géométriques, des figures auxiliaires, de la transformation des figures. A ce dernier point de vue je signale surtout ce qui est relatif à l'inversion. Il nous montre encore, quand un problème semble rebelle aux méthodes précédentes, comment on peut se permettre de le résoudre d'abord algébriquement pour voir ensuite si la solution se peut construire. Et cette méthode n'est pas si critiquable que beaucoup le croient. J'ai personnellement le souvenir d'un professeur qui avait proposé à ses élèves de construire un triangle connaissant les bissectrices et il était naturellement sous-entendu qu'on ne devait employer que la règle et le compas. Si le professeur en question avait essayé, même grossièrement, de mettre le problème en équations il aurait vu de suite l'absurdité de sa prétention.

La recherche des maxima et des minima termine la partie réservée aux méthodes. Dans la seconde partie (environ 1000 pages) nous appliquons les méthodes à une prodigieuse variété d'exercices qui sont alors rangés dans les livres euclidiens (I à VIII). Une dizaine de pages est consacrée aux problèmes numériques et près de 120 à la géométrie du triangle. Il est impossible de décrire tout cela, justement parce qu'il y a trop de problèmes intéressants et qu'en citer quelques-uns serait injustement faire tort à d'autres.

Un point qui m'a beaucoup frappé c'est l'importance accordée aux notions dualistiques. Beaucoup de problèmes consistent à chercher des enveloppes de lignes tout aussi naturellement que des lieux de points. Quand plusieurs solutions sont possibles, elles sont généralement indiquées toutes.

En résumé l'ouvrage paraît avoir une incomparable puissance didactique et pédagogique tout en gardant la forme élégante qui le rendra non moins précieux à toute personne simplement curieuse des résultats de la géométrie synthétique. A. Buhl (Montpellier).

Joseph Kozak. — **Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.** Zweiter Band, Erster Teil : *Theorie des Schiesswesens auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie*, 1 Teil. — 1 vol. gr. in-8°, 400 p. ; K. Fromme, Wien u. Leipzig.

Les trois premiers chapitres du volume sont dédiés à l'exposition des fondements de la théorie des probabilités, c'est-à-dire aux définitions fondamentales, au théorème de Bernoulli et à son inversion et à la détermination « a posteriori » des probabilités.

Dans le Ch. IV l'auteur s'occupe des méthodes d'interpolation, sans supposer connus par ses lecteurs ni les premiers fondements du calcul des différences finies, ni les formules interpolatoires de Lagrange et de Newton. Il les développe, et s'occupe ensuite de l'interpolation par la méthode des moindres carrés dont il illustre tout particulièrement les applications à la théorie du tir. La méthode de Tchebychef est exposée en suivant la déduction de Jouffret, la seule élémentaire des trois connues.

Les trois derniers chapitres sont consacrés exclusivement aux applications de la théorie des erreurs à la théorie des armes à feu, et concernent l'étude de la distribution des points d'impact autour du but, à la mesure de la pré-

cision du tir et à des fonctions d'erreur analytiquement plus simple que la fonction de Gauss et faisant correspondre une probabilité nulle aux erreurs dépassant une certaine valeur finie. Il y a donc dans le volume de M. Kosak un exposé à peu près complet de la théorie générale des probabilités suivie des applications à la théorie du tir, que l'auteur se propose de compléter dans un volume ultérieur nouveau. Il a cherché à rendre les deux parties le plus possible indépendantes l'une de l'autre, afin que le lecteur ne s'intéressant pas à la théorie du tir puisse se borner aux chapitres sur la théorie des probabilités et de l'interpolation. Dans la discussion de problèmes de tir il a même souvent récapitulé brièvement les théorèmes de probabilités, qu'il s'agissait d'appliquer. Il en résulte nécessairement des répétitions que l'auteur n'aurait pu éviter qu'en renonçant partiellement au double but indiqué ; on ne saurait s'en plaindre, comme on ne pourrait pas se plaindre de la longueur quelquefois très prononcée de l'exposition, destinée à des lecteurs n'ayant d'autre bagage mathématique qu'une connaissance très modeste de l'analyse infinitésimale.

En résumé, l'ouvrage de M. le colonel Kosak, qui est écrit avec un grand soin et une sûre connaissance des matières exposées, pourra être consulté utilement non seulement dans les cercles militaires, mais par tous ceux qui désirent être renseignés sur les théories générales abordées par l'auteur. On doit même ajouter que l'application de la théorie des probabilités à l'étude du tir présente des problèmes très intéressants et qu'on chercherait en vain ailleurs : nous devons donc savoir gré à M. Kosak de nous avoir introduit dans un domaine peu connu et digne de l'être.

Ugo Broggi (Rome).

R. de Montessus. — **Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités.** — 1 vol. broché in 8°, de VI, 191 p., 17 figures ; 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

L'auteur s'est proposé dans ses leçons « d'initier le curieux des choses savantes à l'étude du Calcul des Probabilités et de leurs applications », Et il a parcouru d'un pas rapide un très long chemin : des premières formules de l'analyse combinatoire et de la définition de dérivée et d'intégrale jusqu'à la théorie des erreurs, à la méthode des moindres carrés et à la discussion de problèmes de probabilités géométriques.

Savamment curieux lui-même des matières qu'il expose, il sait y introduire des observations personnelles et donner ainsi à son exposé le caractère d'une chose venue. C'est par cela et par la considération très large des applications, qu'il réussit à éviter le sens de fatigue et de gène qui pourraient autrement s'emparer d'un lecteur n'étant pas familiarisé avec les mathématiques.

Quelques-unes des matières traitées ont fait l'objet de publications antérieures de M. de Montessus : telle la définition logique du hasard (et conséquemment la définition de la probabilité mathématique) et la discussion des paradoxes de Saint-Pétersbourg (qu'un philosophe allemand, von Kries, avait éclairci d'une façon analogue dans ses *Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*) et de Bertrand. Le calcul des probabilités n'est pour l'auteur qu'un calcul de fréquences relatives. Il se trouve quelquefois qu'en augmentant le nombre des observations ou des épreuves, le rapport du nombre d'arrivées d'un événement au nombre des observations ou des épreuves tend irrégulièrement vers le rapport d'un nombre de cas favorables à un nombre

de cas possibles. Déterminer la probabilité mathématique c'est chercher ce rapport n'ayant une portée objective et une valeur d'application, que si l'égalité définie (fait d'expérience avant que résultat de calcul) n'est remplie. Elle l'est si certaines conditions (que nous appelons synthétiquement « le hasard ») sont remplies. A la demande « qu'est-ce que le hasard ? » l'auteur répond : « Étant donné que certains événements ont un caractère commun et, pour cette raison, constituent une classe, mais diffèrent à certains points de vue, ce qui permet de les ranger en catégories bien définies, le hasard consiste dans l'absence de relations bien définies entre les causes rangeant tel événement de telle classe dans telle catégorie et les caractères distinctifs de telle catégorie ».

Pouvons-nous parler de hasard dans tous les domaines d'applications, considérés par M. de Montessus ? Il ne se pose pas une telle question, très intéressante sous beaucoup de rapports : il est permis de douter que, s'il l'eût faite, il aurait peut-être donné une réponse négative pour certains d'entre eux : par exemple pour la théorie de la spéculation et pour les probabilités qu'un jugement soit erroné. Ce n'est vraiment trop sûr que la réponse puisse être affirmative pour les autres domaines : la théorie des erreurs, la théorie des armes à feu ou celle des assurances. Mais celles-ci présentent un intérêt si légitime et si grand, qu'il serait vraiment dommage, que l'auteur eût sacrifié à des scrupules les chapitres si limpides qu'il leur dédie.

M. de Montessus déduit le théorème de Bernoulli par un très élégant procédé de M. de la Vallée-Poussin, vraiment digne d'être connu du plus large public que le beau livre de M. de Montessus lui assure.

Ugo Broggi (Rome).

J. Schick. — **Barytomik.** — 1 vol. in-8° de 76 pp. avec 23 figures. G. Franzcher Verlag. München und Leipzig.

Ce vocable inusité sert de titre à une brochure intéressante et touffue relative à la géométrie du triangle. L'auteur, en exposant un nombre considérable de propositions, montre que ce sujet, auquel on a déjà tant travaillé, était loin d'être épuisé. Bien que ce ne soit pas chose aisée de résumer, en peu de lignes, un travail de ce genre, nous allons essayer d'en donner une idée.

Un point P est déterminé, dans le plan d'un triangle ABC, tantôt par ses coordonnées barycentriques, tantôt par les rapports mutuels de ses distances aux trois côtés du triangle, tantôt enfin par les côtés a_f, b_f, c_f du triangle obtenu en projetant orthogonalement, en X, Y et Z, le point P sur les côtés du triangle ABC, ce qui revient au fond à un système de coordonnées tripolaires. L'auteur détermine les relations entre un point et son conjugué isogonal, calcule la distance de deux points et cherche un grand nombre de lieux géométriques qui sont presque tous des cercles. De ses résultats généraux, il déduit de nombreux cas particuliers.

Mais le titre même de l'opuscule est dérivé du mot *barytome* et ce terme désigne la droite partant du point X et divisant le segment YZ dans un rapport donné. L'auteur cherche le lieu du point P quand la barytome a une longueur donnée, ou fait un angle donné avec YZ, etc.

Il s'occupe encore de la puissance d'un point relativement au cercle circonscrit et fait quelques excursions dans la géométrie du quadrilatère et du tétraèdre.

L'ouvrage est écrit avec clarté et n'utilise que des moyens élémentaires. Comme dans la plupart des écrits sur la géométrie du triangle, la terminologie est riche en néologismes : nous renverrons à la brochure elle-même le lecteur désireux de connaître les *doubles barytomes*, les *baryzyges*, les *triangles syzygétiques* et autres figures remarquables

M. STUYVAERT (Gand).

H. SARRETTE. — **Précis arithmétique des Calculs d'emprunts à long terme et de valeurs mobilières.** — 1 vol. in-8, 300 p., 10 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

M. Sarrette s'est proposé de faire un traité élémentaire d'opérations financières à long terme à l'usage des financiers, capitalistes ou hommes d'affaires qui auraient oublié les quelques notions d'algèbre utilisées dans les calculs d'annuités. C'est ce qui explique le titre « Précis arithmétique ». L'auteur se borne donc à l'emploi de la méthode arithmétique et se trouve obligé de faire en détails un grand nombre d'exemples qui serviront ensuite de guide pour des calculs analogues.

L'ouvrage est divisé en deux parties. La première est l'exposé complet des règles à suivre dans les calculs des éléments des emprunts et valeurs mobilières : le texte en gros caractères est consacré à la théorie ; le texte en petits caractères, qui tient la plus large place, est réservé aux exemples Cinq Tables financières, deux de valeurs acquises, deux de valeurs actuelles, une d'anuités, forment la seconde partie. Ces Tables, où les taux varient de 1/8 % à 6 %, par 1/8es, et les périodes de capitalisation de 5 à 100, par 5 unités de temps, comprennent un nombre suffisant de décimales pour permettre la résolution de tous les problèmes courants. Ecrit par un praticien dans un but de vulgarisation, cet ouvrage ne peut manquer de rendre de grands services à tous ceux qui s'occupent d'opérations financières ou qui enseignent ces questions dans les écoles de commerce.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

1. Sommaires des principaux périodiques :

American Mathematical Monthly (The), published under the Auspices of the University of Chicago, edited by B. F. FINKEL, E. SLAUGHT & Leon E. DICKSON. Vol. XV, 1908.

Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza. Ano 2. — Publication trimestrielle dirigée par P. SAVIRON et José RIUS Y CASAS.

Annaes scientificos da Academia polytechnico do Porto, sous la direction de F. Gomez Teixeira. — Coimbra.

Vol. III, nos 1 et 2. — Haton de la Goupillère : Surfaces nautiloides.

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Deuxième série. — E. Privat, Toulouse : Gauthier-Villars, Paris.

Tome IX, fasc. 2. — Ch. Riquier : Sur quelques principes généraux relatifs à la théorie des fonctions d'un nombre quelconque de variables (suite et fin). — E. Remoundos : Sur les points critiques transceudants. — Edm. Maillet : Sur les fonctions quasi-entières et quasi-méromorphes d'ordre infini non transfini.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles. — 31e année.

Fasc. 2 à 4. — De Salvert : Sur l'attraction du parallélépipède ellipsoïdal. — C. de la Vallée-Poussin : Etude sur le théorème de Bernoulli. — De Montchecil : Etude d'un système de six couples de surfaces applicables. — Surface algébrique applicable sur une surface transcendante.

Annali di Matematica. Directeurs : L. Bianchi, O. Dini, B. Jung, C. Segre. Série III, t. XIV. — Rebeschini di Turati e C., Milan.

O. Nicoletti : Sulla teoria della convergenza degli algoritmi di iterazione. — G. Fubini : Sulla teoria della funzioni automorfe e delle loro trasformazioni. — Niels Nielsen : Sur quelques propriétés fondamentales des fonctions sphériques. — Eug. E. Levi : Sopra una classe di trascendenti meromorfe. — G. Fubini : Nuove applicazioni del principio di minimo. — G. Lauricella : Applicazione della teoria di Fredholm al problema del raffreddamento dei corpi. — Beppo Levi : Il teorema di Desargues, il teorema di Pappo e l'esistenza d'una reciprocità o d'una polarità. — Eug. E. Levi : Sull'equazione del calore. — O. Nicoletti : Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea e di un fascio di forme bilineari. — E. O. Lovett : On a class of periodic solutions in the problem of four bodies.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathem. Wissenschaften, herausgegeben von G. Eneström. III. Folge. — Teubner, Leipzig.

Band 8. — G. Eneström : Ueber planmässige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete. — F. Rudio : Die angebliche Kreisquadratur bei Aristophanes. — H. Suter : Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern. — P. Stäckel : Eine vergessene Abhandlung Leonhard Euler's über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen. — K. Tittel : Das Weltbild bei Heron. — Heiberg u. Zeuthens : Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik. — G Eneström : Ueber eine den Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift. — H. Bosmans : Sur le « Libro de Algebra » de Pedro Nunez. — M. Stuyvaert : Sur l'auteur de l'« Histoire de la roulette » publiée par Blaise Pascal. — G. Vailati : Per la preistoria del principio dei momenti virtuali. — P. Stäckel u. W. Ahrens : Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. — C. Segre : Monge e le congruenze generali di rette. — F. Rudio : Friedrich Hultsch. — F. Amodeo : Sul corso di storia delle matematiche fatto

nell' università di Napoli nel biennio 1905/6—1906/7. — Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors « Vorlesungen über Geschichte der Mathematik ». — Anfragen. — Rezensionen. — Neu erschienene Schriften. — Chronik.

Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi matematici nelle Scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. Conti. Anno VII. Bologna, 1908.

Bulletin de la Société Française de Philosophie, publié par X. Léon et André Lalande. — Colin, Paris.

7e année, 1907, no 6. — Thèse de M. Bourlet tendant à instituer dans les lycées deux enseignements consécutifs de la Géométrie différant profondément entre eux par l'esprit et par la méthode.

No 10. — Vocabulaire philosophique (suite, habitude à hypothèse).

8e année, 1908, no 1. — Binet : Enquête sur l'enseignement de la Philosophie dans les lycées : *a)* dans la classe de philosophie, *b)* dans les classes de science, *c)* dans les classes de morale. La préparation scientifique des professeurs de philosophie.

Intermédiaire des mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant, Em. Lemoine, Ed. Maillet, A. Grévy. Tome XV, 1908. — Gauthier-Villars, Paris.

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter. Organ des Verbandes mathematischer und naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen. 5. Jahrgang, 1908. — Kommissionsverlag, B. G. Teubner, Leipzig.

Mathésis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg. 3e série, Tome VIII, 1908. — Hoste, Gand ; Gauthier-Villars, Paris.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège, 3e série, Tome VII. Bruxelles.

Ch. Duchesne : Les projections cartographiques. — M. Stuyvaert : Cinq études de Géométrie analytique.

Nieuw Archief voor Wisskunde. Revue publiée par la Société scientifique d'Amsterdam et dirigée par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg et P.-H. Schoute. 2e série, VIII, 1908. — Delsman & Nolthenius, Amsterdam.

Nyt Tidsskrift for Matematik. Revue dirigée par C. Juel et V. Trier. Série A, 19e année ; série B, 19e année ; 1908. — Jul. Gjellerup, Copenhague.

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secundario. Diretto dal Prof. G. Lazzeri. Serie 3, vol. VI. — Raffaelo Giusti, Livorno.

Revue de l'Enseignement des Sciences (La), 2e année, 1908. — Librairie Le Soudier, Paris.

Revue générale des Sciences pures et appliquées, dirigée par L. Olivier. 19me année, 1908. — Arm. Colin, Paris.

15 janvier. — P. Duhem : La valeur de la théorie physique, à propos d'un livre récent.

15 février. — P. Weiss : L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferro-magnétique.
30 mars. — Lugol : Lord Kelvin. — Ch. Nordmann : J. Janssen.
15 avril : Ch.-Ed. Guillaume : Le volume du kilogramme d'eau.
15 mai. — R. Chassériaud : Essai d'une théorie cinématique de la musique.
15 et 30 juin. — C.-Paul Renard : Les aérostats dirigeables. I. Principes de la direction; II. Examen critique des divers types de ballons dirigeables.

Revue de Mathématiques spéciales, dirigée par E. Humbert et G. Papelier. 18e année, oct. 1907 à sept. 1908. — Vuibert-Nony, Paris.

Revue scientifique, année, 1908. Paris.

Ier et 8 février. — G. Le Bon : L'édification scientifique de la connaissance.
22 février. — F. Sageret : Les nombres et la Cosmologie.
11 avril. — C.-A. Laisant : Première éducation scientifique.
7 novembre. — H. Poincaré : Méthode et invention.

Revue semestrielle des publications mathématiques, dirigée par H. de Vries, P.-H. Schoute, D.-J. Korteweg, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn. Tome XVI, Ire partie, avril-oct. 1907; 2e partie, oct. 1907, avril 1908. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam 1908.

School Science and Mathematics, A Journal for Science and Mathematics Teachers in secondary Schools. Vol. VIII, 1908. — Smith and Turton, Chicago.

Travaux scientifiques de l'Université de Rennes. Tome V, 1906.

J. Le Roux : Sur le groupement des intégrales des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von F. Pietzker. Jahrgang XIV, 1908. — Otto Salle, Berlin.

Wiskundig Tijdschrift onder Redactie van F.-J. Vaes, Chr. Krediet, N. Quint. 4. Jaargang, 1907-1908. — Visser, Haarlem.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen. Tome X, fasc. 1. — Delsmann en Nolthenius, Amsterdam.

Wiadomosci Matematyczne, publié par S. Dickstein, Varsovie.

Tome XII, nos 1-4. — B. Niewenglowski : Sur la résolution en nombres entiers des équations $x^2 - ay^2 = 1$ et $x^2 - ay^2 = -1$. — Z. Krygowski : Sur certaines formes des intégrales canoniques hyperelliptiques de seconde espèce et leurs relations avec les fonctions thêta. — H. Poincaré : La dynamique de l'électron. — S. Zaremba : Nouvelle méthode pour établir les propriétés fondamentales de la fonction de Green. — St. Landau : Les mesures de la dispersion dans le phénomène de Faraday. — S. Dickstein : Le IVe Congrès international des Mathématiciens.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. — 55 Band, B.-G. Teubner, Leipzig.

Nos 1 et 2. — M. Milankovitch : Theorie der Druckkurven. — J. V. Pexi-

der : Zur Invalidenversicherung. — K. Wieghardt : Über das Spalten und Zerreissen elastischer Körper. — W. Fr. Meyer : Zur Theorie der Drehungen und Quaternionen. — Ph. Weinmeister : Gelenkviereck und Dämmerungsdauer. — Karl Fuchs : Ein Näherungsverfahren in der Methode der kleinsten Quadrate. — F. Nussbaum : Die genaue Säulenknicklast. — B. Cohn : Über die verschiedenen Anordnungen der Additions- und Subtraktions-Logarithmen. — Reinhold Müller : Polbestimmung für Verzweigungslagen bei der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene. — Gustave Mie : Erwiderung auf Herrn Riebesell's Abhandlung « Über die Kommutation des Stromes in Gleichstromgeneratoren. » — Paul Riebesell : Antwort auf Herrn Mie's Erwiderung. — A. Timpe : Bemerkung zu den Sommerfeld'schen Ausführungen « Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen. »

Nos 3 et 4. — Fr. A. Willers : Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse. — Anton Grünwald : Die kubische Kreisbewegung eines starren Körpers. — F. Nussbaum : Das Ausknicken von Trägern. — W. Scheufele : Die Aufgabe der sechs Punkte in der Photogrammetrie. — G. v. Gleich : Beitrag zur Theorie der sogenannten konischen Pendelung. — Friedrich Schur : Über die Bewegung eines starren Körpers durch Abschroten. — A. Timpe : (Zusatz, siehe oben).

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Gloser. — XXXIII. Jahrg. ; Alfr. Hölder, Wien.

Nos 1 à 9. — K. Rosenberg : Zum Kapitel vom horizontalen Wurfe. — J. Pollak : Ein Beitrag zur Projektivität im Kegelschnittbüschel. — R. Gidaly : Ueber einen bemerkenswerten geometrischen Ort. — H. Drasch : Lineare Konstruktion einer Fläche II. Grades aus neun gegebenen Punkten. — E. Vogel : Die zentrale Projektion eines Kreises, dessen perspektives Bild wieder als Kreis erscheint. — R. Gidaly : Konstruktion der Kegel zweiter Ordnung durch einen Kegelschnitt und drei Punkte. — E. Vogel : Ueber eine Vereinfachung bei der Konstruktion der Eigenschaftengrenze einer Kugel bei der sogenannten 45° Beleuchtung. — L. Tesar : Beiträge zum Unterrichte in der Hydrodynamik. — J. Kuhn : Graphische Darstellung und elementare Berechnung einiger Integrale.

2. Livres nouveaux :

W. Rouse Ball. — **Récréations mathématiques et problèmes**. Deuxième édition française. IIe partie. — 1 vol. in-16, 363 p. ; 5 fr ; A. Hermann, Paris.

E. Bardey. — **Algebraische Gleichungen** nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. 6. Auflage, bearbeitet von F. Pietzker. — 1 vol. in-8°, 420 p. ; 8 Mk. ; B. G. Teubner, Leipzig.

D. Behrendsen und E. Götting. — **Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen**. A. Unterstufe. — 1 vol. in-8°, 254 p. ; 2 Mk. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

K. Boehm. — **Elliptische Funktionen**. Erster Teil : Theorie der elliptischen Funktionen, aus analytischen Ausdrücken entwickelt. (*Sammlung Schubert.*) — 1 vol. in-8°, 356 p. ; 8 Mk. 60 ; G. J. Göschen, Leipzig.

E. Borel. — **Die Elemente der Mathematik**. Deutsche Ausgabe besorgt

von P. Stäckel. Erster Band: *Arithmetik und Algebra.* — 1 vol. gr. in-8°, 431 p.; 8 Mk. 60; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Fabry. — **Traité de Mathématiques genérales** à l'usage des chimistes, physiciens, ingénieurs et des élèves des facultés des sciences, avec une Préface de G. Darboux. — 1 vol. gr. in-8°. 440 p.; 9 fr.; A. Hermann, Paris.

H. Hartl. — **Erste Einführung in die Elemente der Differential- und Integralrechnung** und deren Anwendung zur Lösung praktischer Aufgaben. — 1 vol. in-8°, 58 p.; Fr. Deuticke, Wien und Leipzig.

K. Hensel. — **Theorie der algebraischen Zahlen.** Erster Band. — 1 vol. in-8°, 349 p.; 14 Mk.; B. G. Teubner, Leipzig.

F. Klein. — **Elementarmathematik vom höhern Standpunkte aus.** Teil I: *Arithmetik, Algebra, Analysis.* Ausgearbeitet von E. Hellinger. — 1 vol. in-8°, 590 p.; 7 Mk. 50; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Netto. — **Gruppen- und Substitutionentheorie.** *(Sammlung Schubert.)* — 1 vol. p. in-8°, 175 p.; 5 Mk. 20; G. J. Göschen, Leipzig.

J. Rüefli. — **Elementare Theorie der Maxima u. Minima** nebst Aufgaben zur Uebung. — 1 vol. in-16, 79 p.; 2 fr. 50; A. Francke, Berne.

F. Schneider. — **Zur Methodik der Elementar-Mathematik.** Winke für Lehramtskandidaten und jüngere Lehrer. — 1 vol in-8°, 68 p.; 1 Mk. 40; Fr. Grub, Stuttgart und Berlin.

H.-E. Timerding. — **Geometrie der Kräfte.** — 1 vol. in-8°, 381 p.; 16 Mk.; B.-G. Teubner, Leipzig.

A. Voss. — **Ueber das Wesen der Mathematik.** — 1 vol. in-8°, 98 p.; 3 Mk. 60; B.-G. Teubner, Leipzig.

De la méthode dans les Sciences, par MM. les Professeurs: H. Bouasse, P. Delbet, E. Durkheim, A. Giard, A. Job, F. Le Dantec, L. Levy-Bruhl, G. Monod, P. Painlevé, E. Picard, Th. Ribot, J. Tannery, P.-F. Thomas — 1 vol. in-16; 3 fr. 50; F. Alcan, Paris.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie.

Organisation de l'enseignement.

Philosophie.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCES

CHRONIQUE

Congrès et sociétés savantes.

Articles divers.

Nécrologie.

NOTES ET DOCUMENTS

BIBLIOGRAPHIE

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaire ou annonce des principaux périodiques.

2. Publications non périodiques.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.
Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.

ERRATA

p. 245. 5e ligne à partir d'en bas, lire, pour le symbole du produit vectoriel **a** $\wedge$ **b**.

p. 248, ligne 10, lire : *Présidence,* sur la proposition de M. Luiggi, introducteur, M. d'Ocagne a été appelé à présider la séance.